

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE A.MIRA BEJAIA



FACULTE DE TECHNOLOGIE

Cours de Physique 2

Electricité

Par

Mourad BERD

2019

Destiné aux étudiants de première année LMD

Science de la matière et Technologie

Table des matières

1	RAPPELS MATHÉMATIQUES	3
1.1	GRANDEUR PHYSIQUE OU MESURABLE.....	3
1.1.1	Les grandeurs mesurables de base « grandeurs fondamentales »	3
1.1.2	Les grandeurs dérivés	3
1.1.3	Dimensions des grandeurs « Notation »	3
1.1.4	Equations aux dimensions.....	4
1.1.5	Le système international d'unité	4
1.2	LES VECTEURS.....	5
1.2.1	Opérations sur les vecteurs	5
1.2.2	Analyse vectorielle : les opérateurs différentiels Gradient, Rotationnel, Divergence et Laplacien..	8
1.3	ÉLÉMENT DE LONGUEUR, DE SURFACE ET DE VOLUME DANS LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES	9
1.3.1	Coordonnées cartésiennes.....	10
1.3.2	Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cartésiennes	10
1.3.3	Coordonnées cylindriques.....	11
1.3.4	Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cylindrique	12
1.3.5	Coordonnées sphériques	13
1.3.6	Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées sphériques	14
1.4	DÉRIVÉS ET INTÉGRALES	15
2	ELECTROSTATIQUE.....	17
2.1	DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES D'ÉLECTRISATION.....	17
2.2	INTRODUCTION.....	17
2.2.1	Evidence de l'existence de deux électricités	19
2.2.2	Interprétation dans le cadre des connaissances actuelles.....	19
2.2.3	Processus d'électrification	20
2.2.3.1	Électrification par frottement	20
2.2.3.2	Électrification par contact	21
2.2.3.3	Électrification par une source (Electrocinétique)	22
2.2.3.4	Conservation de la charge électrique	22
2.2.4	Loi de Coulomb dans le vide	23
2.2.5	Ordre de grandeur des forces électrostatiques	25
2.3	CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTRIQUE	26
2.3.1	Champ et potentiel gravitationnel.....	26
2.3.2	Champ et potentiel électrique.....	27
2.3.2.1	Champ et potentiel créé par une charge unique	27
2.3.2.2	Champ et potentiel créé par deux charges électriques ou plus (principe de superposition)	28
2.3.2.3	Energie potentielle électrostatique.....	30
2.3.2.4	Champ et potentiel créé par une distribution continue de charges	32
2.3.2.5	Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ	34
2.3.2.6	Topographie de l'espace électrique	34
2.3.2.7	Quelques applications.....	37
2.3.2.8	Energie interne d'une distribution de charges électriques ponctuelles.....	44
2.3.3	Le dipôle électrostatique	46
2.3.3.1	Potentiel et Champ créé par un dipôle électrique	47
2.3.3.2	Dipôle placé dans un champ électrique	49
2.3.3.3	Energie potentielle d'un dipôle plongé dans un champ constant	50
2.3.4	Flux du champ électrique- Théorème de GAUSS.....	51
2.3.4.1	Orientation d'une surface	51
2.3.4.2	Angle solide.....	52
2.3.4.3	Flux du vecteur champ électrostatique	54
2.3.4.4	Théorème de Gauss	55
2.3.5	Conducteur en équilibre électrostatique	62

2.3.5.1	Définition	62
2.3.5.2	Propriétés d'un conducteur en équilibre	62
2.3.5.3	Champ au voisinage immédiat d'un conducteur.....	63
2.3.5.4	Capacité propre d'un conducteur.....	66
2.3.5.5	Energie interne d'un conducteur chargé	66
2.3.5.6	Phénomènes d'influence entre conducteurs chargés.....	67
2.3.6	<i>Condensateurs</i>	71
2.3.6.1	Calcul de la capacité d'un condensateur.....	72
2.3.6.2	Capacité d'un condensateur plan.....	72
2.3.6.3	Capacité d'un condensateur cylindrique.....	74
2.3.6.4	Energie électrique emmagasinée par un condensateur.....	75
2.3.6.5	Association de condensateurs.....	75
3	ELECTRODYNAMIQUE.....	78
3.1	DEFINITION	78
3.2	CONDUCTEUR ET COURANT ELECTRIQUE.....	78
3.3	DENSITE DE COURANT	79
3.4	LA LOI D'OHM.....	80
3.5	LOI DE JOULE.....	82
3.6	ASSOCIATION DE RESISTANCES	83
3.6.1	<i>Association en série</i>	83
3.6.2	<i>Association en parallèle</i>	83
3.7	LOI DE JOULE	84
3.8	CIRCUITS ELECTRIQUES.....	85
3.8.1	<i>Générateur électrique</i>	85
3.8.2	<i>Récepteur</i>	87
3.9	APPLICATIONS DE LA LOI D'OHM AUX RESEAUX	87
3.9.1	<i>La loi d'Ohm appliquée à un circuit fermé</i>	87
3.9.2	<i>Loi d'Ohm appliquée à une portion d'un circuit</i>	88
3.9.3	<i>Généralisation de la loi d'Ohm</i>	88
3.9.3.1	Loi des nœuds ou loi de conservation de l'électricité	89
3.9.3.2	Loi des mailles.....	89
3.9.3.3	Application à un réseau	90
3.9.4	<i>Charge et décharge d'un condensateur</i>	91
3.9.4.1	Charge d'un condensateur	91
3.9.4.2	Décharge du condensateur.....	93
4	ELECTROMAGNETISME	94
4.1	INTRODUCTION.....	94
4.2	ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGEE EN MOUVEMENT.....	94
4.2.1	<i>Force de Lorentz</i>	94
4.2.2	<i>Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique</i>	95
4.2.3	<i>Force magnétique agissant sur un courant électrique, Force de LAPLACE</i>	96
4.2.4	<i>Champ magnétique créé par un courant, loi de BIOT et SAVART</i>	97
4.2.5	<i>Le théorème d'Ampère</i>	99
4.2.6	<i>Dipôle magnétique et lignes de champ</i>	100
4.3	FLUX MAGNETIQUE	102
4.3.1	<i>Flux du champ magnétique à travers une surface fermée</i>	102
4.3.2	<i>Flux du champ à travers un contour</i>	102
4.3.3	<i>Induction magnétique</i>	103
4.3.3.1	Mise en évidence des courants induits.....	103
4.3.3.2	Loi de Faraday.....	103

CHAPITRE UN

1 Rappels mathématiques

1.1 Grandeur physique ou mesurable

La notion de grandeur est souvent liée à l'expression quantitative d'un phénomène ou à la propriété d'un corps. Elle est scalaire lorsque sa mesure est donnée par un simple nombre (scalaire), elle est vectorielle, lorsque sa mesure nécessite plusieurs scalaires. En définitif, une grandeur est mesurable lorsqu'on peut définir une égalité et une somme de deux des valeurs qu'elle a pu prendre. Et ceci à travers un appareil de mesure. Les grandeurs mesurables représentent la majeure partie des grandeurs utilisées en physique.

1.1.1 Les grandeurs mesurables de base « grandeurs fondamentales »

Ce sont sept grandeurs indépendantes les unes des autres représentant l'univers et qui interviennent dans tous les phénomènes mesurables. Elles sont la longueur, la masse, le temps, la quantité de matière, l'intensité du courant électrique, la température et l'intensité de la lumière.

1.1.2 Les grandeurs dérivés

Ces grandeurs sont déduites des sept grandeurs fondamentales grâce à une interdépendance bien décrite par une opération mathématique de mise en facteurs de une ou de plusieurs de ces grandeurs de base. La surface, à titre d'exemple, n'est que le carré de la longueur et la vitesse n'est que le quotient de la longueur par le temps.

1.1.3 Dimensions des grandeurs « Notation »

La dimension est inhérente à une grandeur physique G , le symbole dimension est noté " $[G]$ ", par exemple on écrit $[l]=L$ et on lit, la dimension de l est L . de même pour les autres grandeurs de bases :

$[La\ masse]=[m]=M$, $[Le\ temps]=[t]=T$, $[L'intensité\ de\ la\ lumière]=[I]=I \dots etc.$

De manière générale, la dimension d'une grandeur physique G est notée $[G]$, et on obtient le tableau de dimensions fondamentales suivant :

Grandeur	Dimension
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité du courant	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité de la lumière	J

1.1.4 Equations aux dimensions

Une équation aux dimensions exprime les relations entre les différentes grandeurs. Elles servent à vérifier l'homogénéité des expressions littérales aidant à repérer des erreurs dans le calcul. La dimension de toute grandeur physique s'écrit sous la forme d'un produit des sept dimensions fondamentales avec des exposants variables, soit :

$$[G] = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \dots$$

Où $\alpha, \beta, \gamma \dots$, sont des exposants rationnels.

Attention : Il ne suffit pas qu'une équation soit homogène pour qu'elle soit juste !

Exemple :

La dimension d'un travail est défini à partir de l'équation $w = f.l$, une force par un déplacement, on écrit :

$$[w]=[f].[l]=([m].[a]).[l]= M.L^2.T^{-2}.$$

1.1.5 Le système international d'unité

Le système international d'unités SI est fondé sur un choix des sept unités de base bien définies et considérées comme indépendantes de point de vue dimension qui sont, on le rappelle, le Mètre, le Kilogramme, la seconde, l'Ampère, le Kelvin, la mole, et la Candela. Le tableau suivant regroupe quelques une de ces grandeurs, certaines fondamentales et d'autres dérivés.

Grandeur	Nom de l'unité	symbole	Dimension
Longueur	Mètre	m	L
Masse	Kilogramme	Kg	M
Temps	Seconde	s	T
Intensité électrique	Ampère	A	I
Température thermodynamique	Kelvin	K	Θ
Quantité de matière	Mole	mol	N
Intensité lumineuse	Candela	Cd	J
Vitesse	Mètre/seconde	$m.s^{-1}$	$L.T^{-1}$
Accélération	Mètre/seconde ²	$m.s^{-2}$	$L.T^{-2}$
Energie	Joule	Joule	$M.L^2.T^{-2}$
Puissance	Watt	W	$M.L^2.T^{-3}$

1.2 Les vecteurs

Un vecteur est un segment de droite orienté ayant une origine bien définie A, une extrémité bien définie B, on le note \overrightarrow{AB} . Il est caractérisé par son origine ou son point d'action, son support qui est la droite (AB), son sens de A vers B et son module $\|\overrightarrow{AB}\|$ appelée aussi norme.

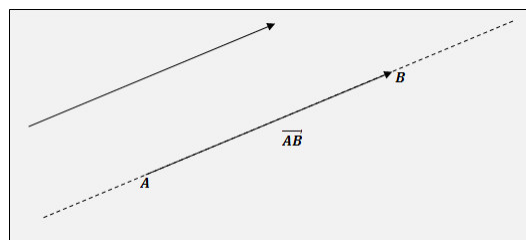


Figure 1-1 : Deux vecteurs équivalents

Deux vecteurs sont identiques ou égaux, s'ils ont même longueur, même direction et même sens.

1.2.1 Opérations sur les vecteurs

Dans la base orthonormée directe $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ définissant l'espace, un vecteur \vec{V} est défini par la connaissance de ces trois composantes sur les trois axes du repère. Il s'écrit sous la forme :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

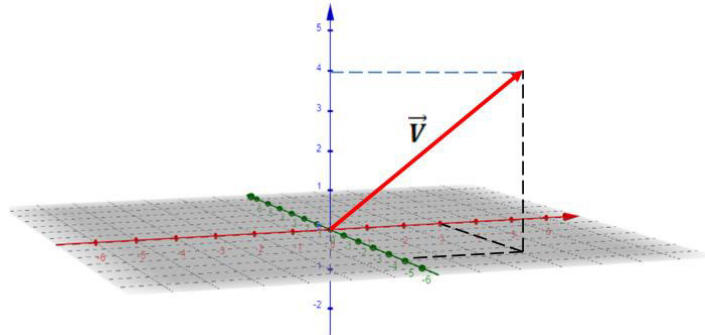


Figure 1-2 : Un vecteur dans un espace Euclidien

Ou x, y et z sont les projections droites du vecteur \vec{V} sur les différents axes du repère. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant orthonormée direct, cela signifie que :

- Les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont perpendiculaires deux à deux.
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

Un vecteur $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ peut s'écrire sous forme d'une colonne $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Addition de deux vecteurs

L'addition de deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ est le vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ donné par : $\vec{V} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.

Attention : $\|\vec{V}\| \neq \|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\|$

Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ est le nombre ou scalaire $\alpha = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \theta$.

Où θ est l'angle entre les deux vecteurs considérés.

Si \vec{V}_1 est perpendiculaire à \vec{V}_2 , alors le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$.

Si \vec{V}_1 est parallèle à \vec{V}_2 , dans ce cas $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|$.

Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ est le vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. Le vecteur \vec{V} issu du produit vectoriel possède les caractéristiques suivantes :

- $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est un vecteur perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , il est donc perpendiculaire à tous les vecteurs de ce plan.
- Son sens est donné par la règle de la main droite (règle de la vis), le trièdre \vec{V}, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est direct.

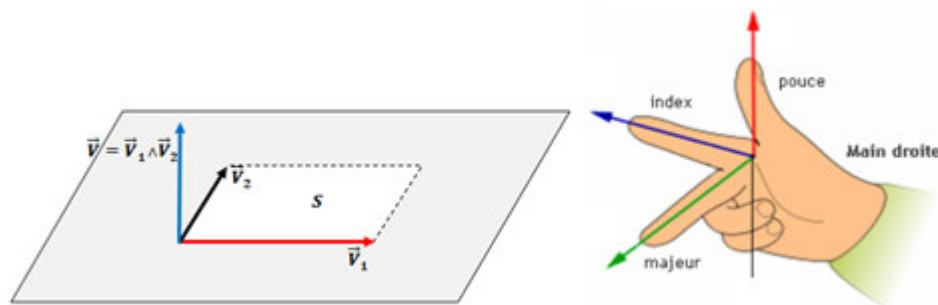


Figure 1-3: Vecteur issu d'un produit vectoriel

- Son module $\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin \theta$ définit l'aire (surface) du parallélogramme construit par les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
- L'expression du vecteur produit vectoriel est donnée par le déterminant 3X3 suivant :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Propriétés:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V} \wedge \vec{V} = 0.$$

Si \vec{V}_1 est perpendiculaire à \vec{V}_2 , alors le produit vectoriel $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2$

Produit mixte

Le produit mixte des trois vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est défini comme le scalaire $\beta = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$. si les trois vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire coplanaire, alors le produit mixte est nul $\beta = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = 0$.

Propriété : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$

1.2.2 Analyse vectorielle : les opérateurs différentiels Gradient, Rotationnel, Divergence et Laplacien.**Le gradient :**

La forme différentielle totale d'une fonction $f(x, y, z)$ où x, y et z sont les trois variables de l'espace euclidien est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Qui peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ et $\vec{dl}(dx, dy, dz)$. Le champ vectoriel $\vec{u}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ est le gradient de la fonction $f(x, y, z)$, on le note $\overrightarrow{grad}(f)$ tel que :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ est l'opérateur Lapla.

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur.

La divergence

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ est un scalaire donné par :

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ est un vecteur donné par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Le rotationnel d'un gradient est nul $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0$.

Le Laplacien

Il est défini comme la divergence du gradient. Le Laplacien scalaire est donné par :

$$\text{Laplacien}(f) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$$

On le note Δ tel que :

$$\Delta(f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.3 Élément de longueur, de surface et de volume dans les systèmes de coordonnées

L'espace matériel est entièrement défini par un point et trois axes supposés fixes, appelé aussi repère noté $R(o, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Dans un tel espace, un point M est parfaitement repéré par la connaissance des trois projections du vecteur \overrightarrow{OM} sur les trois axes définis par les vecteurs unitaires \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} . On écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

Toutefois, et pour des raisons de symétrie et dans le souci de simplification, plusieurs systèmes de coordonnées ont été élaborés.

1.3.1 Coordonnées cartésiennes

Le point M est repéré par les coordonnées (x, y, z) du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $-\infty < x, y, z < +\infty$, le vecteur \overrightarrow{OM} est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ est donné par :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Le module du vecteur \overrightarrow{OM} est donné par :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.3.2 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cartésiennes

a- Élément de longueur

On appelle élément de longueur en coordonnées cartésiennes la quantité $dl = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, il est clair que l'élément de longueur n'est que le module du vecteur \overrightarrow{dl} .

