# chp 3 / Plan à deux facteurs à plusieurs niveaux

## I / Introduction

Ce chapitre traite les plans d'expérience à deux facteurs A et B à plusieurs niveaux chacun.

A facteur à $r$ niveaux $a_1, \dots, a_r$

B facteur à $s$ niveaux $b_1, \dots, b_s$

La matrice d'expérience est donnée par

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & \multicolumn{4}{c}{\text{Facteur } B} \\
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\
\hline
a_1 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1s} \\
a_2 & & & & \\
\vdots & & & & \\
a_r & y_{1r} & y_{2r} & \cdots & y_{rs} \\
\hline
\end{array}
$$

Facteur A

$y_{ij}$ pour $i = \overline{1,r}$ et $j = \overline{1,s}$ est la réponse pour la combinaison $(a_i, b_j)$

Modèle mathématique : $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \; \varepsilon_{ij}$ $\quad i = \overline{1,r}$ $\quad j = \overline{1,s}$

$\mu$ : moyenne globale

$\alpha_i$ : effet du facteur A

$\beta_j$ : effet du facteur B,

$\varepsilon_{ij}$ erreur aléatoire supposée de moyenne nulle et variance $\sigma^2 < \infty$

$\gamma_{ij}$ effet d'interaction entre A et B.

Rq : pour chaque $(i,j)$ on a une observation $y_{ij}$, il est donc pas possible d'estimer $\gamma_{ij}$. Il faut alors faire plusieurs essais pour chaque ~~cham~~ combinaison $(i,j)$.

Pour commencer, nous allons étudier le cas de non répétition d'essais, ce qui revient à ne pas tenir compte d'effet d'interaction.

## II / Plan sans répétition d'essais (Modèle sans interaction)

Soient A et B deux facteurs (indépendants)

Le modèle mathématique est donné par

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i=\overline{1,r} \quad \text{et} \quad j=\overline{1,s}$$

## II.1 / Estimation des paramètres

De la même manière que dans le cas d'un facteur les paramètres $\mu, \alpha_i, \beta_j$ sont estimés par la méthode M.C

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(y_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)^2$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu} = 0 \iff \boxed{\frac{1}{r.s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}y_{ij} = \hat{\mu} = \bar{y}}$$

Sous les contraintes naturelles $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_i} = 0 \iff \sum_{j=1}^{s}y_{ij} - s\mu - s\alpha_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}y_{ij} - \bar{y} \boxed{= \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\beta} = 0 \iff \sum_{i=1}^{r}y_{ij} - r\mu - r\beta_j = 0$$

$$\iff \hat{\beta}_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_{ij} - \bar{y} \boxed{= \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}}$$

Sous l'hypothèse $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma)$, on estime $\sigma^2$ par la méthode du maximum de vraisemblance

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{r.s}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y})^2}$$

## II.2) Validation du modèle

On utilise le test d'ANOVA, pour tester les effets des facteurs.

Tests : $H_0^{(1)}$ : " $\alpha_i = 0 \quad i = \overline{1,r}$ " vs $H_1^{(1)}$ : " $\exists i \quad \alpha_i \neq 0$ "

$H_0^{(2)}$ : " $\beta_j = 0 \quad j = \overline{1,s}$ " vs $H_1^{(2)}$ : " $\exists j \quad \beta_j \neq 0$ "

## II.3) Equation de l'analyse de la variance

Variance totale $S_T^2 = \frac{1}{s.r} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (y_{ij} - \bar{y})^2$

Variance dûe au facteur A : $S_A^2 = \frac{1}{sr} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} (\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2$

" " B : $S_B^2 = \frac{1}{sr} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2 = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} (\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2$

variance résiduelle $S_R^2 = \frac{1}{s.r} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y})^2$

<u>Proposition</u>

On a $S_T^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_R^2$

<u>Preuve</u> : voir le cas d'un facteur.

## II.4) Lois de $S_T^2$, $S_A^2$, $S_B^2$ et $S_R^2$

$\frac{s.r}{\sigma^2} S_T^2 \sim \chi^2_{s.r-1}$ $\quad E(S_T^2) = \left(\frac{s.r}{\sigma^2}\right)^{-1} (sr - 1)$

$\frac{rs}{\sigma^2} S_A^2 \sim \chi^2_{r-1}$ $\quad E(S_A^2) = \left(\frac{rs}{\sigma^2}\right)^{-1} (r - 1)$

$\frac{rs}{\sigma^2} S_B^2 \sim \chi^2_{s-1}$ $\quad E(S_B^2) = \left(\frac{sr}{\sigma^2}\right)^{-1} (s - 1)$

$\frac{sr}{\sigma^2} S_R^2 \sim \chi^2_{(s-1)(r-1)}$ $\quad E(S_R^2) = \left(\frac{s.r}{\sigma^2}\right)^{-1} (r-1)(s-1)$

$$\frac{S_A^2/(r-1)}{S_R^2/(r-1)(s-1)} \sim F\left(r-1 ; (r-1)(s-1)\right) \qquad \frac{S_B^2/(s-1)}{S_R^2/(s-1)(r-1)} \sim F\left(s-1 ; (r-1)(s-1)\right)$$

