Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2015-2016
Juin 2016

Examen de Remplacement de MATHS 2. Durée : 2 heures

Exercice n° 1. ***(7pts.)***

1. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - 2y = 4 - x. \tag{1}$$

   (a) Résoudre l'équation homogène associée à (1).

   (b) Vérifier que $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$ est une solution particulière de (1).

   (c) En déduire la solution générale de (1).

   (d) Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - y' - 2y = 3x^2 - 2x + 1.$$

Exercice n° 2. ***(5pts.)*** Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $I_n = e - nI_{n-1}$; (Indication : Utiliser l'intégration par parties).

Exercice n° 3. ***(8pts.)***

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

   (b) Déduire la solution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} -x - y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre suivant les valeurs de α le système suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2015-2016
Juin 2016

Corrigé de l'examen de remplacement de MATHS 2

Exercice n° 1. ***(7pts.)***

1. Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - 2y = 4 - x. \tag{1}$$

(a) Résolution de l'équation homogène associée à (1) : L'équation homogène associée est

$$y' - 2y = 0 \ldots\ldots\ (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 2 \implies \frac{dy}{y} &= 2dx \\ \implies \ln|y| &= 2x + K_1,\ K_1 \in \mathbb{R} \\ \implies y &= C_1 e^{2x},\ C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

1

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0). Finalement, la solution générale de (E_0) est

$$y(x) = ce^{2x},\ c \in \mathbb{R}.$$

(b) Vérification que $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$ est une solution particulière de (1) : On a

$$y_p'(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p' - 2y_p &= \tfrac{1}{2} - 2(\tfrac{-7}{4} + \tfrac{1}{2}x) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{4} - x = 4 - x. \end{aligned}$$

1

Donc $y_p(x) = \frac{-7}{4} + \frac{1}{2}x$, une solution particulière de (1).

(c) Déduction de la solution générale de (1) :

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= ce^{2x} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}x,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1

(d) Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(0) = 1$: On a

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow ce^{2.0} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}(0) = 1 \\ &\Rightarrow c - \tfrac{7}{4} = 1 \\ &\Rightarrow c = \tfrac{11}{4}. \end{aligned}$$

1

Donc la solution voulue est

$$y_1(x) = \frac{11}{4}e^{2x} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}x.$$

2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - y' - 2y = 3x^2 - 2x + 1. \tag{2}$$

(a) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad ....(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad ....(C)$$

(C) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ 1

(b) Détermination d'une solution particulière y_1 de (2) : 0 n'est pas une racine de (C), donc y_1 est de la forme

$$y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_1'(x) = 2\alpha x + \beta \ \text{ et } \ y_1''(x) = 2\alpha.$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}
y_1'' - y_1' - 2y_1 = 3x^2 - 2x + 1 &\Leftrightarrow 2\alpha - (2\alpha x + \beta) - 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 3x^2 - 2x + 1 \\
&\Leftrightarrow -2\alpha x^2 - 2(\alpha + \beta)x + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 3x^2 - 2x + 1 \\
&\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = 3 \\ -2\alpha - 2\beta = -2 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-3}{2} \\ \beta = \frac{5}{2} \\ \gamma = \frac{-13}{4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

1,5

Donc

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}.$$

(c) Détermination de la solution générale de (1) : La solution générale de (1) est

$$\begin{aligned}
y_g(x) &= y_0(x) + y_1(x) \\
&= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{5}{2}x - \tfrac{13}{4}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$ 0,5

Exercice n° 2. Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 et I_1 : On a

$$I_0 = \int_1^e (\ln x)^0 dx = \int_1^e dx = x|_1^e = e - 1.$$ 1,5

$$I_1 = \int_1^e 1. \ln x dx.$$

Posons

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln x &\Longrightarrow f'(x) = \tfrac{1}{x} \\
g'(x) = 1 &\Longrightarrow g(x) = x.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= x \ln x|_1^e - \textstyle\int_1^e 1dx \\
&= e \ln e - \ln 1 - (e - 1) = 1.
\end{aligned}$$ 1,5

2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $I_n = e - nI_{n-1}$: Posons

$$\begin{array}{lll} f(x) = (\ln x)^n & \Longrightarrow & f'(x) = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} \\ g'(x) = 1 & \Longrightarrow & g(x) = x. \end{array}$$

02

Donc

$$\begin{array}{lll} I_n & = & x(\ln x)^n|_1^e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} \\ & = & e - nI_{n-1}. \end{array}$$

Exercice n° 3.

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrons que A est inversible et calculons son inverse : Développement suivant la deuxième colonnè

$\det A = -(-1)\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -1.$ $\det A \neq 0$, donc A est inversible.

1,5

On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(comA),$$

avec

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

A_{ij} désigne la matrice d'ordre 2 déduite de A en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne. Après calculs, on trouve

$$ComA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t(comA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1,5

(b) Déduction de la solution du système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} -x - y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

On a

$$(S) \Longleftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1,5

Remarque : On peut utiliser aussi la méthode de Cramer.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolution suivant les valeurs de α du système suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha y - z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

On a

$$(S_\alpha) \Longleftrightarrow A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_\alpha = 1 \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha)(1+\alpha).$ 0,5

i) Si $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq 1$ (i.e., $\det A_\alpha \neq 0$) alors (S_α) est un système de Cramer et admet une unique solution donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \boxed{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \boxed{0} \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \boxed{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}.$$

1,5

ii) Si $\alpha = 1$: On a

$$(S_1) \Longleftrightarrow A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_1 = 0$, donc le système (S_1) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_1 on trouve

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; \det M_1 = -2.$$

M_1 est associée au système

1

$$(1) \begin{cases} x + z = 1 - y, \\ x - z = 1 - y. \end{cases}$$

Les deux inconnues $x,\ z$ sont les inconnues principales et y est un paramètre. (1) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = 1 - y$ et $z = 0$.
On porte cette solution $(x,\ z)$ dans la troisième équation du système (S_1)

$$x + y - z = (1 - y) + y - 0 = 1.$$

Finalement, (S_1) admet une infinité de solutions

$$\{(1 - y, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Si $\alpha = -1$: On a

$$(S_{-1}) \Longleftrightarrow A_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det A_{-1} = 0$, donc le système (S_{-1}) n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A_{-1} on trouve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \det M_2 = -2.$$

M_2 est associée au système

$$(2) \begin{cases} x + y = -1 + z, \\ x - y = 1 + z. \end{cases}$$

Les deux inconnues $x,\ y$ sont les inconnues principales et z est un paramètre. (2) admet une solution (paramétrique) unique donnée par : $x = z$ et $y = -1$.
On porte cette solution $(x,\ y)$ dans la troisième équation du système (S_{-1})

$$x + y - z = z - 1 - z = -1 \neq 1.$$

0,5

Finalement, le système (S_{-1}) n'admet pas de solutions.
Remarque : On peut remarquer que la première équation et la troisième équation du système (S_{-1}) ***sont incompatibles, donc*** (S_{-1}) ***n'admet pas de solutions.***