A une dimension, l'élément de longueur dl se résume à $dl = dx$ (ou dy ou dz), ainsi le calcul d'une longueur totale n'est que l'intégrale :

$$l = \int_{x_i}^{x_f} dx$$

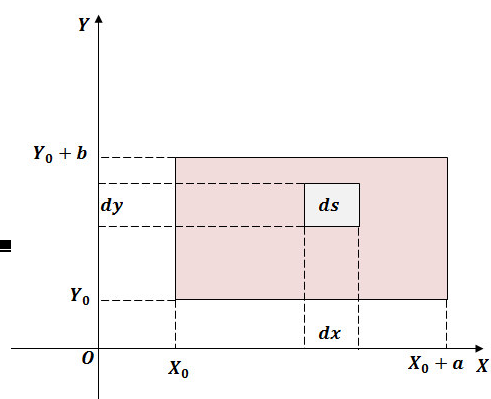
b- Élément de surface

Dans le cas le plus simple où la surface est contenue dans un des plans cartésiens, soit à prendre le plan (O, X, Y) , la surface élémentaire est la quantité algébrique

$$ds = dx \cdot dy$$

où dx et dy les déplacements élémentaires respectifs dans les directions OX et OY . La surface totale est donnée par l'intégrale double :

$$S = \iint dx \cdot dy$$



Il vient alors à titre d'exemple que la surface du rectangle en couleur de la figure est :

$$\iint_{x_0, y_0}^{x_0+a, y_0+b} dx dy = (x)_{x_0}^{x_0+a} \cdot (y)_{y_0}^{y_0+b} = a \cdot b$$

Figure 1-4: Élément de surface cartésien

c- Élément de volume

En coordonnées cartésiennes, le volume élémentaire est la quantité $dV = dx dy dz$ représenté par le cube noir de la figure ci contre. Et ainsi, le volume du parallélogramme de couleur de la figure est l'intégrale triple :

$$V = \iiint dx dy dz = (x)_0^a (y)_0^b (z)_0^c = abc$$

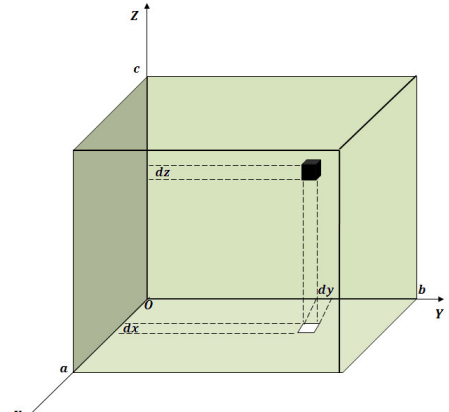


Figure 1-5: Élément de volume cartésien

1.3.3 Coordonnées cylindriques

Comme son nom l'indique, ce système répond à une symétrie cylindrique, c'est -à-dire repérer un point sur la surface d'un cylindre. Par rapport au repère cartésien, on choisit une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ de sorte que :

$$(\vec{i}, \vec{u}_r) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

On écrit alors :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + z\vec{k} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

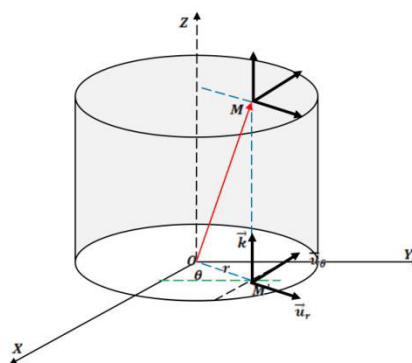


Figure 1-6: Système de coordonnées cylindriques

Ce qui nous donne une relation de passage entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

D'où : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{y}{x} = \tan\theta$ et $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

1.3.4 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées cylindrique

a- Élément de longueur

En coordonnées cylindriques, un déplacement élémentaire peut se faire de trois manières de bases, suivant l'axe joignant l'origine O au point M, c'est-à-dire dr , soit sur la surface du cylindre $r d\theta$ ou soit sur l'axe z, c'est-à-dire dz . Ceci vient du fait que le vecteur déplacement est donnée par :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

b- Élément de surface

L'élément de surface est donnée par :

$$ds = r \cdot d\theta \cdot dz$$

Où r on le rappelle est donné par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ce qui nous permet le calcul de la surface totale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h par l'intégrale de surface suivante :

$$s = \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz = r \int_0^h \int_0^{2\pi} d\theta dz = 2\pi r h$$

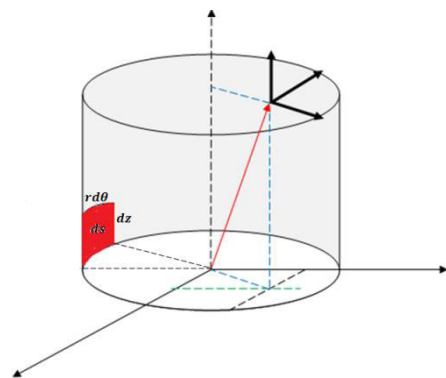


Figure 1-7: Élément de surface cylindrique

c- Élément de Volume

Le volume élémentaire est tout simplement la surface élémentaire par une épaisseur élémentaire soit $dV = ds \cdot dr = r dr d\theta dz$.

Ainsi, le volume total du cylindre précédent n'est autre que l'intégrale :

$$V = \iiint_{0,0,0}^{r,2\pi,h} r dr d\theta dz = \frac{1}{2} r^2 2\pi h = \pi r^2 h$$

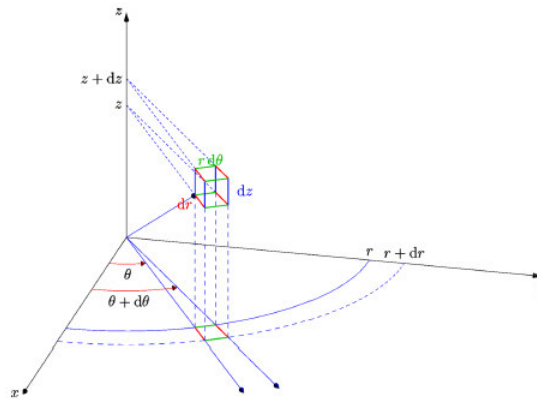


Figure 1-8: Élément de volume cylindrique

1.3.5 Coordonnées sphériques

On utilise les coordonnées sphériques dès que la distance au centre joue un rôle important dans le problème. Le point M est alors repéré par les coordonnées (r, θ, φ) de la base orthonormée directe $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec :

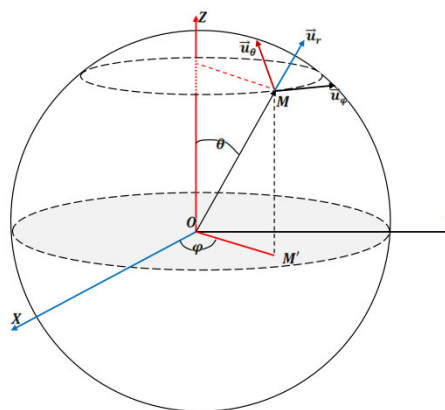


Figure 1-9: Système de coordonnées sphériques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

$$\theta = (\vec{k}, \widehat{\vec{OM}})$$

$$\varphi = (\vec{i}, \widehat{\vec{OM}'})$$

Où M' est la projection de M dans le plan (OXY) et :

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ainsi, on écrit :

$$\vec{OM} = \vec{OM}' + \vec{M'M} \quad \text{avec} \quad \|\vec{OM}'\| = r \sin\theta$$

D'où

$$\vec{OM} = r(\sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j}) + r \cos\theta \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce qui nous donne la matrice de passage entre les coordonnées sphériques et cartésiennes suivante :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Où :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{z}{r} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi \quad \text{et} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

1.3.6 Élément de longueur, de surface et de volume en coordonnées sphériques

a- Élément de longueur

Nous avons vu que le vecteur position en coordonnées sphériques est donnée par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et le vecteur déplacement élémentaire $\vec{MM}' = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$. C'est que l'élément de longueur peut être soit dr , soit $r d\theta$ ou encore $r \sin\theta d\varphi$, tous de dimension L.

b- Élément de surface

Si maintenant on se déplace sur la surface de la sphère, c'est-dire, si on fixe le rayon, l'élément de surface est donné par :

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

La surface d'une sphère est alors donnée par l'intégrale suivante de surface :

$$s = r^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi r^2$$

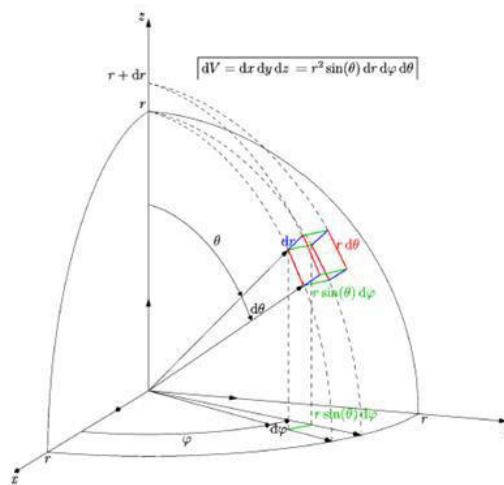


Figure 1-10: Elément de longueur, de surface et de volume sphérique

1.4 Dérivés et intégrales

a- Dérivés

Le tableau suivant énumère quelques dérivés des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Dérivé $f'(x)$
K , avec k une constante	0
Kx	k
kx^n	knx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(f(x))$	$f'(x)\cos(f(x))$

b- Intégrales

Le tableau suivant rappelle quelques primitives de fonctions usuelles :

La fonction $f(x)$	Sa primitive $\int f(x)dx$
0	k, k est une constante
a	$ax + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
e^x	e^x

CHAPITRE DEUX

2 ELECTROSTATIQUE**2.1 Description des phénomènes d'électrisation****2.2 Introduction**

Le mot électricité est d'origine « Grec » qui signifie ambre. Mais, quel est le lien avec nos connaissances actuelles de l'électricité ?

L'électricité et le magnétisme, c'est tout ce qui nous entoure, à quelques considérations près, on peut dire que le monde est fait d'Electricité et de Magnétisme. La lumière dans nos foyers, nos montres et réveils, nos téléviseurs, nos téléphones portables, nos calculatrices et nos ordinateurs ne fonctionnent qu'avec l'électricité. Les couleurs de l'arc en ciel ne sont la que par électricité. Les avions, les voitures, les trains ne roulent que grâce à l'électricité.

On ne bouge que parce que l'électricité existe, la contraction des muscles nécessite de l'électricité. Nos nerfs, nos cerveaux ne fonctionnent que grâce à cette électricité. Nos cœurs ne peuvent battre sans électricité et on ne réfléchi que grâce à l'électricité.

Les atomes, les molécules, les corps solides et non solides, toutes les réactions chimiques ou autres ne sont qu'électricité.

L'électricité gouverne notre vie, mais attention, elle peut aussi être un danger pour cette même vie !

Structure de la matière- vue moderne

La matière est constituée d'atomes, unités de base. Un atome c'est un noyau de dimensions très réduites devant celle de l'atome. Le noyau est formé de protons de charges positives et de neutrons sans charges avec des masses égales. $m_p \approx m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-27} \text{kg}$.

Autour du noyau, nous avons un nuage d'électrons. L'atome est neutre, alors le nombre de protons est égale au nombre d'électrons. Si on arrache un électron à un atome, ce dernier devient un ion positif, et si par contre un atome reçoit un électron, il devient un ion négatif. En valeur algébrique, la charge de l'électron est égale à la charge du proton, alors que la

masse du proton est 1836 fois plus grande. Ce qui nous laisse dire que la quasi-totalité de la masse de l'atome se trouve dans son noyau.

Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur d'un atome, sept milliard d'atomes mis côte-à-côte vont former une longueur de 70 cm.

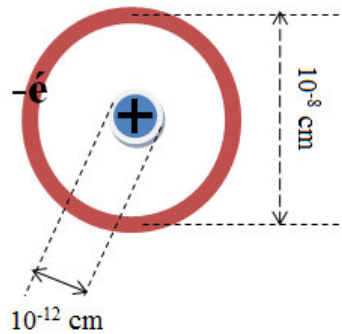


Figure 2-1: Représentation schématique d'un atome

Historique

Il est très connu depuis longtemps que de l'ambre frotter attire les feuilles sèches. L'ambre en grec renvoie à l'électron et c'est de là que vient l'appellation Electricité. Mon stylo après l'avoir frotté à mes cheveux attire des petits morceaux de papier. On observe un phénomène similaire si on frotte une baguette de verre avec un morceau de soie. Ce dernier attire des morceaux de fourrure. Il est aussi rapporté des textes anciens que des bijoux d'ambres frottés et mis en contact avec de petites grenouilles, les rendaient excitées et se mettaient à sauter.

Au cours du 18^{ième} siècle, on découvre qu'il y a deux types d'électricité. La première en frottant le verre, dite de type A et la deuxième en frottant l'ambre et dite de type B et il ressort que A repousse A, B repousse B mais A attire B. Et de là nous pouvons dire qu'un corps est électrisé lorsqu'il est capable d'attirer des corps légers.

De manière générale, on peut électriser tous les corps. On peut le faire de plusieurs manières, par frottement ou par contact avec des corps déjà électrisés. Ces mêmes corps, d'un point de vue électrique, peuvent être des conducteurs ou des isolants. L'électrisation reste localisée pour un isolant et se répand en tous points du corps si celui-ci est un conducteur. Conséquence directe, on peut électriser un verre qui est isolant mais pas une baguette d'argent ou de cuivre qui sont des conducteurs.

2.2.1 Evidence de l'existence de deux électricités

Soit à réaliser une série d'électrifications par frottement sur trois corps, le verre, le polystyrène et l'ambre.

Première expérience

Verre $\xleftrightarrow{\text{Répulsion}}$ Verre

Polystyrène $\xleftrightarrow{\text{Attraction}}$ Verre

Polystyrène $\xleftrightarrow{\text{Attraction}}$ Polystyrène

Cette simple expérience met en évidence l'existence de deux types d'électrisation.

Deuxième expérience

Verre $\xleftrightarrow{\text{Attraction}}$ Ambre

Polystyrène $\xleftrightarrow{\text{Répulsion}}$ Ambre

Ambre $\xleftrightarrow{\text{Répulsion}}$ Ambre

Il est alors clair que l'ambre se comporte comme le polystyrène, leur électrisation est dite de même type. Positive de type verre et Négative de type ambre. Enfin, deux corps porteurs de même signe se repoussent et deux corps porteurs d'électricités de signes contraires s'attirent.

2.2.2 Interprétation dans le cadre des connaissances actuelles

Un corps est un arrangement d'atomes et de molécules, ces molécules sont aussi des arrangements d'atomes qui peuvent être ordonnés ou non. Un atome est un noyau lourd formé de protons et de neutrons et un nuage d'électrons.

- Un noyau constitué de Z protons de charge (+e) et de N neutrons (neutre) avec $m_p \approx m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-27} \text{kg}$.
- Z électrons de charge -e avec $m_p = 1836 \text{ fois } m_e$.

La stabilité du noyau est assurée par des interactions fortes ou nucléaires et la stabilité de l'atome est assurée par des interactions électriques entre électrons et noyau. Un atome neutre peut perdre ou gagner un ou plusieurs électrons et devient ion, on peut alors dire que les charges sont transférables. D'une manière générale, tous les phénomènes d'électrisations sont conséquence d'un transfert de d'électrons.

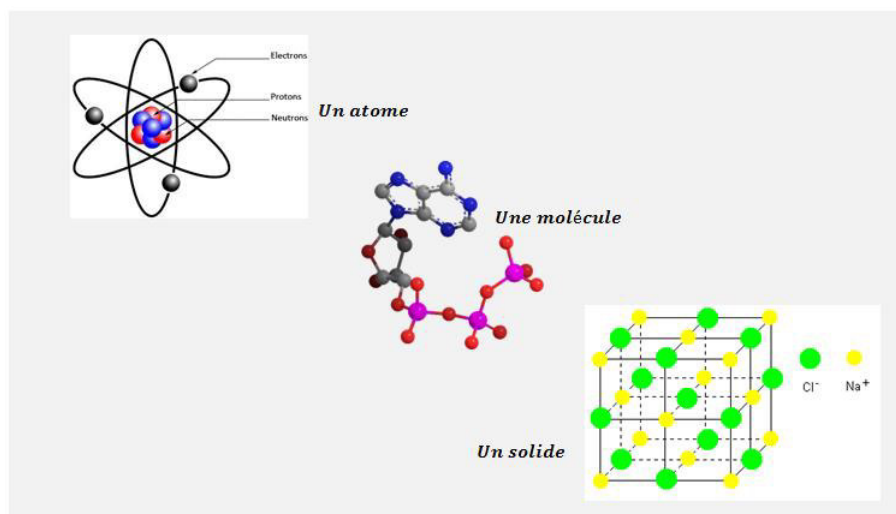


Figure 2-2: Schémas d'un atome, d'une molécule et d'un solide cristallin

Notion de conducteur et d'isolant

Dans un conducteur, les électrons de périphérie sont faiblement liés aux noyaux atomiques et peuvent de ce fait se déplacer librement dans le matériau. Le cuivre, l'argent et l'or sont de très bon exemples.

