Chps 1 : Methodes des plans d'experience

I / Plan factoriel

Def : Un plan est dit factoriel si chacun des niveau d'un facteur est associe à chacun des niveaux de l'autre ou des autres.
Les plans factoriels utilisent la methode de l'analyse de la variance pour l'interpretation des résultats dans le sens des effets principaux et interaction.
Le tableau des données est de type

x_1	x_2	...	x_k	Réponse Y
x_{11}	x_{12}		x_{1k}	y_1
⋮			⋮	
x_{k1}	x_{k2}		x_{kk}	y_k

Ds le quel on a k variables et on realise k experiences.

Rq : Comme exp ce tableau permet de définir un modele lineaire de regression multiple et l'analyse de la variance permet de deter quels sont les facteurs dont l'influence est significative à un risque donneé.

II Plan factoriel complet à 2 niveaux

On suppose que tous les facteurs sont à 2 niveaux : niveau haut et niveau bas. On considère toutes les combinaisons possible aux limites du domaine d'étude.
Le nombre d'essais max ds ce cas est $n = 2^k$
k = nombre de facteurs à 2 niveaux.

1/ Matrice d'experience.

est le tableau qui le nombre d'experiences à realiser avec la façon de faire varier les facteurs et l'ordre ds le quel il faut realiser les experiences. Le tableau est alors compo de $+1$ (n. haut) et -1 (n. bas)

Exp Cas de deux facteurs X_1 et X_2 $n = 2^2 = 4$

Exp	X_1	X_2
n° 1	-1	-1
2	1	-1
3	-1	1
4	1	1

On réalise alors dans la pratique 4 experiences.
si on ajoute la colonne de Y (reponse) on obtient la matrice d'experience et de reponse

2/ Effet global et effet moyen.

2-a) Un seul facteur:

Soit le facteur X_1 a deux niveaux -1 et 1 $n = 2^1$

La matrice ~~des~~ ~~sy~~ d'experience et de reponses est

Ex	X_1	Y
1	-1	y_1
2	1	y_2

Défs: On appelle effet globale d'un facteur sur la reponse la variation de la reponse qd le facteur passe du niveau -1 à 1

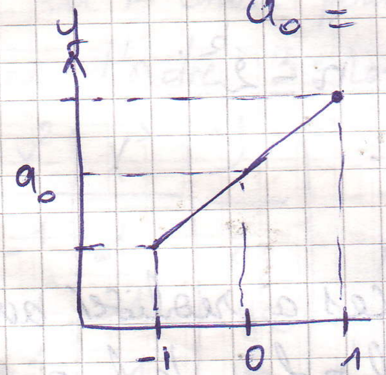
On appelle effet moyen sur la reponse, la demi-variation de la reponse lorsque le facteur passe du niveau -1 à 1

Effet global de X_1 ~~$a_1 =$~~ $y_2 - y_1$

Effet moyen de X_1 $a_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$

La reponse théorique au centre du domaine d'experience est

$a_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ c'est la moyenne des reponses



Rq: bien que les 2 pts experimentaux soient reliés par un segm de droite, il n'ya pas pour le moment d'hypo de "linearité" fait

2.b/ Deux facteurs

Supposons que nous ayons maintenant 2 facteur x_1 et x_2 avec chac deux niveau (plan 2^2). La matrice d'experience et des réponses est

Exp	x_1	x_2	Rep Y
1	-1	-1	y_1
2	1	-1	y_2
3	-1	1	y_3
4	1	1	y_4

Calcul des effets.

L'effet moyen de x_1 est tjs la demi variance de réponse lorsqu'on passe du nivea -1 à 1. Or chacun des niveaux de x_1 il y a 2 experience (1 par chaque niveau de x_2). Nous devons alors envisager des réponse moyennes

La reponse moyenne ~~pour~~ lorsque x_1 est au niveau -1 : $\frac{y_1+y_3}{2}$

" " " " haut +1 : $\frac{y_2+y_4}{2}$

L'effet global de x_1 est $a_1 = \frac{\frac{y_2+y_4}{2} - \frac{y_1+y_3}{2}}{2} = \frac{y_2+y_4-y_1-y_3}{4}$

et l'effet global de x_2 de la m̂ manière est $a_2 = \frac{-y_1-y_2+y_3+y_4}{4}$

Comme ds le cas d'1 seul facteur, on calcule la réponse theorique a_0 po $x_1 = 0$ (au centre de son centre de variation

$$a_0 = \frac{\frac{y_3+y_4}{2} + \frac{y_1+y_2}{2}}{2} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} \quad \text{moyenne des réponse } \overline{Y}$$

