# 1 Applications

## 1.1 Généralités sur les applications

Soient $E$ et $F$ deux ensembles :

1. On appelle fonction de l'ensemble $E$ vers l'ensemble $F$ une relation de $E$ vers $F$ dont tout élément $x$ de $E$ on lui correspond **au plus** un élément $y$ de $F$.
2. On appelle application $f$ de $E$ dans $F$ une relation de $E$ dans $F$ dont tout élément $x$ de $E$ on lui correspond **un et un seul** élément $y$ de $F$.
3. $E$ est appellé $E$ l'ensemble de départ ou des antécédants.
4. $F$ est appellé l'ensemble d'arrivée ou des images.
   (a) $x$ est dit antécédant de $y$ par $f$ (dans $E$).
   (b) $y$ est appelé l'image de $x$ par $f$ (dans $F$) et on le note $f(x) = y$.
5. En général, on schématise une application $f$ par

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.**

1. Deux applications $f$ et $g$ sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux (en le même ensemble de départ $E$), leurs ensembles d'arrivée sont égaux (en le même ensemble d'arrivée $F$) et si $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.
2. L'ensemble des couples $\{(x, f(x))/x \in E\}$ est une partie de l'ensemble $E \times F$, qu'on appelle graphe de l'application $f$.

**Exemple 1.1.**

*On définit l'application identité par*

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

*On définit l'application constante par (c une constante de $\mathbb{R}$)*

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) = c. \end{aligned}$$

*On définit l'application suivante*

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

**Exemple 1.2.**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-5} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} - \{5\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = \dfrac{x+1}{x-5} \end{array}$$

*$f$ est une fonction et n'est pas une application car l'élément 5 n'a pas une image dans $\mathbb{R}$ mais $g$ est une application.*

### 1.1.1 Restriction et prolongement d'une application

**Définition 1.1.** Soit $E'$ un sous ensemble de $E$ et $f : E \to F$ une application. L'application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de $f$ à $E'$ et on dit aussi que $f$ est le prolongement de $g$ à $E$.

**Exemple 1.3.**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = (x-2)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [2,4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = (x-2)^2 \end{array}$$

*$g$ est la restriction de $f$ à $[2,4]$ et $f$ est le prolongement de $g$ à $\mathbb{R}$.*

### 1.1.2 Injection, surjection et bijection

**Définition 1.2.** Soit $f : E \to F$ une application.

1. On dit que $f$ est injective si tout élément $y$ de $F$ possède au plus un antécédent $x$ de $E$ par $f$. Donc deux éléments différents de E ont des images différentes de $F$ par $f$, autrement dit :
$$\forall x, x' \in E, \ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$
ou d'une manière équivalente
$$\forall x, x' \in E, \ \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$
2. On dit que $f$ est surjective si tout élément $y$ de $F$ possède au moins un antécédent $x$ de $E$ par $f$, c'est-à-dire :
$$\forall y \in F, \exists x \in E : \ \ y = f(x).$$

3. On dit que $f$ est bijective si $f$ est à la fois injective et surjective, et on écrit

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : \ y = f(x).$$

**Exemple 1.4.**
*Considérons l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x - 4 \end{array}$$

- **Injectivité de** $f$ *: Soient* $x, x' \in \mathbb{R}$ *:* $f(x) = f(x')$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x - 4 = x' - 4 \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

*donc* $f$ *est injective.*

- **surjectivité de** $f$ *:*

*Soit* $y \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x - 4 = y \\ &\Rightarrow x = y + 4 \end{aligned}$$

*alors* $\forall y \in \mathbb{R}$*,* $\exists x = y + 4$ *tel que* $f(x) = y$*. Donc* $f$ *est surjective.*

- $f$ *injective et surjective, donc* $f$ *est bijective.*

**Propriétés**

1. $f$ est injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.
2. $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.
3. $f$ est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seul solution.