Dans un isolant, les électrons sont fortement liés et ne peuvent pas se déplacer entre atomes, ils sont localisés. Le verre et les oxydes sont de parfaits exemples.

2.2.3 Processus d'électrisation

2.2.3.1 Electrification par frottement

Le frottement provoque toujours un transfert de charges électriques négatives (des électrons) d'un objet à l'autre, si bien que l'un des deux devient chargé négativement (surplus d'électrons)

et l'autre, chargé positivement (déficit d'électrons). C'est l'électrisation par frottement. Le sens de transfert dépend de l'affinité électronique relative des deux corps. On peut en effet classer les corps dans l'ordre de transfert de charges et on obtient une série dite triboélectrique.

Poil de lapin- Verre- Mica- laine- poil de chat- Soie- Bois- Ambre- Résine- Soufre- Ebonite- Celluloid.

Ainsi, si on frotte de la laine sur le verre, ce dernier s'électrise positivement. Alors que si on le frotte avec les poils de lapin, il s'électrise négativement.

Aussi, si on frotte la soie avec de l'ébonite, elle s'électrise positivement, et si par contre on la frotte avec le verre, elle s'électrise négativement.

2.2.3.2 Electrification par contact

On prend une baguette électrisée A et on la met en contact avec une autre baguette de verre non électrisée B, nous constatons, après séparation, que cette dernière possède à son tour la propriété d'attirer les corps légers. On dit qu'elle s'est électrisée par contact.

Quelques cas de figures d'électrification par contact.

- 1) Un corps A mis en contact avec un corps B déjà chargé négativement. Le corps neutre A prend une partie de l'excédent de charges négatives du corps B.

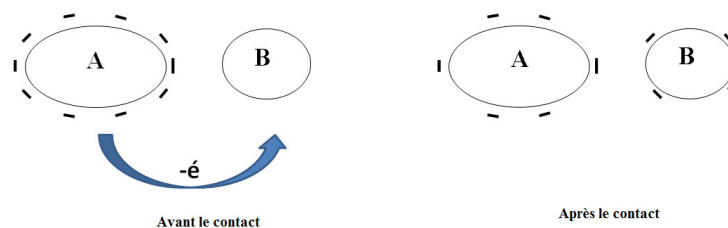


Figure 2-3: Electrification par contact 1

- 2) Un corps neutre A mis en contact avec un autre corps B déjà chargé positivement. Le corps B a perdu des électrons, ce qui fait que le nombre de protons est supérieur au nombre d'électrons.

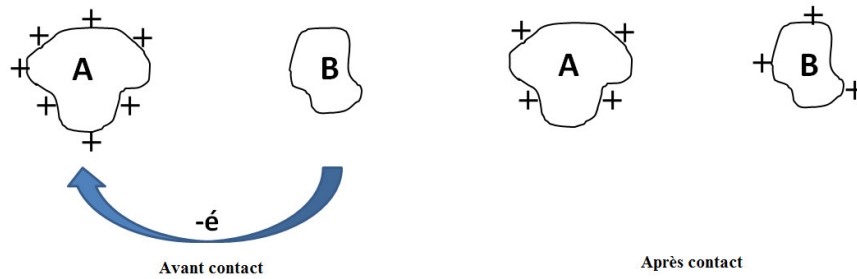


Figure 2-4: Electrification par contact 2

- 3) Un corps A chargé négativement est mis en contact avec un autre corps B chargé positivement.

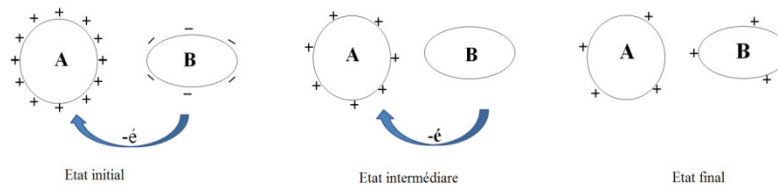


Figure 2-5: Electrification par contact 3

- 4) Neutralisation mutuelle

Deux corps A et B portant deux charges égales et opposées sont mis en contact. Les deux corps après un certain temps se neutralisent, c'est-à-dire, les charges positives compensent les charges négatives.

2.2.3.3 Electrification par une source (Electrocinétique)

Elle se fait au moyen d'un générateur électrique. Si on relie à l'aide d'un fil conducteur un corps électrisable à un générateur électrique, celui-ci s'électrise et portera une charge de même signe que celle de la borne du générateur auquel il est branché.

2.2.3.4 Conservation de la charge électrique

Principe : la charge électrique totale contenue dans un système isolé, c'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à chaque instant reste constante.

Exemple : soient deux sphères métalliques identiques. A l'aide d'un générateur, on charge une d'elle avec une charge Q . Par la suite, on les met en contact pendant un instant et on les

sépare. Les deux sphères, et en raison du phénomène d'électrisation par contact, vont acquérir des charges Q_1 et Q_2 .

D'après le principe de conservation de la charge électrique, la charge avant et après le contact est conservée.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Et comme les deux sphères sont identiques, alors

$$Q_1 = Q_2 = Q', \text{ ce qui donne } Q' = \frac{1}{2}Q$$

2.2.4 Loi de Coulomb dans le vide

Soient deux charges électriques ponctuelles dans le vide, séparées par une distance d , une force d'interaction électrostatique mutuelle s'établit entre elles. Coulomb, et par analogie avec la loi d'interaction universelle de Newton, a proposé une force de même type :

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12}$$

Qu'on lit : la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est égale au produit $k * q_1 * q_2$ sur le carré de la distance qui les sépare d^2 multiplié par le vecteur unitaire dans la direction de la charge une vers la charge deux.

Où k est la constante universelle de Coulomb et vaut dans le système international des unités de mesure SI $9 \cdot 10^9 \text{ SI}$. Et où les charges sont en Coulomb.

Dans le vide, la constante k s'écrit sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ϵ_0 est appelée la permittivité absolue du vide.

Dans un milieu autre que le vide, la constante k est différente et on l'écrit sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

ϵ_r est appelée permittivité relative du milieu,

Ainsi, dans l'air $\epsilon_r = 1,00058$, dans l'eau pure, $\epsilon_r = 80$, dans la paraffine, $\epsilon_r = 2,1$

\vec{u}_{12} Est un vecteur unitaire dans la direction $1 \rightarrow 2$

En raison du principe de l'action et de la réaction, la force exercée par q_1 sur q_2 est la même en module que celle exercée par q_2 sur q_1 mais en sens opposé.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

La force de Coulomb est une force centrale dirigée suivant la droite joignant les deux charges, elle varie rapidement en $\frac{1}{r^2}$.

Conséquences

1. Si les deux charges q_1 et q_2 sont de même signes, alors la force d'interaction $\vec{F}_{1,2}$ est dans la même direction que le vecteur unitaire \vec{u}_{12} . La force $\vec{F}_{1,2}$ est une force de répulsion, les deux charges se repoussent mutuellement.
2. Si maintenant les deux charges q_1 et q_2 sont de signes opposées, alors la force d'interaction $\vec{F}_{1,2}$ est dans le sens contraire que le vecteur unitaire \vec{u}_{12} . La force $\vec{F}_{1,2}$ est une attraction, les deux charges s'attirent mutuellement. Voir les illustrations ci-après.

Deux charges de mêmes signes

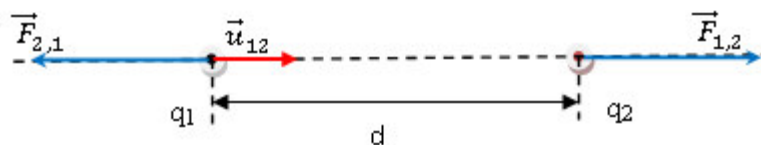


Figure 2-6: Répulsion entre deux charges de même signes

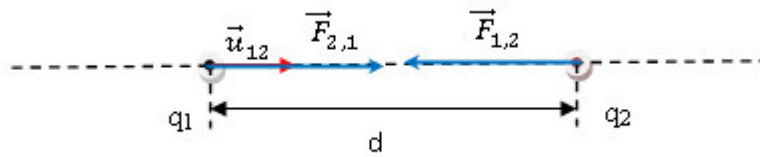
Deux charges de signes contraires

Figure 2-7: Attraction entre deux charges de signes opposés

2.2.5 Ordre de grandeur des forces électrostatiques

Au niveau microscopique c'est-à-dire au niveau de l'atome et de la molécule où les distances d'interaction sont de l'ordre du nanomètre ou du micromètre, les forces électrostatiques sont considérables et sont largement prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles.

La meilleure illustration est celle de comparer les deux forces, électrostatique et gravitationnelle, entre un électron et un proton de l'atome d'hydrogène.

Sachant que $q_e = q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb et $d \approx 0,53 \text{ \AA} = 5,3 \cdot 10^{-11}$ cm, la force d'attraction électrostatique entre l'électron et le proton est $F_C \approx 10^{-7}$ N. Dans la même configuration, et sachant que $m_p \approx 1836 m_e$, la force d'attraction gravitationnelle est $F_N \approx 10^{-47}$ N. Le rapport $\frac{F_C}{F_N} \sim 10^{42}$.

La force électrostatique apparaît donc dominante vis-vis de la l'attraction gravitationnelle. De la, on peut conclure que dans les problèmes d'interaction entre particules, on pourra négliger leur poids.

2.3 Champ et potentiel électrique

2.3.1 Champ et potentiel gravitationnel

La gravitation est l'interaction qui régit l'attraction mutuelle des corps sous l'effet de leurs masses. C'est Newton qui, en 1687, énonça l'expression de la force d'attraction gravitationnelle s'exerçant entre deux corps. Le mouvement des satellites (naturels ou artificiels) est dû à l'attraction gravitationnelle, mais aussi à leur vitesse. Sa loi s'énonce comme suit : 'Deux corps possédant chacun une masse sont soumis à l'interaction gravitationnelle, ils exercent l'un sur l'autre des forces attractives dites gravitationnelles'.

Soient deux corps A et B de masses m_A et m_B respectivement, séparées d'une distance d_{AB} , la force gravitationnelle qui s'exerce entre ces deux masses est donnée par :

$$F = G \cdot \frac{m_A m_B}{d_{AB}^2}$$

F : valeur de la force gravitationnelle, en Newton (N).

m_A et m_B : Deux masses en kilogramme (Kg)

d_{AB} : Distance entre les centres de masse des deux corps A et B en mètre (m)

G : Constante de gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

La masse m_B subit la force d'attraction de m_A , on dit alors que m_B est dans le champ créé par m_A . Le champ gravitationnel créé par la masse m_B est répartie dans tout l'espace, il est donné en tout point M de l'espace par la relation :

$$\vec{g} = G \cdot \frac{m_A}{d_{AM}^2} \vec{u}$$

\vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction *M vers A*.

2.3.2 Champ et potentiel électrique

2.3.2.1 Champ et potentiel crée par une charge unique

Soit une charge électrique q_1 située en un point O dans l'espace, exerçant une force électrostatique sur une charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

Qu'on peut mettre sous forme

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = q_2 \vec{E}_1 \quad \text{où} \quad \vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la charge qui subit la force (ici q_2), de ce qui dépend de la charge source q_1 origine du champ crée, le vecteur $\vec{E}_1(M)$. Ce champ électrique est crée par la charge électrique en O au point M.

Définition : Une particule chargée de charge q_1 placée en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2} \vec{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{d^2} \vec{u}_{1,2}$$

appelé champ électrostatique. L'unité est le (Volt/mètre) noté (V/m).

L'état électrique de chaque point M de l'espace aux alentours d'une charge électrique Q peut être caractérisé par deux grandeurs physiques :

- Le vecteur champ électrique

$$\vec{E} = \frac{kQ}{d^2} \vec{u}$$

Défini comme étant la force appliquée par la charge Q sur une autre charge unité placée à une distance d.

- Le potentiel électrique

$$V(M) = k \frac{Q}{d} + Cste$$

Défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée à la distance d.

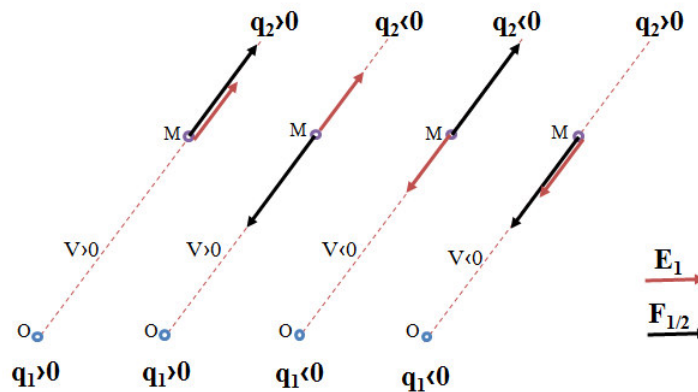


Figure 2-8: Champ, potentiel et Force de deux charges en un point M

2.3.2.2 Champ et potentiel crée par deux charges électriques ou plus (principe de superposition)

Dans le souci de simplification, nous considérons le cas de deux charges ponctuelles fixes, q_1 et q_2 agissant sur une troisième charge q . Comme toutes les forces, la force électrostatique est une grandeur vectorielle, le principe de superposition nous laisse admettre que l'action de q_1 sur q n'est pas modifiée par la présence de q_2 . La même chose, l'action de q_2 sur q n'est pas modifiée par la présence de q_1 .

L'action conjuguée de q_1 et q_2 sur q est la somme vectorielle des actions séparées de q_1 sur q et q_2 sur q prises séparément.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{qq_1}{d_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{qq_2}{d_2^2} \vec{u}_2$$

$$= q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q \vec{E}$$

Il vient

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

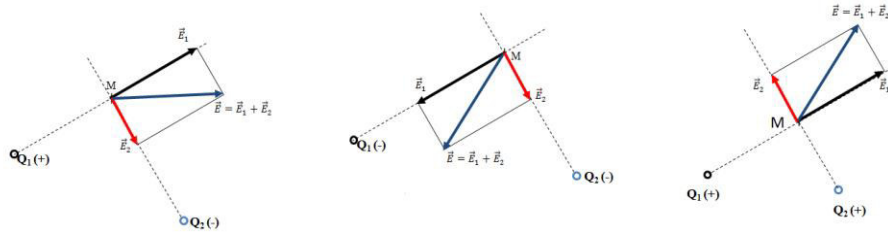


Figure 2-9: Superposition de deux champs électriques.

Qu'on peut généraliser au champ crée par n charges q_i ponctuelles en un point M à des distances d_i des charges considérées :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et est énoncé comme **le principe de superposition**, comme tout principe, il n'est pas démontré.

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel

Une charge ponctuelle q placée en O crée en tout point de l'espace un champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

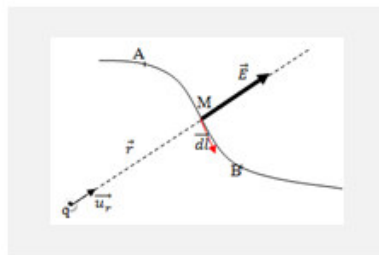


Figure 2-10: Circulation du champ électrique entre deux points

La circulation élémentaire dc de \vec{E} correspondant à un déplacement élémentaire \vec{dl} du point M sur la courbe \widehat{AB} est

$$dc = \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{dl} \quad \text{Or} \quad \vec{u}_r \cdot \vec{dl} = dr$$

Ainsi

$$dc = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}\right) = -dV(r)$$

$$\text{Avec } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + cste$$

La circulation élémentaire dc est la différentielle totale $dV(r)$. Le champ électrostatique dérive donc d'un potentiel V

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \quad \text{avec } V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

2.3.2.3 Energie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique placée en un point M de l'espace baignant dans un potentiel électrique $V(M)$ est définie comme étant le travail à fournir pour ramener cette charge depuis l'infini jusqu'à la position du point M .

Cette énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = qV$$

Pour une distribution de charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ on a

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \\ V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + cste ; \\ \vec{F} &= q\vec{E} \quad \text{et} \quad E_p = qV. \end{aligned}$$

Notion de différence de potentiel

La différence de potentiel entre deux points A et B baignant dans un champ électrostatique est égale à la circulation du champ entre ces deux points :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

Lignes de champs et équipotentiels

Les lignes de champs et les équipotentiels sont des courbes et des surfaces qui permettent de représenter la topographie du champ et du potentiel électrique d'une distribution de charges donnée.

