Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département première année Technologie

Mai 2013

Examen de MATHS 2
durée 2 heures

Exercice n° 1. (6 pts)
Posons :

$$I = \int e^{2x} \cos^2 x \, dx \qquad \text{et} \qquad J = \int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$$

1. Calculer $I + J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I - J$.
3. Déduire I et J.

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Exercice n° 2. (6 pts)
1. Considérons l'équation différentielle : $y' + (1 - \frac{1}{x})y = x$ (1)
   a. Résoudre l'équation homogène associée à (1).
   b. Vérifier que $y_p(x) = x$ est une solution particulière de (1).
   c. En déduire la solution générale de (1).
   d. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(1) = 1 + \frac{1}{e}$.
2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + y = x^3 + 1.$$

Exercice n° 3. (8 pts)
1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.
b. Déduire la solution du système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} -2x + z = 1 \\ -6x + 2y = 1 \\ 6x - y - z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre suivant les valeurs de α le système linéaire suivant :

$$(S_\alpha) : \begin{cases} \alpha x + \alpha y + \frac{1}{2}\alpha z = 1 \\ x - \alpha y + \frac{1}{2} z = -1 \\ y - \alpha z = 4. \end{cases}$$

Bon Courage.

Université A. Mira de Béjaia

Faculté de Technologie

Département 1ère année Technologie.

Mai 2013

Corrigé de l'examen de Maths 2

Exo1:

1) $I+J=\int e^{2x}(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int e^{2x}\,dx$

$$\boxed{I+J=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1}\quad\cdots\ (1)$$

1,5 pt

2) $I-J=\int e^{2x}(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx=\int e^{2x}\cos 2x\,dx$

1,5 pt

Posons $u=e^{2x}\Rightarrow u'=2e^{2x}$

$v'=\cos 2x\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$I-J=u.v-\int u'v\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}.\sin 2x-\underbrace{\int e^{2x}.\sin 2x\,dx}_{L}$ (*)

Posons $f=e^{2x}\rightarrow f'=2e^{2x}$, $g'=\sin 2x\rightarrow g=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$L=\int e^{2x}.\sin 2x\,dx=fg-\int f'g\,dx$

$=e^{2x}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+\int e^{2x}\cos 2x\,dx$

$$L = -\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + (I-J) \text{ en remplace dans } (*)$$

$$I-J = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x + \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x - (I-J)$$ 1 pt

$$\Leftrightarrow \boxed{I-J = \frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C_2} \cdots (2)$$

3. $(1)+(2) \Leftrightarrow 2I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1\right]e^{2x} + C_1 + C_2.$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x + 2)e^{2x} + C}$$ 1 pt

$$(1)-(2) \Leftrightarrow \boxed{J = \frac{1}{8}(2 - \cos 2x - \sin 2x)e^{2x} + C'}$$ 1 pt

avec $C = \frac{C_1+C_2}{2}$ et $C' = \frac{C_1-C_2}{2}$.

Exo2:

a. $y' + (1-\frac{1}{x})y = 0 \Leftrightarrow y' = (\frac{1}{x}-1)y$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = (\frac{1}{x}-1)dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int (\frac{1}{x}-1)dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| - x + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = \frac{|x|}{e^x}\cdot e^c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_H = k.\frac{x}{e^x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$$ 1,5 pt

b. En remplace x dans (1) :

$$1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)x = x . \ (\text{ok})$$ 0,5 pt

c. $\boxed{y_G = y_H + y_p(x) = k\frac{x}{e^x} + x}$ 0,5 pt

d. $y_G(1) = \frac{k}{e} + 1 = 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{k=1}$ 0,5 pt

$$\boxed{y_p = \frac{x}{e^x} + x}$$

2. $$y'' + y = x^3 + 1 \ldots (E)$$

* Considérons l'équation homogène associée à (E) :

$$y'' + y = 0 \ldots (H)$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0 \ldots (EC)$$

admet 2 racines complexes : $r_1 = -i$ et $r_2 = i$ 0,5 pt

d'où $\boxed{y_G(H) = \lambda \cos x + \mu \sin x, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{C}}$ 0,5 pt