**Proposition 1.3.** *Soient* $f : E \to F$ *et* $f : F \to G$ *deux applications, alors on a*

1. $gof$ *est injective* $\Rightarrow$ $f$ *est injective.*
2. $gof$ *est surjective* $\Rightarrow$ $g$ *est surjective.*
3. $gof$ *est bijective* $\Rightarrow$ $f$ *est injective et* $g$ *est surjective.*

**Exemple 1.5.** *1. On considère*

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) *On a* $f_1(x) = f_1(x') = 1$ *et* $f_1$ *n'est donc pas injective.*

(b) *Comme* $y = -1$ $(y < 0)$ *n'a pas d'antécédent,* $f_1$ *n'est pas surjective.*

*2. On considère*

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) *On a* $f_2(x) = f_2(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ *car* $x, x' \geq 0$.
$f_2$ *est donc injective.*

(b) *Comme* $y = -1$ *n'a pas d'antécédent,* $f_2$ *n'est pas surjective.*

*3. On voit de même que*

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

*n'est pas injective mais elle est surjective.*

*4. Dans le cas*

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

*est injective et surjective, elle est donc bijective.*

### 1.1.3 Composition des applications

**Définition 1.4.** Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. On appelle application composée de $f$ et $g$, l'application $gof : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E, \ (gof)(x) = g(f(x)).$$

**Exemple 1.6.** *Soient les applications suivantes :*

$$\begin{array}{cccccccc} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \quad & g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x & \quad & x & \mapsto & g(x) = x + 1 \end{array}$$

*Alors,*

$$gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1.$$

$$fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto fog(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2x + 2.$$

### 1.1.4 Applications réciproques

**Définition 1.5.** Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors il existe une application notée $f^{-1}$ définie par

$$f^{-1} : F \to E,\ et\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

**Remarque 1.2.** Notons que si $f$ est bijective alors $f^{-1}$ est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

**Théorème 1.6.** *Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors son application réciproque $f^{-1}$ vérifie*

$$f o f^{-1} = Id_F\ et\ f^{-1} o f = Id_E.$$

*On rappelle*

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

**Proposition 1.7.** *Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *$f$ et $g$ sont injectives $\Rightarrow g o f$ est injective.*
2. *$f$ et $g$ sont surjectives $\Rightarrow g o f$ est surjective.*
3. *$f$ et $g$ sont bijectives $\Rightarrow g o f$ est bijective et $(g o f)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$.*

**Exemple 1.7.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$.*

1. *Montrer que $f$ est bijective et donner son application réciproque $f^{-1}$.*

***Corrigé***

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$ :*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

   $$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x - 2 = x' - 2 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

   *donc $f$ est injective.*

   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*

   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x - 2 = y \\ &\Rightarrow x = y + 2, \end{aligned}$$

   *alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = y + 2$ tel que $f(x) = y$. Donc $f$ est surjective.*

*(c) $f$ injective et surjective, donc $f$ est bijective.*

*(d) $f$ est bijective donc il existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et*

$$f(x) = y \Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2,$$

*donc*

$$f^{-1}(y) = x = y + 2,$$

*et on écrit :*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = y + 2. \end{aligned}$$

### 1.1.5 Image directe et image réciproque

1. ***Image directe :*** *Soit $f : E \to F$ une application et $A$ un sous-ensemble de $E$ ($A \subset E$). On définit l'image directe de $A$ par l'application $f$ le sous-ensemble $f(A)$ de $F$ :*

$$f(A) = \{f(x) \in F/x \in A\}.$$

**Remarque 1.3.** (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit $a$ de $E$, alors $f(\{a\}) = f(a)$.

**Exemple 1.8.** *Soit l'ensemble $A = [-1, 2]$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

*On a*

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}/x \in A\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}/x \in [-1, 2]\} \\ &= [2, 5] \cup [2, 14] \\ &= [2, 14]. \end{aligned}$$

2. ***Image réciproque :*** *Soit $f : E \to F$ une application et $A$ un sous-ensemble de $F$ ($B \subset F$). On définit l'image réciproque de $B$ par l'application $f$ le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de $F$ :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

**Remarque 1.4.** (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit $b$ de $F$, alors $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E/f(x) = b\}$.

**Exemple 1.9.** *Soit l'ensemble* $B = [-1, 3]$ *et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1. \end{aligned}$$

*On a*

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-1, 3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \leq f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \leq f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \leq x^2 - 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \mathbb{R} \cap [-2, 2] \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

3. ***Propriétés :*** *Soit* $f : E \to F$ *une application. Soient* $E_1, E_2$ *deux parties de* $E$ *et* $F_1, F_2$ *deux parties de* $F$*. Alors :*
   (a) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \subset f(E_2)$.
   (b) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.
   (c) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$.
   (d) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.