Une ligne de champ est une courbe orientée tel qu'en tout point, le champ électrique lui est tangent. Elle est orientée dans le sens du champ électrique. Les lignes de champ se dirigent vers les charges négatives venant des charges positives.

Les surfaces équipotentielles sont telles qu'en tout point le potentiel électrique garde la même valeur. Elles sont constamment perpendiculaires aux lignes de champ.

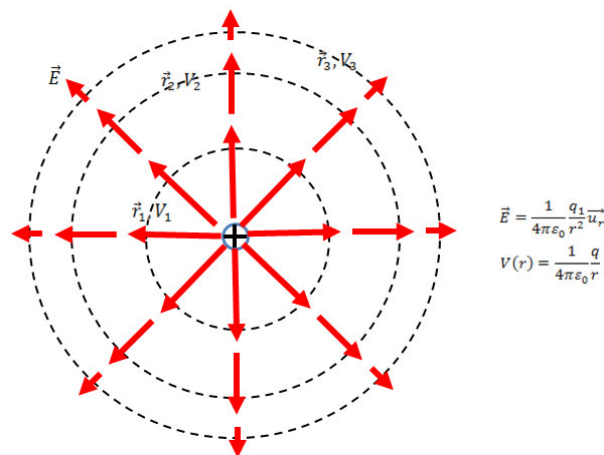


Figure 2-11: Lignes de champs et surfaces équipotentiels

La figure 2-11 montre des lignes de champ et trois équipotentiels d'une charge ponctuelle positive. Pour une charge négative, les lignes de champ seront dirigées vers la charge.

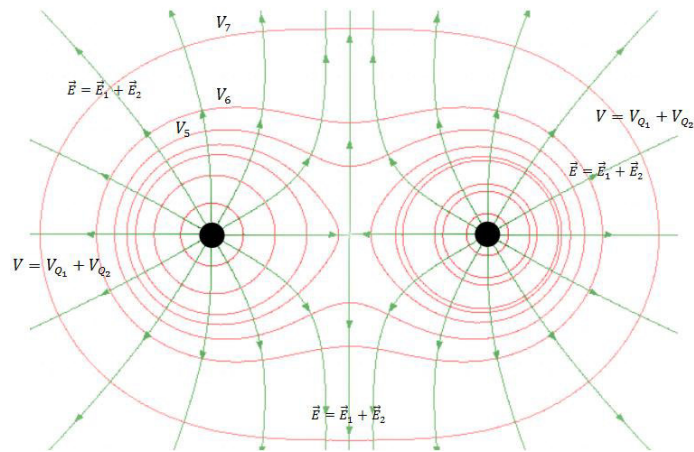


Figure 2-12: Lignes de champs et équipotentiels de deux charge adjacentes

La figure 2-12 montre des lignes de champ et sept équipotentiels de deux charges électriques ponctuelles identiques. D'après <http://www.physagreg.fr>. Les lignes de champ en vert et les équipotentiels en rouge.

2.3.2.4 Champ et potentiel crée par une distribution continue de charges

Pour des charges électriques réparties en ligne, en surface ou en volume, il est souvent possible de les considérer comme une distribution continue de charges, qu'on peut caractériser par des densités, linéiques, surfacique ou volumique. La densité de charge électrique désigne la quantité de charge électrique par unité de longueur, de surface ou de volume selon qu'on traite un problème à une, deux ou trois dimensions. On définit alors ces trois grandeurs :

Densité linéique $\lambda = \frac{dQ}{dl} \text{ (Coulomb/m) ;}$

Densité surfacique $\sigma = \frac{dQ}{ds} \text{ (Coulomb/m}^2\text{) ;}$

Densité volumique $\rho = \frac{dQ}{dv} \text{ (Coulomb/m}^3\text{).}$

Pour calculer le champ et le potentiel crée par une distribution continue de charge électrique, on considère la charge comme constituée d'une infinité de charges ponctuelles élémentaires. Le champ et potentiel sont alors obtenus en additionnant par une intégrale la contribution de tous ces éléments infinitésimaux.

A une dimension

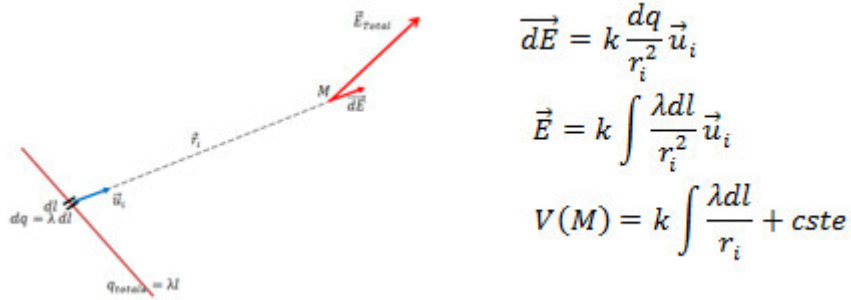


Figure 2-13: Champ et potentiel d'une distribution linéique de charges

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \int \frac{\lambda dl}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \int \frac{\lambda dl}{r_i} + cste.$$

A deux dimensions

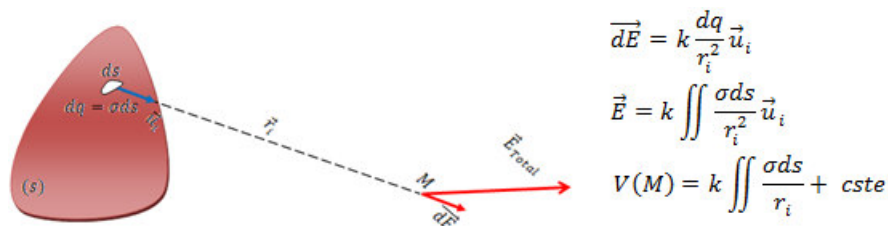


Figure 2-14: Champ et potentiel électrique d'une distribution surfacique de charges

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \iint \frac{\sigma ds}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \iint \frac{\sigma ds}{r_i} + cste$$

A trois dimensions

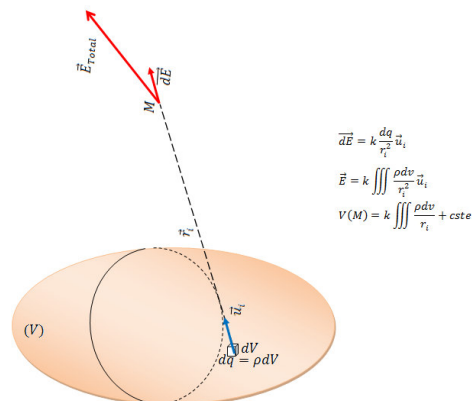


Figure 2-15: Champ et potentiel électrique d'une distribution volumique de charges

$$\overrightarrow{dE} = k \frac{dq}{r_i^2} \vec{u}_i, \vec{E} = k \iiint \frac{\rho dv}{r_i^2} \vec{u}_i, V(M) = k \iiint \frac{\rho dv}{r_i} + cste$$

2.3.2.5 Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

L'espace électrique (espace contenant au moins une charge électrique) est caractérisé en tout point $M(x,y,z)$ par les deux grandeurs électriques. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ qui est une grandeur vectorielle et le potentiel $V(M)$ qui est une grandeur scalaire. Nous savons à présent que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel scalaire $V(M)$. Mais aussi, que le potentiel scalaire $V(M)$ a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ $\vec{E}(M)$, c'est le passage du champ au potentiel et du potentiel au champ électrostatique.

Autrement dit :

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Ce qui nous permet le calcul du potentiel $V(x, y, z)$ connaissant le champ électrostatique $\vec{E}(x, y, z)$.

Inversement :

On sait que le potentiel électrostatique $V(x, y, z)$ est fonction des coordonnées d'espace x, y et z , on peut alors écrire sa différentielle totale :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz = \overrightarrow{grad} V \cdot \vec{dl} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

$$E_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right); E_y = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \text{ et } E_z = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

2.3.2.6 Topographie de l'espace électrique

Une topographie de l'espace électrique est une représentation graphique à deux ou à trois dimensions de deux fonctions \vec{E} et V réalisée par le tracé des lignes de champ et des surfaces équipotentielles. Il faut noter à ce propos quelques propriétés importantes qui traduisent graphiquement les relations entre \vec{E} et V .

- ✓ Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si :
 - Le champ est nul en ce point,
 - Le champ n'est pas défini en ce point.
- ✓ D'après l'expression du champ généré par une charge ponctuelle, les lignes de champ divergent depuis la charge positive, et convergent vers une charge négative.
- ✓ Une ligne de champ ne peut pas se refermer sur elle-même.
- ✓ Une équipotentielle est le lieu des points de même potentiel, à chaque valeur du potentiel V_0 correspond une surface équipotentielle.
- ✓ Une ligne de champ est localement orthogonale au champ électrique. En effet, une équipotentielle est définie par :

$$dV = 0$$
 , or on sait que $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$ cela veut dire que $\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ ce qui implique que \vec{E} est perpendiculaire à \vec{dl} .

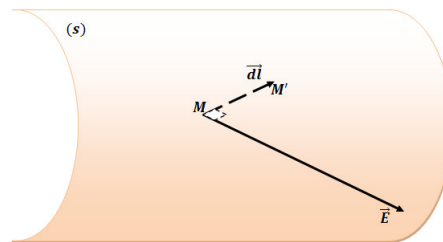


Figure 2-16: Une ligne de champ perpendiculaire à une surface équipotentielle

- ✓ Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ. En effet, $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$, dans le sens de la ligne de champ, \vec{E} est parallèle à \vec{dl} ($\vec{E} // \vec{dl}$)
Ce qui implique que :

$$dV = -|\vec{E}||\vec{dl}| < 0$$

Le potentiel décroît algébriquement.

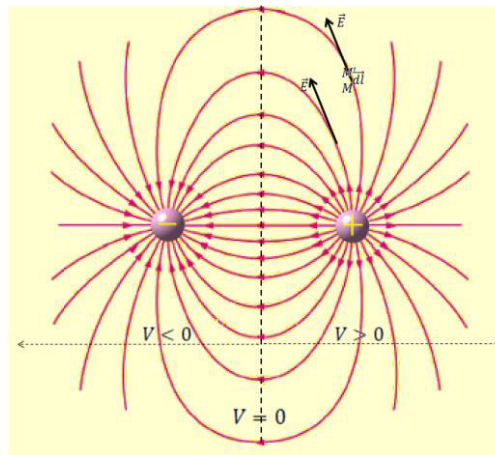


Figure 2-17: Le potentiel le long d'une ligne de champ

- ✓ Les surfaces équipotentielles se resserrent en passant d'une région de champ peu intense à une région de champ intense. En effet, pour un même dV , on peut avoir plusieurs endroits correspondants

$$dV = -\vec{E}_1 \cdot \vec{dl}_1 = -\vec{E}_2 \cdot \vec{dl}_2$$

Il est alors clair que si

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2| \text{ alors } |\vec{dl}_1| < |\vec{dl}_2|$$

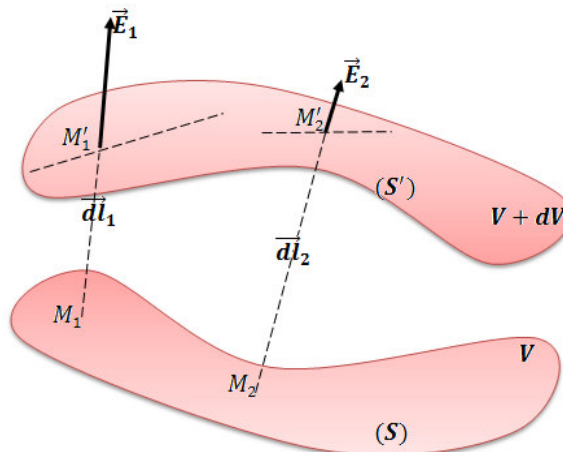


Figure 2-18: Deux équipotentielles dans un champ variable

Ce qui nous permet de visualiser sur une carte des équipotentielles, les régions des champs intenses.

Enfin,

- ✓ Le travail des forces électrostatiques appliquées à une charge qui se déplace sur une équipotentielle est nul. En effet,

$$W_{\text{equip}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q dV$$

Et comme nous sommes sur une équipotentielle, alors,

$$dV = 0 \text{ et } W_{\text{equip}} = 0$$

2.3.2.7 Quelques applications

a- Champ et potentiel créés par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée à l'origine $O(0,0,0)$ de l'espace muni d'une base orthonormée $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Calculer les modules des vecteurs $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3, \vec{OM}_4$.
2. Calculer le champ (vecteur et module) et le potentiel créés par q en $M_1(1, \sqrt{3}), M_2(1, -\sqrt{3}, 0), M_3(-1, \sqrt{3}, 0)$ et $M_4(-1, -\sqrt{3}, 0)$.

Solution :

1. Calculer les modules des vecteurs $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3, \vec{OM}_4$

$$\|\vec{OM}_{M_1}\| = \|\vec{OM}_{M_2}\| = \|\vec{OM}_{M_3}\| = \|\vec{OM}_{M_4}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

2. Le champ et potentiel créés en M_1, M_2, M_3, M_4 :

a. Champ :

$$\vec{E}_{M_1} = k \frac{q}{OM_1^2} \vec{u}_1 = k \frac{q}{OM_1^3} \vec{OM}_{M_1}$$

$$\vec{E}_{M_2} = k \frac{q}{OM_2^2} \vec{u}_2 = k \frac{q}{OM_2^3} \vec{OM}_{M_2}$$

$$\vec{E}_{M_3} = k \frac{q}{OM_3^2} \vec{u}_3 = k \frac{q}{OM_3^3} \vec{OM}_{M_3}$$

$$\vec{E}_{M_4} = k \frac{q}{OM_4^2} \vec{u}_4 = k \frac{q}{OM_4^3} \vec{OM}_{M_4}$$

Or :

$$\|\vec{OM}_{M_1}\| = \|\vec{OM}_{M_2}\| = \|\vec{OM}_{M_3}\| = \|\vec{OM}_{M_4}\| = 2$$

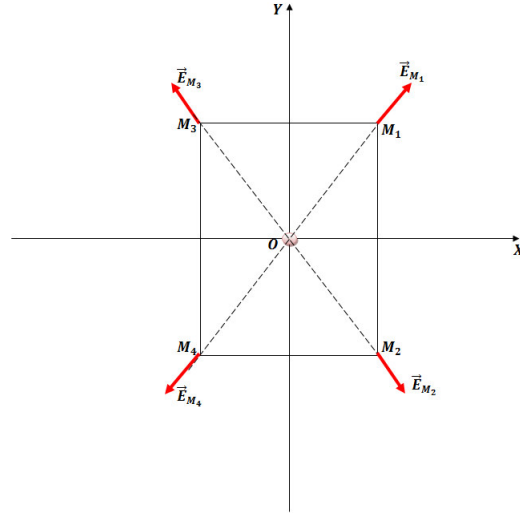
D'où:

$$\vec{E}_{M_1} = k \frac{q}{8} (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_2} = k \frac{q}{8} (-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_3} = k \frac{q}{8} (\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{M_4} = k \frac{q}{8} (-\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$



b. Potentiel

$$V_{M_1} = k \frac{q}{OM_1}$$

$$V_{M_2} = k \frac{q}{OM_2}$$

$$V_{M_3} = k \frac{q}{OM_3}$$

$$V_{M_4} = k \frac{q}{OM_4}$$

Avec

$$\|\vec{OM}_{M_1}\| = \|\vec{OM}_{M_2}\| = \|\vec{OM}_{M_3}\| = \|\vec{OM}_{M_4}\| = 2$$

$$V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = k \frac{q}{2}$$

b- Champ et potentiel crée par un fil uniformément électrisé

1. Calculer en tout point de l'espace, le champ électrique créé par un fil rectiligne AB de longueur finie $2a$, portant une densité linéique $\lambda > 0$.

2. Etudier les cas particuliers :

a. Le plan M est dans le plan médiateur de [AB].

b. Le fil a une longueur infinie.

