Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Logiques et méthodes du raisonnement mathématiques

2 Ensembles, Relations et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.
▶ Un ensemble est une collection d'objets rassemblés selon une propriété commune. Chaque objet est un élément de l'ensemble.
▶ On appelle le nombre d'éléments d'un ensemble E le cardinal et on le note $card(E)$.
▶ On note par $\emptyset$ l'ensemble vide.

Exemple 2.1.

▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ *ensemble des entiers naturels.*
▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ *ensemble des entiers relatifs.*
▶ *ensemble des algériens.*
▶ *ensemble des nombres impairs.*
▶ *card($\mathbb{N}$) = infini et card($\emptyset$) = 0.*

Remarque 2.1.

▶ Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est-à-dire $x \neq \{x\}$.

Définition 2.2.
▶ $x \in E$ (**appartenance**) signifie x est un élément de l'ensemble E.
▶ $x \notin E$ signifie x n'est pas un élément de l'ensemble E.

2.1.2 Opérations sur les ensembles

a. Intersection "$\cap$"

$x \in E \cap F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ et $x \in F$", et on écrit

$$E \cap F = \{x / x \in E \;\; et \;\; x \in F\}.$$

Exemple 2.2.

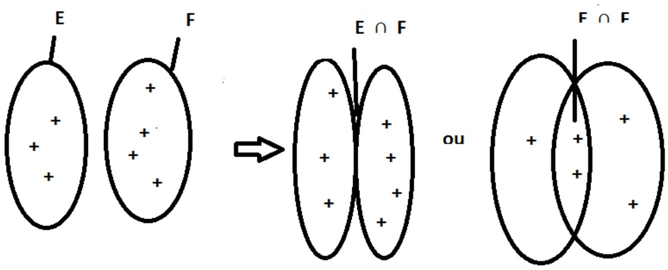

FIGURE 1 – $E \cap F$

▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2020, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \{2020\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \emptyset$.

Remarque 2.2. E et F sont disjoints signifie que $E \cap F = \emptyset$. Autrement dit, $E \cap F = \emptyset$ signifie $(\forall x \in E,\ x \notin F)$ et $(\forall x \in F,\ x \notin E)$.

b. Réunion "$\cup$"

$x \in E \cup F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ ou $x \in F$", et on écrit

$$E \cup F = \{x / x \in E \ \ ou \ \ x \in F\}.$$

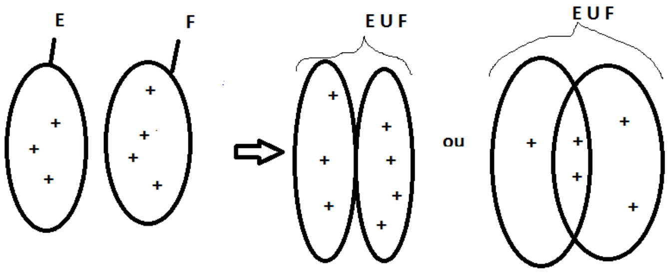

FIGURE 2 – $E \cup F$

Exemple 2.3.

▶ $E = \{1, 2, 6, 7\}$, $F = \{-1, 6\}$, *alors* $E \cup F = \{-1, 1, 2, 6, 7\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \emptyset$, *alors* $E \cup F = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$.

c. Inclusion "$\subset$" et égalité "$=$"

$E \subset F$ signifie ($\Leftrightarrow$) que tous les éléments de E sont dans F, autrement dit

$$\forall x,\ \ x \in E \Rightarrow x \in F.$$

Remarque 2.3. $E = F$ signifie $E \subset F$ et $F \subset E$, autrement dit $\forall x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

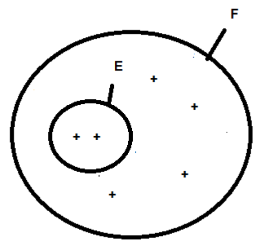

FIGURE 3 – $E \subset F$

Exemple 2.4.