Tableau d'ANOVA

| Source de variation | $d^e L$ | $CM$ | $F_{obs}$ | $F_T$ |
|---|---|---|---|---|
| Dûe facteur A | $r-1$ | $\frac{S_A^2}{r-1}$ | $\frac{S_A^2/(r-1)}{S_R^2/(r-1)(s-1)}$ | $k_\alpha$ sur $F_\alpha(r-1;(r-1)(s-1))$ |
| Dûe facteur B | $s-1$ | $\frac{S_B^2}{s-1}$ | $\frac{S_B^2/(r-1)}{S_R^2/(r-1)(s-1)}$ | $k'_\alpha$ sur $F_\alpha(s-1;(r-1)(s-1))$ |
| Residuelle | $(r-1)(s-1)$ | $\frac{S_R^2}{(r-1)(s-1)}$ | | |
| Totale | $r.s-1$ | | | |

Test $H_0^{(1)}$ vs $H_1^{(1)}$ $RC = \left[\frac{S_A^2/(r-1)}{S_R^2/(r-1)(s-1)} > k_\alpha\right]$

$H_0^{(2)}$ vs $H_1^{(2)}$ $RC = \left[\frac{S_B^2/(r-1)}{S_R^2/(r-1)(s-1)} > k'_\alpha\right]$

## III / Avec Repetition d'essais (modele avec interaction).

L'interaction dans le sens de l'ANOVA, mesure l'influence que l'état d'un facteur a sur l'effet exercé par l'autre facteur sur la variable réponse, En d'autres mots, il y a interaction. L'effet des facteur aux differents niveaux change selon le niveau de l'autre facteur. Ou encore, lorsque l'effet des deux facteurs appliqués ensemble ne peuvent pas être déduits des moyenne des reponses des deux facteurs pris separément.

Le modele avec interaction peut être appliqué lorsqu'on dispose de plusieurs mesures pour chaque combinaison de niveaux des deux facteurs. Le benefice et qu'on peut tester l'interaction entre les deux facteurs.

Le modele mathématique d'un plan à deux facteurs avec repetition d'essais, tient compt de l'interaction et est donnée par :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, \ldots, r$ $r$ est le nombre de niveau du facteur A

$j = 1, \ldots, s$ $s$ — — B

$k = 1, \ldots, t$ $t$ le nombre de repetition de chaque combinaison des niveaux A et B.

$\mu$ est la moyenne de la population.

$\alpha_i$ effet du facteur A

$\beta_j$ effet du facteur B

$\gamma_{ij}$ effet d'interaction entre A et B.

$\varepsilon_{ijk}$ fluctuation aléatoire supposée de moyenne ~~nulle~~ et var $\sigma^2 < \infty$ et indépendante.

### III.1 / Estimation des paramètres.

De la même manière que dans le cas d'un plan sans repetition d'essais, on utilise le critere M.C pour estimer $\mu$, $\alpha_i$, $\beta_j$ et $\gamma_{ij}$

Sous les contraints naturells $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij}$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} \left(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij}\right)^2$$

• Estimation de la moyenne $\mu$.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = 0 \iff \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{r.s.t} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk} = \bar{y}}$$

• Esimation de l'effet $\alpha_i$ de A

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = 0 \iff \frac{1}{st} \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk} - \mu = \alpha_i =$$

$$\boxed{\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}}$$

• Estimation de l'effet $\beta_j$ de B

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_j} = 0 \iff \frac{1}{r.t} \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk} - \mu = \beta_j$$

$$\boxed{\hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}}$$

• Estimation de l'effet d'interaction

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} = 0 \iff \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j = \gamma_{ij}$$

$$\iff \hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y} - (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}) - (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y})$$

$$\boxed{\hat{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}}$$

• Estimation de la variance $\sigma^2$ de $\varepsilon$.

La variance des fluctuation aléatoire est estimée par la methode de maximum de vraisemblance sous l'hypothèse de normalité. $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma)$

$$L(y, \sigma) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij})^2}\right]$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma) \Rightarrow y_{ijk} \sim N(\cancel{\mu} - \alpha_i - \beta_j - \gamma_{ij}, \sigma)$$

$$\frac{\partial \left(\ln\left(L(y,\sigma)\right)\right)}{\partial \sigma} = 0 \iff \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{r.s.t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right)^2$$

## III.2/ Validation du modèle

On utilise le test d'ANOVA pour tester les effets de facteurs et leur interaction.

Le facteur A, a t-il un effet sur la réponse ?

Test : $H_0^{(1)}$ : " $\forall i = \overline{1,r}$ $\alpha_i = 0$ " vs $H_1^{(1)}$ : " $\exists i$ $\alpha_i \neq 0$ "

Le facteur B a t-il un effet sur la réponse ?

Test : $H_0^{(2)}$ : " $\forall j = \overline{1,s}$ $\beta_j = 0$ " vs $H_1^{(2)}$ : " $\exists j$ $\beta_j \neq 0$ ".