Solution

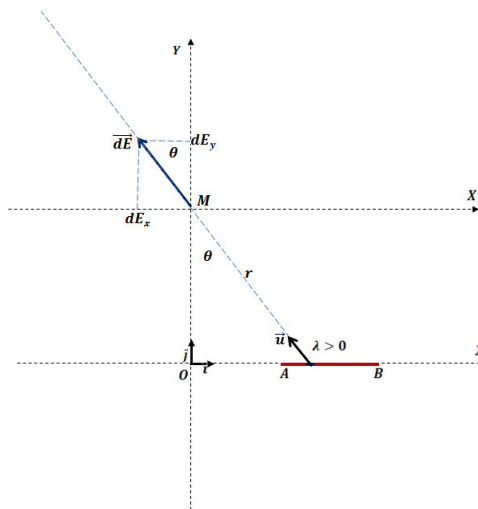


Figure 2-19: Champ crée par un segment chargé

Le fil AB porte une charge de densité linéique λ , ainsi :

$$q_{AB} = \lambda \cdot AB = \lambda \cdot 2a$$

L'élément de longueur dl porte alors une charge élémentaire proportionnelle $dq = \lambda \cdot dl$. Cette charge élémentaire va créer un champ élémentaire en tout point de l'espace \vec{dE} comme l'indique la figure. Cet élément de champ est alors donné par l'expression :

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

\vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction joignant l'élément de longueur dl au point M, il s'écrit en fonction de θ et des vecteurs de base \vec{i} et \vec{j} :

$$\vec{u} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

D'où
$$\vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} = \vec{dE} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} (-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})$$

Ses composantes sont alors données par :

$$\begin{cases} dE_x = -k \frac{\lambda}{r^2} \sin\theta \, dx \\ dE_y = k \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \, dy \end{cases}$$

Avec $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{y} \rightarrow x = y \operatorname{tg}\theta$

$$\rightarrow dx = \frac{y}{\cos^2 \theta} d\theta$$

D'autre part : $\cos\theta = \frac{y}{r} \rightarrow r = \frac{y}{\cos\theta} \rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2 \theta}$

Au final, on aura :
$$dE_x = -k \frac{\lambda \sin\theta}{y^2} \cos^2 \theta \frac{y}{\cos^2 \theta}$$

$$dE_x = -k \frac{\lambda}{y} \sin\theta \, d\theta$$

Pour calculer le champ électrostatique total crée par le fil chargé de longueur 2a, il faut sommer toutes les contributions des éléments infinitésimaux dl, ce qui revient à calculer l'intégrale suivante :

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} \int_{\theta_A}^{\theta_B} -\sin\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{y} [\cos\theta]_{\theta_A}^{\theta_B} = k\lambda (\cos\theta_B - \cos\theta_A)$$

Or $\cos\theta_A = \frac{y}{\sqrt{x_A^2 + y^2}}$ et $\cos\theta_B = \frac{y}{\sqrt{x_B^2 + y^2}}$

Alors:
$$E_x = k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right]$$

De la même manière, on calcule la composante orthogonale E_y et on trouve :

$$E_x = \frac{k\lambda}{y} \left[\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2}} \right].$$

Cas particuliers

- 1) Le point M est dans le plan médiateur de [AB]

Dans ce cas, l'axe OM est un axe de symétrie pour le segment chargé [AB], ce qui se traduit par : $x_A = -x_B$ et en remplaçant dans les expressions de E_x et E_y , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2}} \end{cases}$$

2) Le fil AB est de longueur infini, cela veut dire que les points A et B sont à l'infini

$$x_A \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad x_B \rightarrow -\infty$$

$$\theta_B = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta_A = \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant dans les expressions de E_x et E_y , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \end{cases}$$

Il est à remarquer que le champ d'un fil infini ne dépend que de la distance à ce fil.

c- Champ et potentiel électrique créé par un disque uniformément chargé

Soit un disque circulaire de rayon R et uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge σ constante. On se propose de calculer le champ et le potentiel en un point M sur l'axe de révolution du disque.

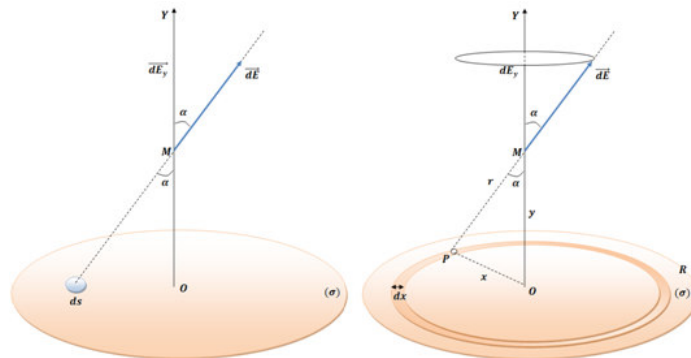


Figure 2-20: Champ créé par un disque uniformément chargé en un point sur son axe de révolution

1. Calcul du champ

Le disque de rayon R de surface $s = \pi R^2$, porte une charge électrique totale $Q = \sigma \pi R^2$. Cette charge n'est pas ponctuelle, elle est répartie de manière homogène sur toute la surface du disque. La loi de Coulomb est valable pour une charge ponctuelle localisée q en un point M . C'est pourquoi, pour calculer le champ créé par une telle distribution continue, nous considérons pour commencer, le champ créé par une charge élémentaire dq portée par un élément de surface élémentaire ds tel que $dq = \sigma ds$. Ce champ est alors un champ élémentaire $d\vec{E}$.

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe OY , en conséquence :

$$dE_y = dE \cos \alpha$$

Formons maintenant une couronne circulaire, d'épaisseur dx et de rayon intérieur x , cette couronne n'est que la surface obtenue en faisant subir à ds une rotation autour de OM . La charge électrique portée par cette couronne est donnée par :

$$dq = \sigma 2\pi x \cdot dx$$

La contribution de toutes les charges élémentaires de la couronne au champ \vec{E} est la même :

$$dE_y = k \frac{\sigma 2\pi x dx}{r^2} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ce qui donne :

$$dE_y = k \frac{\sigma 2\pi y x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour balayer toute la surface du disque, il suffit de faire varier le rayon x de la couronne depuis le centre du disque o à R . Maintenant, on peut obtenir le champ total en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et R .

$$E = \int_0^R dE_y = 2k \pi \sigma y \int_0^R \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} \left[(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x=0}^{x=R}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{(R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Cas particuliers :

- Si le point M est au centre du disque, c'est-à-dire $y = 0$ alors le champ se réduit à $E = \sigma/2\epsilon_0$.
- Si maintenant le disque est infini c'est-à-dire $R \rightarrow \infty$, à ce moment là la position du point ne change rien au champ, il est partout le même et égale à $E = \sigma/2\epsilon_0$.

Dans ces deux cas, le champ est indépendant des variables x et y .

2. Calcul du potentiel à partir du champ

Nous avons vu que le champ électrostatique dérive d'un potentiel, ces deux grandeurs sont lié par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV$$

Nous avons calculé un champ porté par l'axe YY' de composantes $\vec{E}(0, E_y, 0)$, ce qui nous amène à :

$$\vec{E} = \vec{E}(0, E_y, 0) = -\overrightarrow{grad} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

D'où $E_y = -\frac{dV}{dy} \rightarrow dV = -E_y dy$

Et $V = \int E dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \right] + cste$

La constante est déterminée par une considération physique, en supposant que le potentiel est nul à l'infini.

$$V = 0 \text{ à l'infini} \rightarrow cste = 0$$

2.3.2.8 Energie interne d'une distribution de charges électriques ponctuelles

a. Energie potentielle électrostatique

Définition : L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique (sans changement de vitesse) cette particule depuis l'infini à sa position actuelle.



Figure 2-21: Travail d'une force électrostatique dans un champ électrique

Soit l'espace où règne un champ électrostatique \vec{E} . pour déplacer la charge q depuis l'infini à la position M , on doit fournir un travail par le biais de la force extérieure \vec{F}_{ext} , qu'on applique pour vaincre la force de Coulomb (le déplacement doit se faire très lentement pour ne pas induire de changement de vitesse), on a alors :

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_C$$

Et le travail à fournir est donné par :

$$W(M) = \int_{\infty}^M dW = \int_{\infty}^M \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = - \int_{\infty}^M -\vec{F}_C \cdot \vec{dl}$$

$$W(M) = -q \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot \vec{dl} = q \int_{\infty}^M dV = q[V]_{\infty}^M = V(M) - V(\infty)$$

Comme $V(\infty) \rightarrow 0$ alors : $W(M) = q V(M)$.

Ce travail fourni est exactement l'énergie potentielle électrostatique de la charge q au point M . Si la charge est libre, cette énergie est vite restitué sous forme d'énergie cinétique.

b. Energie interne d'un ensemble de charges ponctuelles

Nous venons de voir que pour assembler deux charges de même signes, il faut fournir un travail, qui n'est autre que l'énergie potentielle électrostatique de la première charge dans le champ de la deuxième et vis-versa. On l'appelle **énergie interne** donnée par :

$$U = k \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{k q_2}{d} \right) + q_2 \left(\frac{k q_1}{d} \right) \right] = \frac{1}{2} (W_1 + W_2)$$

Le $\left(\frac{1}{2}\right)$ pour ne pas comptabiliser la même énergie deux fois.

Cette énergie peut être positive ou négative, selon que les deux charges sont de mêmes signes ou de signes opposées. Selon que le travail est fourni ou restitué.

Généralisation

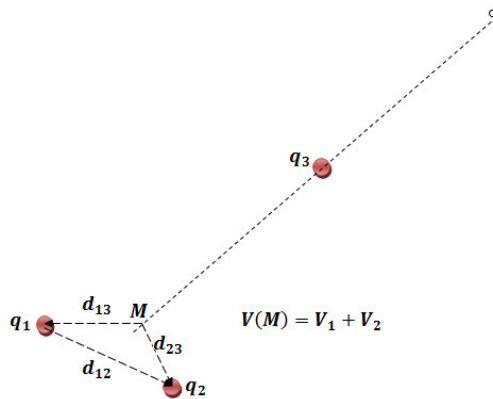


Figure 2-22: Energie interne d'une distribution de charges

Si maintenant on amène une 3^{ème} charge \$q_3\$ depuis l'infini jusqu'au voisinage des deux premières charges \$q_1\$ et \$q_2\$ supposées fixes, il faut fournir un travail supplémentaire à celui déjà fourni pour mettre \$q_1\$ au voisinage de \$q_2\$:

$$W_3 = q_3 (V_1 + V_2) = q_3 V_1 + q_3 V_2 = k \frac{q_1 q_3}{d_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{d_{23}}$$

Et l'énergie interne électrostatique de ce système de trois charges est alors :

$$W_e = E_e = k \left(\frac{q_1 q_2}{d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{d_{23}} \right)$$

Système de N charges ponctuelles

Pour un système de N charges ponctuelles, on aura alors :

$$W_e = \sum_{\text{couple}} q_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{d_{ij}}$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$W_e = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \sum_{j\neq i}^N \frac{q_i q_j}{d_{ij}} \right] = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j\neq i}^N \frac{k q_i q_j}{d_{ij}}$$

Où le facteur 1/2 apparaît pour éviter de compter de compter les couple (i, j) deux fois.

2.3.3 Le dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique se définit comme une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives, alors que le système reste globalement neutre. Le plus simple des dipôles électriques est constitué de deux charges égales, de signe contraire distantes d'une longueur très petite mais non nulle.

Une bonne compréhension des propriétés du dipôle électrostatique est indispensable pour de nombreuses applications que ce soit en Physique, en Chimie ou en Electromagnétisme. En Chimie, par exemple, certaines liaisons entre les molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle. La molécule HCl en est un bon exemple.

On définit alors le moment électrique dipolaire comme étant une grandeur physique vectorielle par :

$$\vec{p} = q \vec{a}$$

Où \vec{a} est le vecteur joignant les deux charges électriques formant le dipôle (depuis la charge négative vers la charge positive).

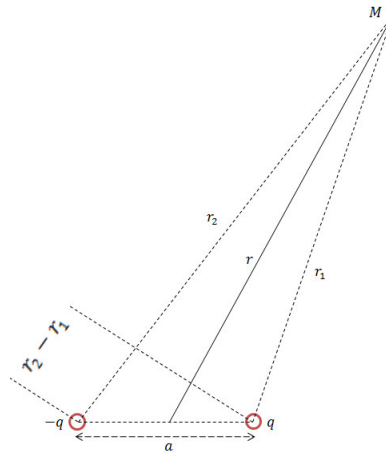


Figure 2-23: Schéma d'un dipôle électrique

2.3.3.1 Potentiel et Champ crée par un dipôle électrique

Les deux charges du dipôle sont fixées en deux point A et B séparés par une distance ($a = \|\overrightarrow{AB}\|$). Le potentiel au point M est donné par la superposition :

$$V(M) = k \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

A grande distance, r est très grand devant a , ce qui permet de faire les deux approximations suivantes :

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{Et} \quad r_1 r_2 = r^2$$

Ce qui donne :

$$V(M) = k \cdot q \cdot a \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Avec p le moment dipolaire égale à $p = q \cdot a$, le potentiel très loin du dipôle devient :

$$V(M) = k \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2}$$

Le champ est donné par la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On trouve, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2k.p.\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{k.p.\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Positions particulières :

1. $\theta = 0$

$$\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1 \quad \text{et} \quad \sin\theta = 0.$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_r = \frac{2k.p}{r^3} \\ E_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(E_r, 0) = \frac{2k.p}{r^3} \vec{e}_r$$

2. $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \frac{k.p}{r^3} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

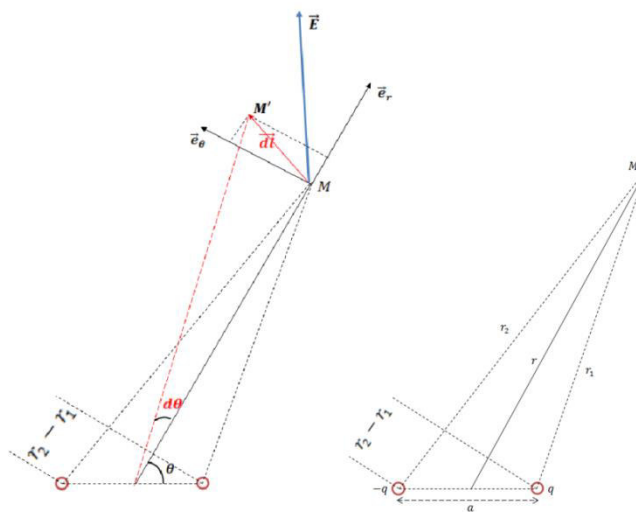


Figure 2-24: Champ électrique d'un dipôle

Les effets électriques \vec{E} et V produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire \vec{p} . Il faut remarquer également que la décroissance du potentiel en $(\frac{1}{r^2})$ et du champ en $(\frac{1}{r^3})$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

2.3.3.2 Dipôle placé dans un champ électrique

Considérons le cas le plus simple qui est celui d'un dipôle électrique \vec{p} placé dans un environnement où règne un champ électrique constant \vec{E}

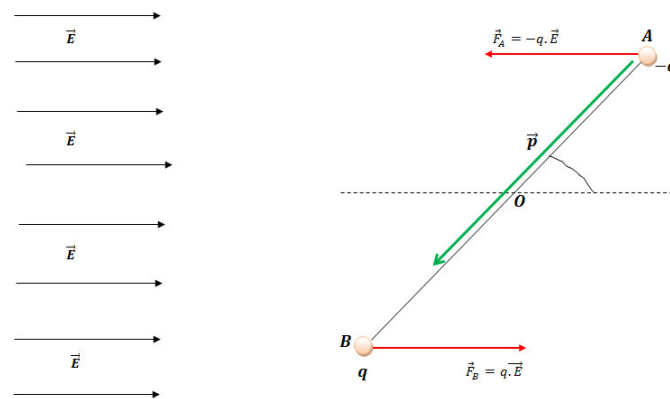


Figure 2-25: Dipôle électrique dans un champ électrique

En A : la charge $-q$ est soumise à la force $\vec{F}_A = -q \cdot \vec{E}$;

En B : La charge $+q$ est soumise à la force $\vec{F}_B = q \cdot \vec{E}$.

Ces deux forces sont égales et opposées, leur somme est nulle. Mais le dipôle reste soumis à un couple ou action de rotation \vec{L} . Ce couple tend à aligner le dipôle \vec{p} avec le champ électrique \vec{E} .

$$\vec{L}_{/O} = \vec{OA} \times \vec{F}_A + \vec{OB} \times \vec{F}_B$$

Avec $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

$$\vec{L} \text{ devient } \vec{L}_{/O} = \vec{AB} \times \vec{F}_B = q \cdot \vec{AB} \times \vec{E};$$

$$\vec{L}_{/O} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Lorsque le dipôle est parallèle et de même sens que le champ électrique, le couple $\vec{L}_{/O}$ s'annule.

$$\vec{L}_{/O} = \vec{p} \times \vec{E} = p \cdot E \cdot \sin\theta = 0 \quad \text{pour } \vec{p} // \vec{E} \xrightarrow{2 \text{ cas possibles}} \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Ce sont deux possibilités d'équilibre, la première est stable et la deuxième est instable.