Rq : m̂ resultat si on raisonne à partir de x_2

2.c/ Trois facteurs et plu

x_1, x_2, x_3 plan 2^3

$x_1, \ldots, x_k$ plan 2^k

Matrice d'experience et des reponse

E	x_1	x_2	x_3	y_k
1	-1	-1	-1	y_1
2	1	-1	+1	
	1	1	-1	
	-1	1	1	
	1	-1	-1	
8	1	-1	1	y_8

Ex	x_1	x_2	—	x_k	Y
1	-1			-1	
2	-1			1	
	-1			-1	
2^k					

3 / Notion d'interaction

On dit qu'il y a interaction entre deux facteurs si l'effet moyen de l'un n'est pas le m̂ suivant qu'on se place au niveau bas ou au niveau haut de l'autre

L'interaction entre x_1 et x_2 sera considéré comme un facteur $x_1 x_2$.

Exp : Soit la matrice d'expérience et de réponse.

Ex	x_1	x_2	y_k
1	-1	-1	60
2	$+1$	-1	85
3	-1	1	75
4	$+1$	$+1$	90

Au niveau haut de X_1, l'effet moyen de X_2

$$\frac{90-85}{2} = 2{,}5$$

Au niveau bas de X_1 l'effet moyen de X_2

$$\frac{75-60}{2} = 7{,}5$$

Les 2 n^bres sont ≠, il y donc interaction entre X_1 et X_2.

pour l'interaction entre 2 facteurs on dit interaction d'ordre 2

pour l'interaction entre 3 facteurs on dit " " 3

etc ...

Calcul pratique de l'interaction :

Au niveau haut de X_1, l'effet moyen de X_2 : $\frac{y_4-y_2}{2}$

bas de X_1, — — : $\frac{y_3-y_1}{2}$

l'effet moyen de l'interaction $X_1 X_2$ $a_{12} = \dfrac{\frac{y_4-y_2}{2} - \frac{y_3-y_1}{2}}{2} = \dfrac{y_4-y_2-y_3+\dots}{4}$

on obtient la m̂ chose pour $X_2 X_1$

Interaction d'ordre 3 : La matrice d'expérience et réponse

Exp	X^1	X^2	X^3	Y
1	-1	-1	-1	y_1
2	$+1$	-1	-1	y_2
3	-1	$+1$	-1	y_3
4	$+1$	$+1$	-1	y_4
5	-1	-1	1	y_5
6	$+1$	-1	1	y_6
7	-1	1	1	y_7

Au niveau haut de X_1, l'effet moyen ...

X_2 est : $\frac{y_8-y_6+y_4-y_2}{4}$

X_3 est : $\frac{y_8+y_6-y_4-y_2}{4}$

l'effet moyen de l'interaction $X_2 X_2$ est :

Au niveau bas de X_1, l'effet moyen de

X_2 est : $\frac{y_7 - y_5 + y_3 - y_1}{4}$

X_3 est : $\frac{y_7 + y_5 - y_3 - y_1}{4}$

L'effet moyen de l'intéraction

X_1X_2 est $a_{12} = \frac{\left(\frac{y_8 - y_6 + y_4 - y_2}{4}\right) - \left(\frac{y_7 - y_5 + y_3 - y_1}{4}\right)}{2} = \frac{y_8 - y_6 + y_4 - y_2 - y_7 + y_5 \ldots}{8}$

X_1X_3 est $a_{13} = \frac{\left(\frac{y_8 + y_6 - y_4 - y_2}{4}\right) - \left(\frac{y_7 + y_5 - y_3 - y_1}{4}\right)}{2} = \frac{y_8 + y_6 - y_4 - y_2 - y_7 - y_5 + y_3 \ldots}{8}$

$\frac{\text{haut} - \text{bas}}{2}$

Motif

Malgré la facilité de construction d'une matrice complète spécialement quand le n^{bre} de facteurs est petit, il est ajusticie[?] d'ordonner les niveaux de façon à obtenir toutes les combinaisons possible

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	———	Niveau k.
−1	−1	−1		−1
+1	−1	−1		−1
−1	1	−1		⋮
+1	1	1		−1
⋮	−1	⋮		+1
	−1			+1
	1			+1
	1			⋮

(Niveau k : k fois -1, puis k fois $+1$)

Modélisation Mathématique

En absence de toute information sur la fonction qui lie la réponse aux facteurs, on se donne apriori une loi d'évolution dont la formulation générale est

$$y = f(X^1, \ldots, X^p) + \varepsilon$$

ε est une erreur dûe à l'ajustement que l'on suppose généralement de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 < \infty$.