Existe t-il une interaction entre A et B.

Test $H_0^{(3)}$ : " $\forall (i,j)$ $\gamma_{ij} = 0$ " vs $H_1^{(3)}$ : " $\exists (i,j)$ $\gamma_{ij} \neq 0$ ".

## III.3/ Équation de l'analyse que la variance.

Variance totale $S_T^2 = \frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(y_{ijk} - \overline{y}\right)^2$

Variance due au facteur A : $S_A^2 = \frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}\right)^2$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}\right)^2$$

Variance due au facteur B : $S_B^2 = \frac{1}{r.s.t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}\right)^2$

$$= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}\right)^2$$

Variance due à l'interaction : $S_{AB}^2 = \frac{1}{str}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}\right)^2$

Variance residuelle : $S_R^2 = \frac{1}{r.s.t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right)^2$

Proposition : $S_T^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2 + S_R^2$

Preuve : Indication

$$\left(y_{ijk} - \overline{y}\right)^2 = \left[\left(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right) + \left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}\right) + \left(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}\right) + \left(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}\right)\right]^2$$

## III.4/ Lois de $S_T^2$, $S_A^2$, $S_B^2$, $S_{AB}^2$ et $S_R^2$

$$\frac{rst}{\sigma^2} S_T^2 \sim \chi^2_{rst-1} \qquad E(S_T^2) = \frac{\sigma^2}{rst}(rst-1)$$

$$\frac{rst}{\sigma^2} S_A^2 \sim \chi^2_{(r-1)} \qquad E(S_A^2) = \frac{\sigma^2}{rst}(r-1)$$

$$\frac{rst}{\sigma^2} S_B^2 \sim \chi^2_{(s-1)} \qquad E(S_B^2) = \frac{\sigma^2}{rst}(s-1)$$

$$\frac{s.rt}{\sigma^2} S_{AB}^2 \sim \chi^2_{(r-1)(s-1)} \qquad E(S_{AB}^2) = \frac{\sigma^2}{s.rt}(r-1)(s-1)$$

$$\frac{rst}{\sigma^2} S_R^2 \sim \chi^2_{rs(t-1)} \qquad E(S_R^2) = \frac{\sigma^2}{\cancel{rst}} \cancel{rs}(t-1)$$

- $$\frac{\cancel{\frac{rst}{\sigma^2}} S_A^2/(r-1)}{\cancel{\frac{rst}{\sigma^2}} S_R^2/rs(t-1)} = \frac{S_A^2/(r-1)}{\cancel{\frac{t}{t-1}} S_R^2/rs(t-1)} \sim F_{(r-1,(t-1)rs)}$$

- $$\frac{S_B^2/(t-1)}{\cancel{\frac{t}{(t-1)}} S_R^2/rs(t-1)} \sim F_{(s-1;(t-1)rs)}$$

- $$\frac{S_{AB}^2/(r-1)(s-1)}{S_R^2/rs(t-1)} \sim F_{((r-1)(s-1);rs(t-1))}$$

Tableau d'ANOVA

| S. variation | d°L | C.M | $F_{emp}$ | $F_{Tab}(\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|
| facteur A | $r-1$ | $S_A^2/r-1$ | $\frac{S_A^2/(r-1)}{S_R^2/rs(t-1)}$ | $F^{(\alpha)}_{(r-1;rs(t-1))}$ |
| facteur B | $s-1$ | $S_B^2/(r-1)$ | $\frac{S_B^2/(s-1)}{S_R^2/rs(t-1)}$ | $F^{(\alpha)}_{(s-1,rs(t-1))}$ |
| inte. AB | $(r-1)(s-1)$ | $S_{AB}^2/(r-1)(s-1)$ | $\frac{S_{AB}^2/(r-1)(s-1)}{S_R^2/rs(t-1)}$ | $F^{(\alpha)}_{((r-1)(s-1);rs(t-1))}$ |
| Résiduelle | $rs(t-1)$ | $S_R^2/rs(t-1)$ | | |
| Totale | $rst-1$ | | | |

Les régions crétique

Test (1) $H_0^{(1)} / H_1^{(1)}$ $RC_1 = \left[ \dfrac{S_A^2/(r-1)}{S_R^2/sr(t-1)} > k_\alpha \right]$

Test (2) $H_0^{(2)} / H_1^{(2)}$ $RC_2 = \left[ \dfrac{S_B^2/(s-1)}{S_R^2/sr(t-1)} > k'_\alpha \right]$

Test (3) $H_0^{(3)} / H_1^{(3)}$ $RC_3 = \left[ \dfrac{S_{AB}^2/(r-1)(s-1)}{S_R^2/sr(t-1)} > k''_\alpha \right]$

Rq: Dans le cas de donnés sans repetitions d'essais, on peut pas tester l'existance de l'effet d'intéraction. celà ne veut pas dire qu'il n y a pas interaction entre les facteurs l'effet d'intéraction est compté dans les residus.