* Le second membre et un polynôme de degré 3 et comme le coefficient de y dans (E) et non nul, donc la solution particulièr $y_p(E)$ est de la forme :

$$y_p(E) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + \Delta$$
$$y_p'(E) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$y_p''(E) = 6Ax + 2B$$

en remplace dans (E)

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3 + 1$$

$$\iff Ax^3 + Bx^2 + (6A+C)x + 2B + D = x^3 + 1$$

Par identification : $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ \Delta = 1 \\ C = -6 \end{cases}$

1,5 pt

d'où $\boxed{y_p(E) = x^3 - 6x + 1}$

0,5 pt

La solution générale de (E) :

$$\boxed{y_G(E) = \lambda \cos x + \mu \sin x + x^3 - 6x + 1 \,,\ \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exo3 :

1.

a. A est inversible si et ssi $\det A \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \scriptstyle \ell_3 - \ell_1 \to \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_3 - C_2$$

1 pt

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \text{ donc A est inversible.}$$

* Calcul de A^{-1} :

- la comatrice C :

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2 pt

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(5/8)

b. le système (S) s'écrit :

$$(S) : BX = b \quad \text{avec} \quad B = A^{-1} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\det B = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \neq 0$ donc (S) admet

une seule solution :

$$X = B^{-1} . b = (A^{-1})^{-1} . b$$
$$= A . b$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1pt

2. Posons :
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$|A_\alpha| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & +\frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & \frac{1}{2} \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\left[\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\right] - \left[-\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\right] = \alpha^3 - \cancel{\tfrac{1}{2}\alpha} + \alpha^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}\alpha}$$ 0,5pt

$$= \alpha^2(\alpha+1)$$

- Si $\det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ (S_α) admet une seule solution. 0,5pt

- Si $\det A_\alpha = 0 \Rightarrow (S_\alpha)$ admet une infinité de solution ou il n'admet aucune solution.

(6/9)

* Si $\det A_\alpha \neq 0$ la solution est :

$$x = \frac{\Delta x}{|A_\alpha|}, \quad y = \frac{\Delta y}{|A_\alpha|}, \quad z = \frac{\Delta z}{|A_\alpha|}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ -1 & -\alpha & 1/2 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\alpha+1) \\ -1 & -\alpha & 1/2 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+1) \begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+1)(4\alpha-1)$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \frac{(4\alpha-1)}{\alpha^2}}$$

0,5 pt

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+\alpha & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\alpha \end{vmatrix} \ l_1 - \alpha l_2$$

$$\Delta y = -(\alpha+1) \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\alpha}}$$

0,5 pt

$$\Delta z = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \ l_1 + l_2$$

$$D_z = (\alpha+1)\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (\alpha+1)(-4\alpha+1)$$

$$\boxed{z = \frac{-4\alpha+1}{\alpha^2}}$$

0,5 pt

* Si dét $A_\alpha = 0$:

1ère situation : $(\alpha = 0)$:

$$(S_0) : \begin{cases} 0 = 2 & \text{impossible} \\ x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

0,5 pt

donc (S_0) n'admet pas de solution.

2ème situation $(\alpha = -1)$

$$(S_{-1}) : \begin{cases} -x - y + \frac{1}{2}z = 1 & \ldots (1) \\ x + y + \frac{1}{2}z = -1 & \ldots (2) \\ y + z = 4 & \ldots (3) \end{cases}$$

1 pt

de (3) : $\boxed{y = 4 - z}$ ... (4)

En remplaçant (4) dans (2) : $x = -1 - \frac{1}{2}z - 4 + z$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}z - 5} \ldots (5)$$

Si (4) et (5) vérifient (1) alors (S_{-1}) admet une infinité de solutions, sinon (S_{-1}) n'a aucune solution.

(4) et (5) dans (1) : $-\frac{1}{2}\cancel{z} + 5 - 4 + \cancel{z} - \frac{1}{2}\cancel{z} = 1$

donc (S_{-1}) admet une infinité de solutions E, avec

$$\boxed{E = \left\{ \left(\frac{1}{2}z - 5, 4 - z, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}}$$

(8/8)