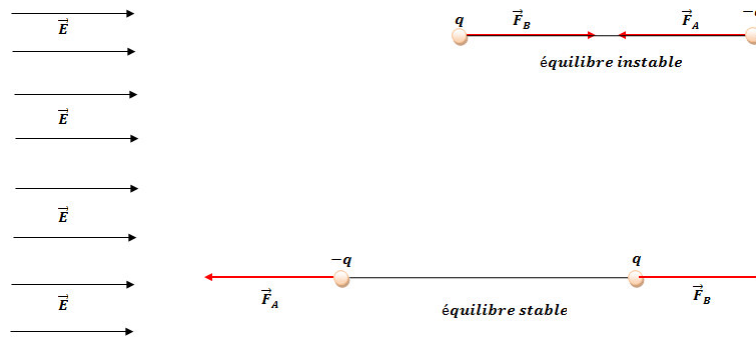


Figure 2-26: Alignement du dipôle électrique

2.3.3.3 Energie potentielle d'un dipôle plongé dans un champ constant

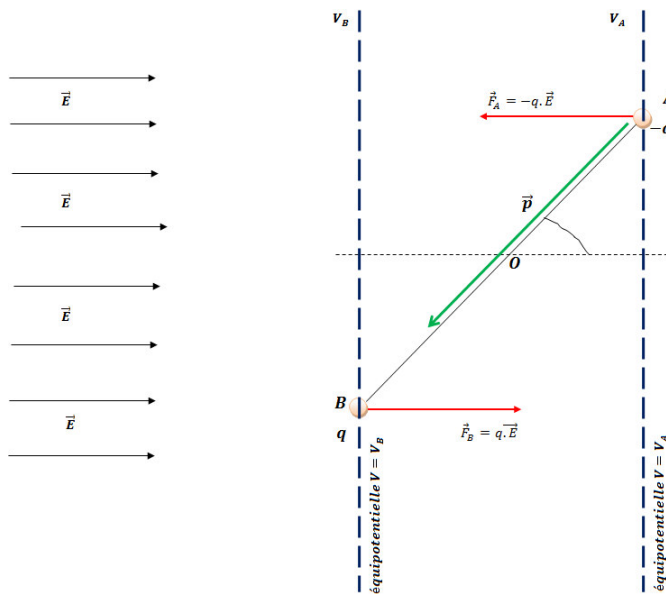


Figure 2-27: Energie potentielle d'un dipôle électrique

Perpendiculairement au champ, il existe des équipotentielle V_A et V_B . L'énergie potentielle du dipôle est donnée par :

$$E_p = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A) = q \int_A^B dV$$

Or, on sait que : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\text{implique}} \Delta V = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \vec{AB}$

Au final l'énergie potentielle d'un dipôle électrique baigné dans un champ électrique est donnée par:

$$E_p = q(-\vec{E} \cdot \vec{AB}) = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -E \cdot p \cdot \cos\theta$$

L'énergie minimale est obtenue pour $\theta = 0$ qui correspond au dipôle orienté parallèlement au champ dans le même sens, c'est une position d'équilibre stable. L'équilibre instable est obtenu pour $\theta = \pi$.

2.3.4 Flux du champ électrique- Théorème de GAUSS

2.3.4.1 Orientation d'une surface

Une surface est l'ensemble de points qui forment un espace à deux dimensions. En général, une surface présente une courbure, par convention, la surface convexe est positive et la surface concave est négative. Dans le cas d'une surface fermée, on choisit d'orienter la surface vers l'extérieur.

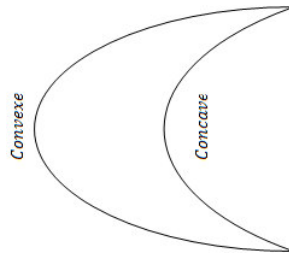


Figure 2-28: Surfaces concave et convexe

On représente vectoriellement un élément de surface autour d'un point M par un vecteur dont :

- Le module est l'aire de la surface élémentaire ds .
- La direction est la normale en M à ds

Le vecteur élémentaire de surface est alors donnée par :

$$\vec{ds} = ds \cdot \vec{n}$$

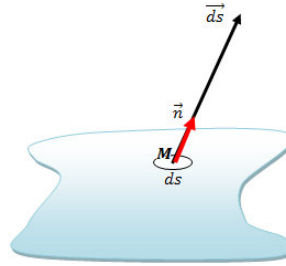


Figure 2-29: Orientation d'une surface géométrique

Dans le cas d'une surface qui s'appuie sur un contour orienté, l'orientation de la surface est définie par la règle de la main droite.

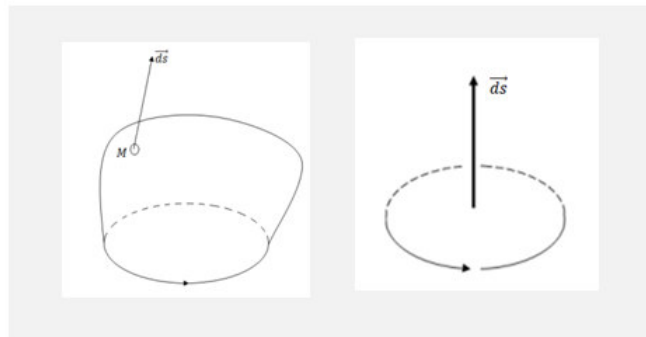
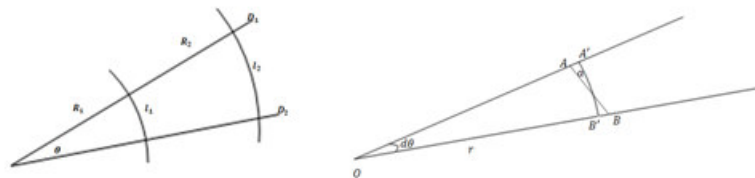


Figure 2-30: Surface fermée s'appuyant sur un contour

2.3.4.2 Angle solide

1. angle plan

L'angle plan est l'expression de la position relative entre deux demi-droites concourantes D_1 et D_2 :



$$\theta = \frac{l_2}{R_2} = \frac{l_1}{R_1}$$

Figure 2-31: Angle Plan

En d'autres termes, la mesure de l'angle θ est égale à la longueur de l'arc de cercle de rayon unité limité par les deux demi-droites. Cette définition nous conduit à quelques résultats bien connus :

L'angle plan sous lequel on observe un plan infini depuis un point est égale à 2π .



Figure 2-32: Cas d'angles Plans

Maintenant pour caractériser l'étendue à travers laquelle on voit un objet plan AB, on introduit l'angle Θ :

$$\theta = \widehat{AB} = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$$

Si l'angle est très petit, soit $d\theta$, on aura $\widehat{AB} = r d\theta$ et $AB = dl$

On défini un arc $A'B'$ du cercle de rayon r qui coupe le segment AB, on aura :

$$A'B' = dl \cos\alpha = rd\theta$$

$$d\theta = \frac{dl \cos\alpha}{r}$$

2. Angle solide

Un angle solide est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan bidimensionnel. Il nous permet de caractériser l'étendu spatial sous lequel on voit un objet (surface) dans l'espace. Par analogie avec l'angle plan, l'angle solide noté Ω est défini comme la mesure de la surface s interceptée sur la sphère de rayon unité.

Ω : s'exprime en stéradians.

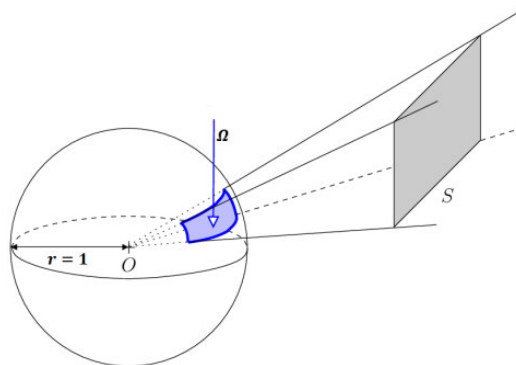


Figure 2-33: Angle solide

Conséquences :

L'angle solide sous lequel on peut voir tout l'espace est égale à 4π .

L'angle solide sous lequel on observe une salle de classe depuis un de ses coins est égale à $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Si maintenant la surface à observer depuis un point O est très petite, soit $d\Sigma$ désorientée par rapport à la surface droite du cône dS , on a alors :

$$\frac{dS}{r^2} = \frac{d\Omega}{1^2} \xrightarrow{\text{ce qui donne}} dS = r^2 \cdot d\Omega$$

Or $dS = d\Sigma \cdot \cos \theta$

d'où $d\Omega = \frac{d\Sigma \cdot \cos \theta}{r^2}$

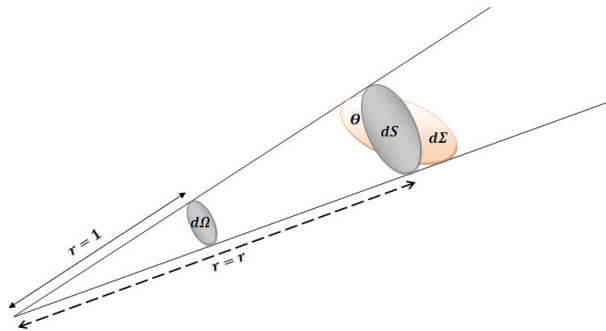


Figure 2-34: Exemple d'un angle solide

2.3.4.3 Flux du vecteur champ électrostatique

Soit dans l'espace ou règne un champ électrostatique \vec{E} , on appelle flux du champ \vec{E} à travers une surface dS la quantité scalaire $d\Phi$ tel que :

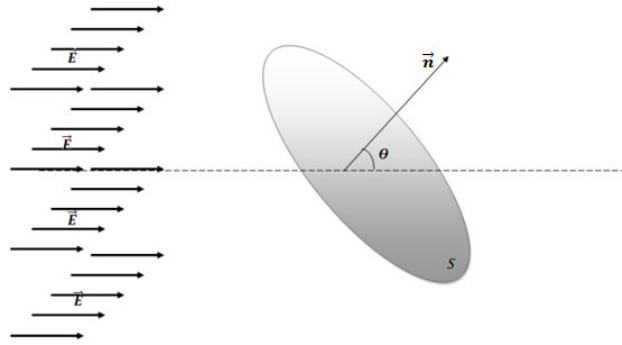
$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Et le flux totale à travers une surface donnée :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Si le champ \vec{E} est constant

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S \cdot \cos \theta$$

Figure 2-35: Flux du champ E à travers une surface orientée

2.3.4.4 Théorème de Gauss

Pour une charge électrique ponctuelle q placée à l'intérieur d'une surface fermée S quelconque, le flux totale $\Phi(\vec{E})$ à travers la surface S est donné par :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{E}) &= \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint \frac{kq}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} \\ &= kq \oiint \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = kq \oiint \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2}\end{aligned}$$

Compte tenu de l'angle solide précédemment défini :

$$\Phi(\vec{E}) = kq \oiint d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Un résultat qu'on peut facilement généraliser au flux du champ électrostatique créé par n charges, à travers une surface fermée et qui donne :

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Théorème de Gauss :

Il s'énonce comme suit :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée entourant des charges électriques q_i est :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Il ressort que, si on a pas de charges à l'intérieur d'une surface fermée, le champ sera automatiquement nul.

$$\sum_i q_i = 0 \xrightarrow{\text{ce qui donne}} \vec{E} = \vec{0}$$

Les surfaces extérieures ne figurent pas dans l'expression du flux.

Le théorème de GAUSS est très utile pour le calcul de champ produit par des distributions de charges avec des symétries géométriques.

Méthode d'application du théorème de Gauss

- Trouver une surface de Gauss passant par le point M où l'on désire calculer le champ.
- Ecrire le théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

- Compter les charges algébriques.

Exemples :

a- Champ électrique crée par une sphère creuse chargée en volume.

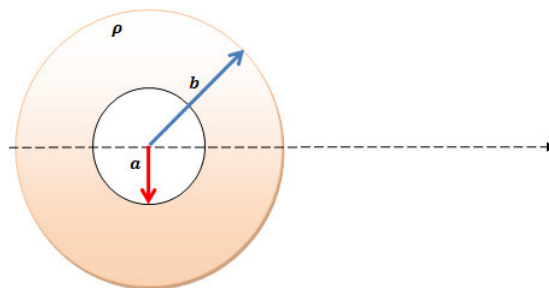


Figure 2-36: Une sphère creuse chargée e volume

Le volume d'une sphère de rayon R est donné par : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Si la sphère est chargée en volume de densité volumique de charge ρ , alors la charge portée par la sphère est $Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$.

Le champ évolue en fonction de la distance r au centre de la sphère, on distingue trois régions :

Région 1 : $r < a$

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est une sphère de rayon r , la somme des charges à l'intérieur de cette surface est nulle. Le flux du champ à travers cette surface est donc nul et le champ est bien évidemment nul aussi.

Région 2 : $a < r < b$

La surface de Gauss est une sphère de rayon r supérieur à a mais inférieur à b .

Le volume chargé dans ce cas est donné par $v = \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)$ qui porte une charge $q = \rho v$.

On a alors :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho v}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$$

Ce qui donne :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2}$$

Région 3 : $r > b$

La surface de Gauss est une sphère de rayon $r > b$, qui englobe toute la sphère chargée. Ainsi, toute la charge électrique se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

On a alors :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho v}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r b^3$$

Ce qui donne :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{b^3}{r^2}$$

b- Champ créé par un fil uniformément chargé avec une densité linéique λ positive

Soit à calculer le champ électrique en un point M de l'espace distant r du fil chargé, la surface de Gauss la mieux adaptée et qui possède la symétrie du fil est bien un cylindre coaxiale avec ce dernier et qui passe par le point M (voir la figure).

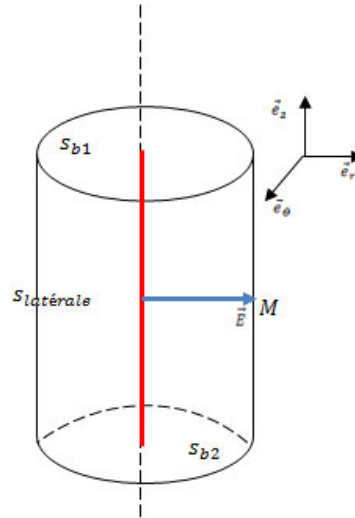


Figure 2-37: Symétrie cylindrique d'un fil uniformément chargé

On écrit le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface totale du cylindre de Gauss est formée de trois surfaces, deux de base et une surface latérale.

Pour des raisons de symétries, le champ est radial :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss se trouve réduit au flux à travers seulement la surface latérale.

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}(\text{latérale})$$

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0}$$

Où $(\lambda \cdot l)$ est la charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

c- Champ crée par un plan infini uniformément chargé de densité surfacique σ

Le plan étant infini, la symétrie du problème impose aux lignes de champ d'être perpendiculaires au plan. Si la densité est positive, les lignes de champs sont sortantes comme indiquées sur la figure. Pour le calcul du champ en un point M distant une distance l du plan, on considère une surface de Gauss cylindrique telle que représentée sur la figure.

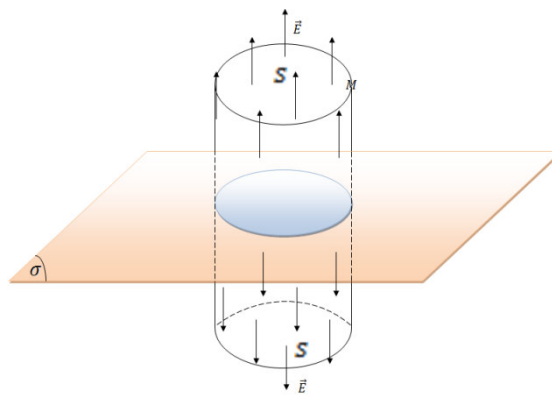


Figure 2-38: Un disque uniformément chargé en surface

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss est la surface du cylindre, formée de trois surfaces, deux surfaces de base et une surface latérale. Le flux total à travers cette surface fermée est la somme des flux à travers toutes les surfaces :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{latérale}$$

Comme le champ est perpendiculaire au plan infini, le flux à travers la surface latérale est nul.