▶ $E = \{-6, 0, 7, 9\}$, $F = \{-6, -5, -3, 0, 7, 8, 9\}$, *alors* $E \subset F$ *mais* $F \not\subset E$.

d. Différence et Complémentaire de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et A noté $E - A$ est l'esemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A et on écrit

$$E - A = \{x/x \in E \ \ et \ \ x \notin A\}.$$

Dans le cas où $A \subset E$, alors $E - A$ est dit complémentaire de A dans E et il es noté "C_E^A ou $\overline{A}$.

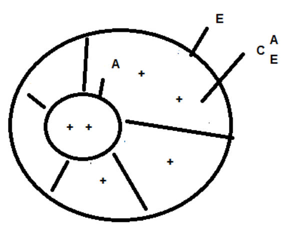

FIGURE 4 – C_E^A : complémentaire de A dans E

Exemple 2.5.

▶ $A = \{1, 6\}$, $E = \{1, 2, 6, 7\}$, *alors* $C_E^A = \{2, 7\}$.

▶ $C_A^A = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

2.1.3 Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (**commutativité**)
2. $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B \cup) C = A \cup (B \cup C)$. (**associativité**)
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (**distributivité**)
5. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ et $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
6. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

Exemple 2.6. *Soient $A \subset E$ et $A \subset E$. Démonter les lois suivantes :*

1. $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2. $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

1.

$$\begin{aligned} Soit\ x \in C_E^{A \cap B} &\Leftrightarrow x \in E\ et\ x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in E\ et\ (x \notin A\ ou\ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E\ et\ x \in C_E^A)\ ou\ (x \in E\ et\ x \in C_E^B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2.

$$\begin{aligned} C_E^{A \cup B} &= \{x / x \in E\ et\ x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ (x \notin A)\ et\ (x \notin B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ (x \in C_E^A\ et\ x \in C_E^B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ x \in E\ et\ x \in C_E^A\ et\ x \in C_E^B\} \ldots (car\ \ E \cap E = E) \\ &= \{x / x \in E\ et\ x \in C_E^A\ et\ x \in E\ et\ x \in C_E^B\} \\ &= \{x / x \in (C_E^A \cap C_E^B)\} \\ &= (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

2.1.4 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E, on désigne par $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E c'est-à-dire
$$P(E) = \{A/A \subset E\}.$$

Remarque 2.4. L'ensemble vide ($\emptyset$) et E sont des éléments de $P(E)$. Le nombre d'ensembles de $P(E)$ est $2^{card(E)}$.

Exemple 2.7. *Si on prend* $E = \{1, 2, 3\}$, *alors*
$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

2.1.5 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si

1. Tout élément de A n'est pas vide.
2. Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
3. La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 2.8. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$. *Si on prend alors*
▶ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.
▶ $A = \{\{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.

2.1.6 Produit cartésien

Définition 2.3. L'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé **produit cartésien** de E et F et il est noté $E \times F$, autrement dit,
$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \;\; et \;\; y \in F\}.$$

Exemple 2.9.
▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(n, m)/n \in \mathbb{N} \;\; et \; m \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \;\; et \; y \in \mathbb{R}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \;\; et \; y \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x \in \mathbb{R} \;\; et \; y \in \mathbb{R} \;\; et \; z \in \mathbb{R}\}$.

2.1.7 Propriétés du produit cartésien

Soient E, F, G et H quatres ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Remarque 2.5.
► $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.
Un contre exemple : si $E = F = \{0\}, G = H = \{1\}$, alors $E \cup G = \{0,1\}$ et $F \cup H = \{0,1\}$.
Et on a aussi, $E \times F = \{(0,0)\}$, $G \times H = \{(1,1)\}$ et , $(E \cup G) \times (F \cup H) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Exemple 2.10. *Soient A, B, C et D des ensembles. Démonter la loi suivante :*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \textit{ et } (x,y) \in (C \times D)\\
&\Leftrightarrow x \in A \textit{ et } y \in B \textit{ et } x \in C \textit{ et } y \in D\\
&\Leftrightarrow x \in A \textit{ et } x \in C \textit{ et } y \in B \textit{ et } y \in D\\
&\Leftrightarrow (x \in A \textit{ et } x \in C) \textit{ et } (y \in B \textit{ et } y \in D)\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \textit{ et } y \in (B \cap D)\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D),
\end{aligned}$$

donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.