Ds le cas des modèles ~~linéaires~~, les plus utilisés en pratiques

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X^i + \sum_{i<j} a_{ij} X^i X^j + \varepsilon$$

y est la réponse : La grandeur à laquelle on s'interesse

$X^k = x^k$ le niveau k.

$a_0, \ldots, a_k, a_{ij}$ $i \neq j$ sont des coefficient (c^{ts}) associés à chaque niveaux et interaction resp.

Modèles ~~linéaires~~ affine $y = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X^i$ ~~$+ \varepsilon$~~ sans interaction

" quadratique $y = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X^i + \sum_{i<j} a_{ij} X^i X^j$

<u>Exp :</u>

Modèle affine à 2 facteurs (et 2 niveaux chacun) san interaction

$$y = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \cancel{a_{12} X^1 X^2}$$

avec interaction : $y = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_{12} X^1 X^2$

<u>Pour 3 facteurs</u>

~~Avec~~ interaction : $y = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_{12} X^1 X^2 + a_{13} X^1 X^3 + a_{23} X^2 X^3 + a_{123} X^1 X^2 X^3$

San interaction : $y = a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_3 X^3$

V/ Validation des plans d'experiences. (facteur à 2 niveaux)

1/ Cas d'un facteur à deux niveaux

Le modèle : $y_i = a_0 + a_1 X_i^1 + \varepsilon_i \quad i = 1,2.$

$\hat{y}_i = \bar{y} + \hat{a}_1 X_i^1$

variation totale : $V_T = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \bar{y})^2$

$= \sum_{i=1}^{2} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{2} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$

Variation résiduelle : $V_R = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{2} = 0$

Variation due au facteur : $V_X = \sum_{i=1}^{2} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$

Sous les hypothèses : $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma)$ et indp^{tes}.

on a $\frac{1}{\sigma^2} V_T \sim \chi^2_1$

$V_X = \sum_{i=1}^{2} (\hat{a}_1 X_i^1)^2 = 2\hat{a}_1^2 = (y_2 - y_1)^2 \sim \chi^2_1 \times \sigma^2$

$y_2 - y_1 \sim N(2a_1 ; \sigma)$

2) Modèle à deux facteurs.

Le modèle : $y_i = a_0 + a_1 X_i^1 + a_2 X_i^2 + a_{12} X_i^1 X_i^2 + \varepsilon_i \quad i = 1,4$

$\hat{y}_i = \bar{y} + \hat{a}_1 X_i^1 + \hat{a}_2 X_i^2 + \hat{a}_{12} X_i^1 X_i^2$

- Variation totale : $V_T = \sum_{i=1}^{4} (y_i - \bar{y})^2 \sim \sigma^2 \chi^2_3$.

- Variation due au facteur X^1 : $V_{X^1} = \sum_{i=1}^{4} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$

$= \sum_{i=1}^{4} (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_1 X_i^1)^2$

$\bar{y} + \hat{a}_1 X_i^1$ est la valeur attendue lorsque X^1 agit seul.

- Variation due au facteur X^2 : $V_{X^2} = \sum_{i=1}^{4} (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_2 X_i^2)^2$

$\bar{y} + \hat{a}_1 X_i^2$ est la valeur attendue lorsque X^2 agit seul.

- Variation due à l'interaction : $V_{X^{12}} = \sum_{i=1}^{4} (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_{12} X^{12})^2$

$\bar{y} + \hat{a}_{12} X_i^{12}$ est la valeur attendu si l'interaction agit seule.

- Variation résiduelle : $V_R = \sum_{i=1}^{4} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$

On a $V_T = V_R + V_{X^1} + V_{X^2} + V_{X^{12}}$, et

$$\frac{V_T}{\sigma^2} \sim \chi^2_3 \cdot \quad \frac{V_{X^1}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1, \quad \frac{V_{X^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1 \text{ et } \frac{V_{X^{12}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$$

Pour tester, en utilisant l'ANOVA

1) H_0 : "$a_1 = 0$" H_1 : "$a_1 \neq 0$"

2) H_0 : "$a_2 = 0$" H_1 : "$a_2 \neq 0$"

3) H_0 : "$a_{12} = 0$" H_1 : "$a_{12} \neq 0$"

Il faut des repetitions d'experiences pour tester les effets des ≠ facteurs car une observation est très insuffisante pour construire un estimateur.