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 2 \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1$$

Comme le champ \vec{E} est parallèle à \vec{S} , on trouve :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E \cdot S$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est la charge portée par le disque intersection du cylindre de Gauss avec le plan infini chargé .

$$Q_i = \sigma S$$

Au final, on trouve :

$$2 E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

On écrit vectoriellement :

Au dessus du plan
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

Au dessous du plan
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

d- Champ d'une sphère de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ

La sphère est chargée en volume, ce qui donne une charge totale Q donnée par :

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Si maintenant on considère une sphère de rayon r inférieur à R , elle portera une charge partielle q donnée par :

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

La symétrie sphérique de la distribution de charges impose au champ d'être radial, en coordonnées sphériques il s'écrit :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

Et il ne dépend que de la distance r au centre de la sphère. Pour le calculer, on applique le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Deux cas sont possibles :

$r < R$:

Dans ce cas, on choisit une surface de Gauss sphérique de rayon r qui contient la charge

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Et on écrit

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\text{Finalement : } \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$r > R$:

Cette fois-ci, la sphère de Gauss est une sphère qui contient la sphère matérielle chargée, son rayon r est supérieur à R , on alors :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \quad \text{ce qui donne} \quad E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Finalement : } \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Remarque : Le champ créé par une sphère chargée est vue comme celui créé par une charge ponctuelle ayant la charge de la sphère concentrée en son centre.

2.3.5 Conducteur en équilibre électrostatique

2.3.5.1 Définition

Un conducteur est un milieu matériel (corps) à l'intérieur duquel les charges électriques libres peuvent se déplacer. Du point de vue électrique, un conducteur est une matière à travers laquelle le courant électrique peut circuler.

Lorsque les charges électriques sont injectées dans un conducteur, immédiatement, un état d'équilibre électrostatique s'établit. Ce qui revient à dire qu'un conducteur est en équilibre lorsque toutes ses charges sont immobiles, c'est-à-dire ne sont soumises à aucune force.

2.3.5.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre

1. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. En effet, si le champ \vec{E} n'est pas nul, toutes les charges libres seraient soumises à une force électrostatique $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ et se déplaceraient, ce qui serait une contradiction avec la définition même d'un conducteur en équilibre.
2. Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel. En effet,

$$\vec{E} = \vec{0} \xrightarrow{\text{implique}} \Delta V = 0$$

$$V = \text{constante}$$

3. Le champ à la surface est perpendiculaire à celle-ci. En effet, puisque le champ à l'intérieur est nul et que le volume tout entier du conducteur forme une équipotentielle, alors la surface est aussi une équipotentielle et le champ est perpendiculaire à cette surface. De la définition même des équipotentiels :

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \xrightarrow{\text{implique}} \vec{E} \text{ est perpendiculaire à } \vec{dl}$$

4. Les charges en excès ne peuvent se répartir dans le volume. En effet, en appliquant le théorème de Gauss à toute surface fermée à l'intérieur du volume, le flux à travers cette surface est nul puisque le champ est nul.

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \xrightarrow{\text{implique}} \sum q_i = 0$$

La somme des charges à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nulle. Expérimentalement, les charges se répartissent effectivement sur une épaisseur de quelques Å.

Cas d'un conducteur creux e équilibre

Nous venons de voir qu'un conducteur en équilibre est un volume équipotentiel. Par continuité du potentiel, ce dernier est constant à l'intérieur de la cavité et de là, le champ est alors nul dans toute la cavité.

C'est cette caractéristique qu'on utilise pour le blindage contre le champ électrostatique, en formant une cage à l'aide d'un conducteur, c'est le principe de **la cage de Faraday**.

2.3.5.3 Champ au voisinage immédiat d'un conducteur

Considérons un conducteur (Σ) de volume arbitraire et on cherche à déterminer le champ en son voisinage immédiat. Pour cela, on considère une surface de Gauss cylindrique aplatie telle que la base inférieure est dans le conducteur. La base supérieure passe par le point M du voisinage immédiat de la surface du conducteur.

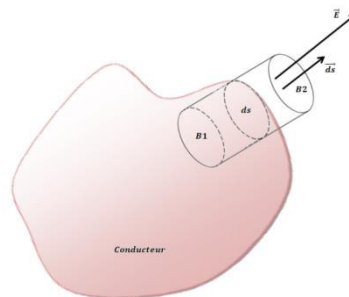


Figure 2-39: Champ électrique au voisinage d'une surface

Seule charge à l'intérieur du cylindre, celle portée par la surface du conducteur.

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

Le flux totale à travers le cylindre de Gauss est la somme de trois contributions, deux flux à travers les surfes de base et un troisième à travers la surface latérale. Or, le flux à travers la surface de base intérieur au conducteur est nul puisque le champ est nul à l'intérieur. Le flux à travers la surface latérale est aussi nul, puisque le champ est perpendiculaire à la surface de base. Il subsiste juste la contribution du flux à travers la surface extérieur au conducteur. On écrit à cet effet :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{base1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{base2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{surface\ latérale} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{base2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint E \cdot ds = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne au final :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Entre l'intérieur et l'extérieur, le champ varie comme indiqué sur la figure, il est égale à la moitié de cette valeur à la surface du conducteur.

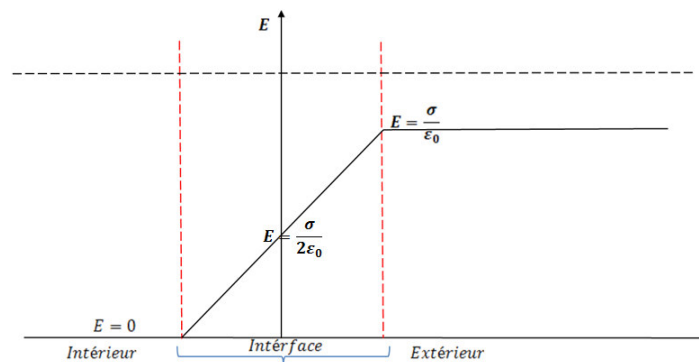


Figure 2-40: Profil du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur

Pression électrostatique

Les charges libres dans un conducteur ne peuvent être qu'en surface. Ces charges sont soumises à des forces de répulsions de la part des autres charges. Comme le champ est perpendiculaire à la surface en tout point de celle-ci, et dirigé vers l'extérieur, les forces le sont aussi.

Considérons un élément de surface ds portant une charge élémentaire $dq = \sigma ds$.

Cette charge subit une force élémentaire $d\vec{F} = dq \vec{E}$. Le champ à la surface est donné par $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$. Ce qui nous amène à écrire

$$d\vec{F} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = ds \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est une force normale à la surface, et en la rapportant à la surface, on obtient la pression électrostatique qui vaut :

$$p = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Pouvoir des pointes

L'expérience montre que la répartition des charges à la surface d'un conducteur n'est pas constante, et qu'elle dépend de la courbure de celle-ci. Elle n'est constante au fait que pour un conducteur parfaitement sphérique. A proximité d'une pointe le champ électrostatique est très intense, conséquence de la concentration de charge. Pour se convaincre, considérons un conducteur formé de deux conducteurs sphériques de rayons R_1 et R_2 suffisamment éloignées mais reliées par un fil conducteur très mince. Comme schématisé sur la figure.



Figure 2-41: Pouvoir des pointes

Les deux sphères et le fil forme un seul conducteur et forment de ce fait un volume équipotentiel. Les deux sphères étant très éloignées l'une de l'autre sont donc au même potentiel V .

Soient Q_1 et Q_2 les charges et soient σ_1 et σ_2 les densités superficielles de ces deux sphères.

On peut alors écrire :

$$V_1 = V_2 = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} = \sigma_1 s_1 = \sigma_2 s_2$$

Avec s la surface de la sphère donnée par : $s = 4\pi r^2$

On trouve : $\sigma_1 R = \sigma_2 R_2$

Ceci montre clairement que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charge. C'est que les charges ont tendance à s'accumuler sur les pointes des conducteurs. Ce résultat appelé pouvoir des pointes est d'un intérêt technologique majeur. Il est utilisé à titre d'exemple pour la décharge de l'électricité qui est le principe des paratonnerres pour se protéger contre les foudres.

2.3.5.4 Capacité propre d'un conducteur

Sur un conducteur isolé, plus on dépose de charges électriques, plus les interactions augmentent et plus le potentiel croît. On dit alors que le potentiel est proportionnel à Q et on écrit :

$$Q = CV, \text{ ce qui donne : } C = \frac{Q}{V}.$$

Où C est la capacité propre d'un conducteur. Elle ne dépend que de la forme et des dimensions du conducteur. Elle s'exprime en Coulomb par volt ou Farad et exprime l'aptitude d'un conducteur à emmagasiner des charges électriques.

Exemple de calcul : capacité propre d'un conducteur sphérique :

Soit un conducteur sphérique de centre O et de rayon R portant une charge Q répartie sur sa surface. Le potentiel d'un tel conducteur peut être trouver à partir du potentiel au centre O de la sphère, soit $V(O)$.

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \iint \sigma ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Avec $C = \frac{Q}{V}$ on trouve : $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$.

Un conducteur de la taille de la terre ($R = 6400\text{Km}$) aura alors une capacité $C = 4\pi\epsilon_0 R = 0.71 \cdot 10^{-3} \text{ Farad}$. Il est clair que l'unité Fard correspond à une capacité énorme.

2.3.5.5 Energie interne d'un conducteur chargé

L'énergie interne d'un conducteur isolé portant une charge Q et porté au potentiel V est le travail nécessaire à fournir pour ramener la charge depuis l'infini et la déposer sur la surface

du conducteur. C'est aussi le travail des forces électrostatiques mises en jeu au cours de la charge du conducteur.

Soit un tel conducteur, son énergie interne électrostatique est donnée par :

$$W_e = \int dE_p = \int_0^Q V dq$$

Comme $q = C V$ alors :

$$W_e = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

Cette énergie est positive, cela signifie que quel que soit V , amener un condensateur de capacité C à un tel potentiel coûte toujours de l'énergie.

2.3.5.6 Phénomènes d'influence entre conducteurs chargés

a- Influence d'un conducteur neutre isolé

Lorsqu'un conducteur neutre est plongé dans un environnement où règne un champ électrique \vec{E} , les charges positives libres se déplacent dans la direction de ce champ et les charges négatives se déplacent dans le sens contraire. Une nouvelle répartition des charges est alors créée, induisant un nouveau champ \vec{E} induit ($\vec{E}_{in} = \vec{E} \neq \vec{0}$). Le phénomène se poursuit jusqu'à ce que le champ induit \vec{E} compense le champ extérieur \vec{E} .

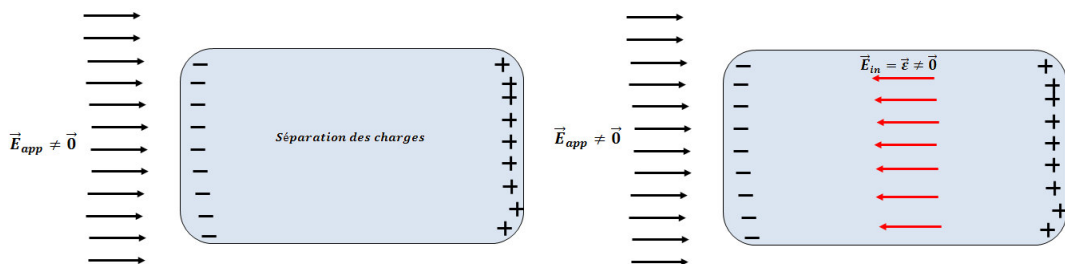


Figure 2-42: Influence d'un conducteur neutre et isolé

On a alors :

$$\vec{E}_{totint} = \vec{E}_{ext} + \vec{\epsilon} = \vec{0}$$

Et le conducteur est de nouveau en équilibre. Ce dernier n'a ni perdu, ni gagné de charges électriques. Tout ce qui a changé c'est leur arrangement à l'intérieur du conducteur, Mais aussi le potentiel puisque le conducteur se trouve plongé dans un champ non nul. Des lignes de champ partent à présent du conducteur pour l'infini, selon le schéma.

b- Conducteur maintenu à un potentiel constant

C'est le cas lorsqu'on relie le conducteur A à la terre (la terre est neutre). Dans ce cas, le conducteur et la terre forment un conducteur unique, une même équipotentielle ($V = 0$). Et le conducteur A ne peut être influencé, son potentiel demeure nul ($V = 0$).

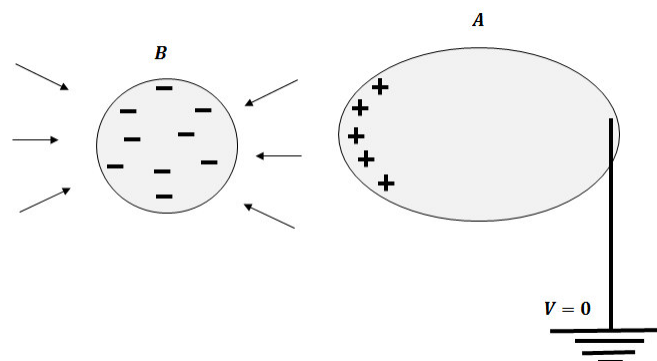


Figure 2-43: conducteur maintenu à un potentiel constant

c- Influence en retour

La charge portée par le conducteur A influence la répartition des charges à l'intérieur du conducteur B. instantanément, il se produit une influence réciproque de B sur A, c'est l'influence en retour ou mutuelle.

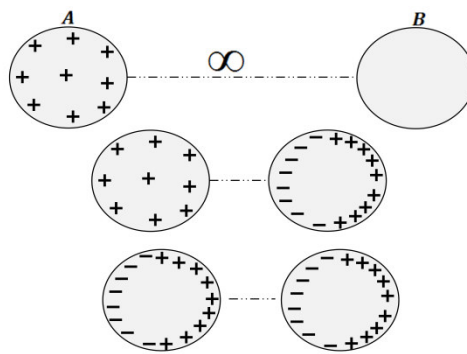


Figure 2-44: Influence retour

d- Influence totale

Deux conducteurs sont dits en influence totale si l'un (A) entoure parfaitement l'autre (B). Dans cette configuration, aucune ligne de champ ne peut s'échapper. Toute ligne de champ qui quitte le conducteur B ne peut aller que sur le conducteur A. les deux surfaces, surface de B et surface interne de A sont en correspondance.

Et puisque le champ à l'intérieur du conducteur A est nul, cela signifie que $q_A + q_B = 0$. Le conducteur B porte une charge électrique égale et opposée à celle portée par la surface intérieure de A.

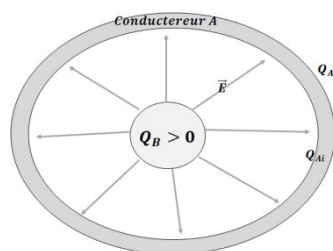


Figure 2-45: Influence totale

Si A est isolé et neutre initialement, la conservation de la charge dans A implique que sa surface extérieur porte la charge $-q_{Ai} = q_B$

Si A est isolé et porte une charge Q_0 initialement, on aura :

$$-q_{Ai} = q_B \quad \text{et} \quad Q_0 = q_{Ai} + q_{Ae}$$

Ce qui donne : $q_{Ae} = Q_0 + q_B$.

e- Effet d'écran ou blindage électrostatique : la cage de Faraday

A l'intérieur d'un conducteur en équilibre le champ électrostatique est nul. Ainsi, s'il est creux, la cavité fermée se trouve isolée électriquement du monde extérieur.

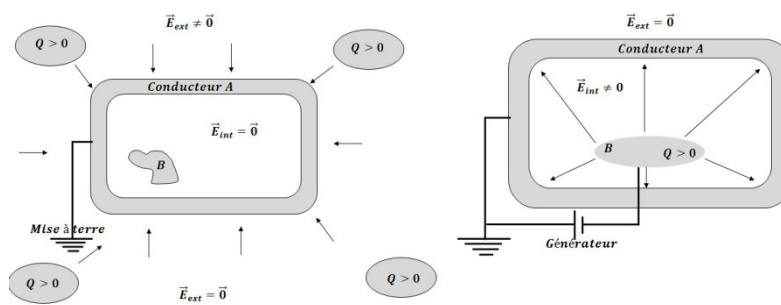


Figure 2-46: Cage de Faraday

- Si maintenant le conducteur B porte une charge nulle et le conducteur A est placé à proximité d'un conducteur chargé ($Q > 0$), à l'équilibre, on aura $Q_{Ai} = 0$, mais un champ électrostatique non nul est mesuré à l'extérieur de A dépendant de la distribution surfacique externe de A. ainsi, et malgré la charge portée par la surface extérieure de A, dans la cavité interne règne un champ électrostatique nul.
- Si on relie le conducteur A au sol, on a $Q_A = 0$. Dans ce cas, le champ ($\vec{E}_{ext} = \vec{0}$) électrostatique mesuré à l'extérieur de A est nul et cela malgré la présence de B (chargé ou pas. C'est que l'espace extérieur est protégé de toute influence provenant de la cavité.