essais	X^1	X^2	y = reponse	nbre n rep	moy
1	-1	-1	y_{11} --- y_{1n_1}	n_1	$\bar{y}_{1.}$
2	1	-1	y_{21} --- y_{2n_2}	n_2	$\bar{y}_{2.}$
3	-1	1	y_{31} --- y_{3n_3}	n_3	$\bar{y}_{3.}$
4	1	1	y_{41} --- y_{4n_4}	n_4	$\bar{y}_{4.}$

On pose :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \qquad n = \sum_{i=1}^{4} n_i$$

Le modèle : $y_{ij} = a_0 + a_1 X_i^1 + a_2 X_i^2 + a_{12} X_i^{12} + \varepsilon_{ij}$ $i = \overline{1,4}$ $j = \overline{1, n_i}$

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y} + \hat{a}_1 X_i^1 + \hat{a}_2 X_i^2 + \hat{a}_{12} X_i^{12}$$

Variation totale $V_T = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$

due au facteur X^1 $V_{X^1} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (\cancel{\bar{y}_{i.} - \bar{y}})^2 (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_1 X_i^1)^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_1 X_i^1)^2$

" " X^2 : $V_{X^2} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_2 X_i^1)^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_2 X_i^2)^2$

interaction : $V_{X^{12}} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_{12} X_i^{12})^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i (\cancel{\bar{y}} + \hat{a}_{12} X_i^{12})^2$.

residuelle $V_R = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2$

On a : $V_T = V_{X^1} + V_{X^2} + V_{X^{12}} + V_R$.

En effet $(y_{ij} - \bar{y}) = (y_{ij} - \hat{y}_{ij}) + (\hat{y}_{ij} - \bar{y})$

$$= (y_{ij} - \hat{y}_{ij}) + (\bar{y} + \hat{a}_1 X_i^1 + \hat{a}_2 X_i^2 + \hat{a}_{12} X_i^{12} - \bar{y})$$

$$= (y_{ij} - \hat{y}_{ij}) + (\hat{a}_1 X_i^1)^2 + (\hat{a}_2 X_i^2) + (\hat{a}_{12} X_i^{12})$$

Et $(y_{ij} - \bar{y})^2 = (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 + (\hat{a}_1 X_i^1)^2 + (\hat{a}_2 X_i^2)^2 + (\hat{a}_{12} X_i^{12})^2 + (y_{ij} - \hat{y}_{ij})(\hat{a}_1 X_i^1) + (y_{ij} - \hat{y}_{ij})(\hat{a}$

$(y_{ij} - \hat{y}_{ij})(\hat{a}_{12} X_i^{12}) + (\hat{a}_1 X_i^1)(\hat{a}_2 X_i^2) + (\hat{a}_1 X_i^1)(\hat{a}_{12} X_i^{12}) + (\hat{a}_2 X_i^2)(a_{12} X_i^{12})$

Il est facile de vérifier que $\sum_{i=1}^{\cdot} \sum_{j=1}^{m}$ doubles produit $= 0$

On a $\frac{V_T}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\frac{V_{X^1}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$$

$$\frac{V_{X^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$$

$$\frac{V_{X^{12}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$$

et $\frac{V_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-4}$

Tests : $H_0^{(1)}$: " $a_1 = 0$ " vs $H_1^{(1)}$: " $a_1 \neq 0$ "

$H_0^{(2)}$: " $a_2 = 0$ " vs $H_1^{(2)}$: " $a_2 \neq 0$ "

$H_0^{(3)}$: " $a_{12} = 0$ " vs $H_1^{(3)}$: " $a_{12} \neq 0$ "

Tableau de l'ANOVA

Source de variation	d°L	Fex	$F_{Tab}(\alpha,)$	Conclusion.
V_{X^1}	1	$\frac{V_{X^1}}{(n-4)V_R}$	$F_{1,n-4}$	si $F_{1,n-4} \cancel{<} \frac{V_{X^1}}{(n-4)V_R}$ on rejette H_0
V_{X^2}	1	$\frac{V_{X^2}}{(n-4)V_R}$	$F_{1,n-4}$	si $\frac{V_{X^2}}{(n-4)V_R} > F_{1,n-4}$ on rejette H
$V_{X^{12}}$	1	$V_{X^{12}}/(n-4)V_R$	$F_{1,n-4}$	si $\frac{V_{X^{12}}}{(n-4)V_R} > F_{1,n-4}$ on rejette H_0
V_R	$n-4$			
V_T	$n-1$			

Remarques : $H_0^{(1)}$ vs $H_1^{(1)}$: Tester l'effet du 1er facteur X^1

$H_0^{(2)}$ vs $H_1^{(2)}$: " " " " X^2

$H_0^{(3)}$ vs $H_1^{(3)}$: Test l'effet de l'interaction entre X^1 et X^2