Nous venons de voir que tout conducteur creux maintenue à un potentiel constant constitue bien un écran électrostatique. C'est la cage de Faraday.

2.3.6 Condensateurs

Un condensateur est un système de deux conducteurs en influence électrostatique totale. On en trouve de deux types, des condensateurs à armatures planes rapprochées et des condensateurs à armatures courbées à influence totale.

Jusque là, nous avons vu qu'un conducteur de capacité C maintenu à un potentiel électrique V porte une charge électrique Q telle que :

$$Q = C.V$$

Soit maintenant un conducteur A de capacité C maintenu à un potentiel positif V , il portera donc une charge positive $Q_A = C.V$. Dans le branchement de la figure ci-dessous, le conducteur A porte une charge positive. Si un autre conducteur B porté à un potentiel nul est approché de A, une influence électrostatique aura lieu.

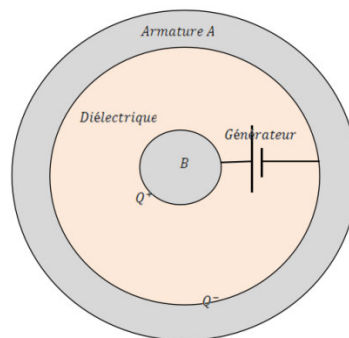


Figure 2-47: Un condensateur sphérique

Le conducteur A influence le conducteur B, sur lequel apparaissent des charges négatives. Ces dernières à leurs tour influencent le conducteur A, faisant apparaître de nouvelles charges positives à sa surface.

Il n'a pas eu de création de charges, c'est le générateur qui en a assuré le transport depuis le grand réservoir qui est la terre. A l'équilibre et sous l'effet de B, le conducteur A porte plus de charges que lorsqu'il était seul. La présence de B a entrainé une **CONDENSATION** de l'électricité sur A. les deux conducteurs A et B forment alors un condensateur.

On retient à ce stade qu'un condensateur est un système électrique constitué de deux conducteurs appelés **armatures** en influence totale, séparé par du vide ou un matériaux isolant dit **Diélectrique**.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs où l'un est creux et entourant parfaitement l'autre. Les deux armatures sont séparées par le milieu isolant.

Les charges Q_A et Q_B sont égales et de signes contraires. $|Q_A| = |Q_B| = Q$ est appelée charge du condensateur.

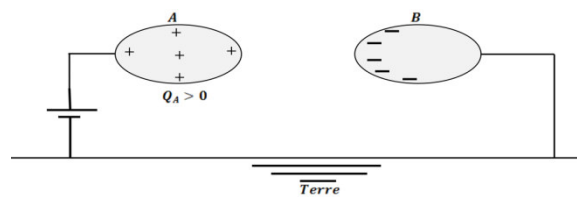


Figure 2-48: Conducteurs en regard

Si V est la différence de potentiel entre les armatures A et B, alors : $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_B - V_A}$

2.3.6.1 Calcul de la capacité d'un condensateur

Le calcul de la capacité d'un condensateur passe par le calcul du rapport $C = \frac{Q}{V}$. Pour cela, on se donne la charge Q portée par chacune de ses armatures. On calcule en premier le champ électrostatique qui règne dans le condensateur, c'est-à-dire, en tout point de l'espace entre les deux conducteurs qui forment le condensateur. On le fait par l'application du théorème de Gauss. Ensuite, on en déduit la différence de potentiel(d.d.p) entre les armatures par le calcul de la circulation du champ électrique depuis l'armature A jusqu'à l'armature B. Le rapport $C = \frac{Q}{V}$ est alors évident.

2.3.6.2 Capacité d'un condensateur plan

Soit le condensateur plan de la figure ci-après constitué de deux conducteurs plans en regard parfait, de surface S et portants la charge Q . les deux armatures sont séparées par une distance « e » .

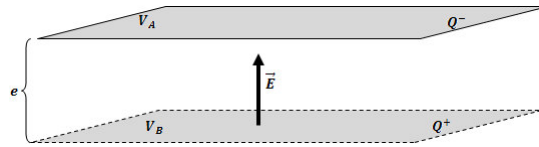


Figure 2-49: Deux conducteurs en regard

On suppose également que la charge Q est répartie de manière uniforme sur la surface du conducteur S avec une densité surfacique de charge $\sigma = \frac{Q}{S}$.

En négligeant les effets de bords (plan sont infini), on peut écrire :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S} \vec{n}, \text{ où } \vec{n} \text{ est un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur.}$$

La circulation du champ électrostatique \vec{E} donne :

$$\int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_B - V_A = \frac{Q \cdot e}{\epsilon_0 \cdot S}$$

$$\text{D'où } C = \frac{Q}{V_B - V_A} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{e}.$$

Dans le domaine pratique, le vide entre les armatures est un milieu diélectrique de permittivité relative ϵ_r , la capacité du condensateur devient alors :

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot S}{e}$$

On symbolise un condensateur par $\text{---} \overset{C}{|} \text{---}$

2.3.6.3 Capacité d'un condensateur cylindrique

On considère deux cylindres « infini » coaxiaux de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$. On cherche à calculer la capacité d'une tranche de hauteur finie h d'une telle structure.

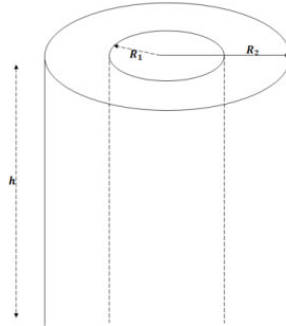


Figure 2-50: Condensateur cylindrique

On admet que chacune des armatures de hauteur h porte une charge de valeur algébrique Q répartie de manière uniforme de sorte à avoir $Q = \sigma \cdot S$.

Le champ \vec{E} entre les deux cylindres ($R_1 < r < R_2$) se calcule facilement en utilisant le théorème de Gauss :

$$\oiint_{Totale} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{Base1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{Base2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint_{Surface\ latérale} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Les deux premiers termes sont nuls puisque le champ est radial, seul subsiste le dernier terme.

$$\oiint_{Totale} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{Surface\ latérale} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$S = 2\pi \cdot r \cdot h$$

Ce qui donne:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \vec{u}_r$$

La circulation du champ électrique permet de calculer la différence de potentiel entre les deux cylindres formant le condensateur :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V(M) \text{ ou encore } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} \log \frac{R_2}{R_1}$$

Finalement :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

La distance entre les armatures est très faible, elle est donnée par $R_2 = R_1 + e$.

$$C = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log \frac{R_1 + e}{R_1}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot h \frac{1}{\log(1 + \frac{e}{R_1})}$$

Comme $\frac{e}{R_1} \cong 0$ alors $\log\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \cong \frac{e}{R_1}$

Et l'expression de la capacité C devient :

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{e}$$

2.3.6.4 Energie électrique emmagasinée par un condensateur

C'est l'énergie que l'on récupère lorsque l'on court-circuite les armatures d'un condensateur après l'avoir isolé de la source. C'est une énergie d'origine électrostatique correspondant au travail fournie (par un générateur) pour ramener les charges depuis un potentiel nul et les rassembler sur l'armature à un potentiel non nul. En d'autres termes, c'est l'énergie potentielle électrique des charges déposées sur les armatures du condensateur.

L'énergie emmagasinée par un condensateur de capacité C, chargée sous une tension V

et portant une charge Q est donnée par la relation :

$$E_{el} = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

2.3.6.5 Association de condensateurs

On ne peut emmagasiner indéfiniment de l'énergie dans un condensateur, des limites pratiques s'imposent. Un diélectrique ne peut supporter une d.d.p supérieur à une valeur

critique dite de claquage « explosion ». C'est pourquoi, pour emmagasiner plus d'énergie, il est fait appel à des assemblages de condensateurs, avec une capacité équivalente.

Il est à rappeler qu'un condensateur équivalent d'un assemblage entre deux point A et B d'un circuit électrique est unique entre ces deux points et sous la même d.d.p que l'ensemble. Il restitue à la décharge la même quantité d'électricité que le groupement.

a- Association en parallèle

Dans l'association en parallèle, tous les condensateurs sont soumis à la même différence de potentiel $V = V_B - V_A$. les condensateurs portent alors les charges

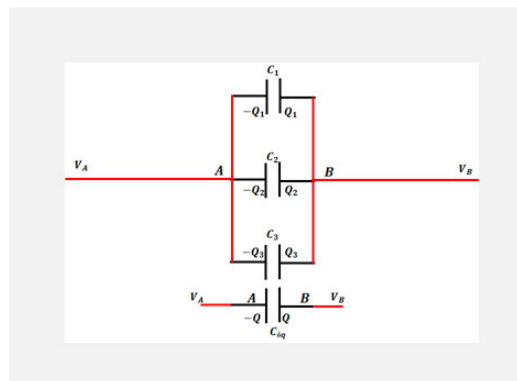


Figure 2-51: Trois condensateurs en parallèle

$$Q_1 = C_1V = Q_2 = C_2V = Q_3 = C_3V = \dots = Q_i = C_iV$$

Avec comme charge totale $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i = \sum_i Q_i$

Et pour le condensateur équivalent, on a :

$$Q = C_{eq} \cdot V = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i = V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i)$$

D'où $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i = \sum_i C_i$

b- Association en série

Dans l'assemblage en série, la différence de potentiel aux bornes du condensateur équivalent est la somme des d.d.p aux bornes des condensateurs formant le groupement. Pour des raisons

d'influences, toutes les armatures portent la même charge algébrique que la charge du condensateur équivalent.

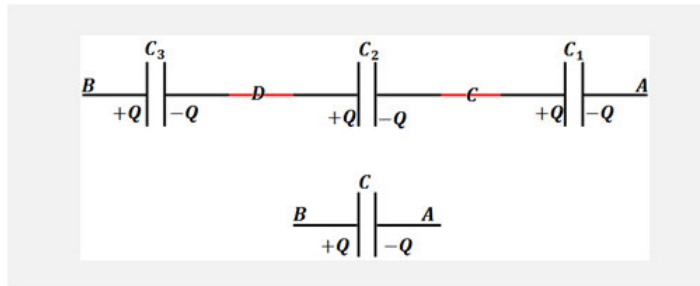


Figure 2-52: Trois condensateurs en série

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C_{eq}} = (V_B - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_A) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

D'où : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$, qu'on peut généraliser à :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

CHAPITRE TROIS

3 Electrocinétique

3.1 Définition

L'électrocinétique est le domaine de la physique consacré à l'étude des phénomènes résultants de la rupture de l'équilibre électrostatique entre conducteurs, induisant des mouvements de charges. Ces mouvements sont étudiés en termes de courants et de tensions dans des circuits électriques, assemblage plus ou moins complexes de composants tels que les générateurs, résistances, condensateurs, bobines ... etc.

3.2 Conducteur et courant électrique

Un conducteur d'électricité est un milieu matériel capable de laisser les charges électriques en mouvement le traverser. Généralement, les métaux sont de conducteurs d'électricité, les meilleurs étant l'argent, le cuivre et l'or.

Soient maintenant deux conducteurs électriques A et B , initialement en équilibre, portant des charges électriques Q_A et Q_B et soient V_A et V_B leurs potentiels tel que $V_A > V_B$.

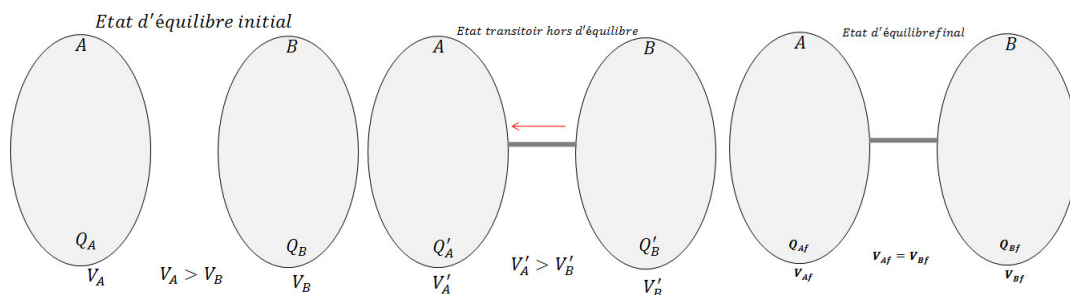


Figure 3-1: Origine du courant électrique

Si on relie les deux conducteurs par un fil conducteur, l'équilibre électrostatique primaire est alors rompu. Le nouveau système A, B et le fil évolue vers un nouvel état. Cette évolution se traduit par un mouvement de charges négatives du conducteur B vers le conducteur A. Au bout d'un certain temps, un nouvel état d'équilibre sera atteint ($V_A = V_B$) avec une nouvelle répartition de charges Q'_A et Q'_B . Nous dirons alors qu'un courant électrique a parcouru le fil.

En résumé, un courant électrique est un déplacement d'ensemble ordonnée de charges électriques dans un conducteur. Il est caractérisé par son intensité qui n'est autre que le rapport de la quantité de charge qui traverse une surface par unité de temps et on écrit :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$i(t)$ est une grandeur algébrique qui s'exprime en Ampère ($A = \frac{\text{Coulomb}}{\text{seconde}}$) dans le système international des unités (SI). Dans un circuit électrique, l'intensité I du courant électrique est mesurée à l'aide d'un Ampère mètre branché en série. Par convention, le sens positif du courant est celui du déplacement des charges positives, c'est-à-dire de la borne plus (+) du générateur vers sa borne négative(-).

3.3 Densité de courant

La densité de courant électrique est définie comme étant le courant électrique par unité de surface.

Soit dq la charge électrique traversant une section S d'un conducteur (voir la figure), et soit η le nombre de charges par unité de volume.

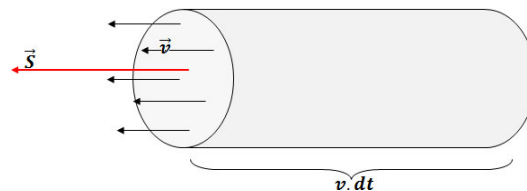


Figure 3-2: Densité de courant

On définit ainsi une densité volumique de charges $\rho = \eta q$, où q est une charge élémentaire. On a alors :

$$dq = \rho \cdot \vec{S} \cdot \vec{v} \cdot dt = \eta q \cdot \vec{S} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

Où \vec{v} est la vitesse moyenne de déplacement de charges dans le conducteur. Le courant compte tenu de sa définition est donné par :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \eta q \cdot \vec{S} \cdot \vec{v}$$

Posons maintenant

$$\vec{j} = \eta q \cdot \vec{v} = \rho \cdot \vec{v}$$

On aura alors :

$$i(t) = \vec{j} \cdot \vec{S}$$

\vec{j} est appelé vecteur densité d courant en Ampère par mètre carré ($A \cdot m^2$). Si maintenant \vec{j} est fonction des coordonnées d'espace (x, y, z), alors :

$$i(t) = \int \vec{j}(x, y, z) ds \text{ et l'intégrale porte sur toute la surface } S.$$

3.4 La loi d'Ohm

La loi d'Ohm est une loi physique expérimentale valable juste à l'échelle macroscopique et stipule que pour un conducteur à température constante, le rapport de la différence de potentielle V entre deux points au courant électrique I est constant.

$$\frac{V}{I} = R$$

La constante de proportionnalité R est appelée résistance du conducteur entre les deux points considérés. Elle est exprimée en Ohm (Ω).

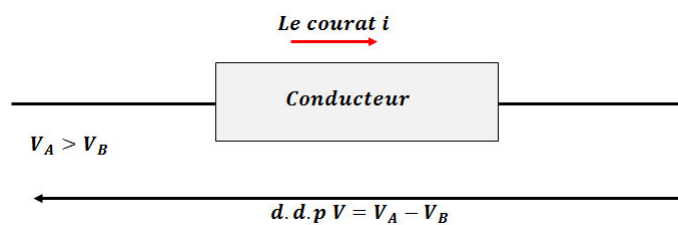


Figure 3-3: Courant à travers un conducteur

Exemple de calcul de la résistance d'un conducteur

Soit à calculer la résistance d'un conducteur cylindrique homogène de longueur l et de section S , sous une différence de potentiel $V = V_A - V_B$ entre ses deux extrémités (voir la figure ci-après).

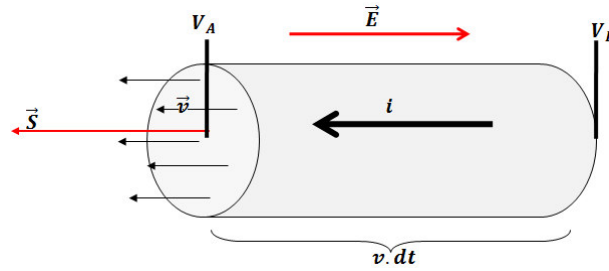


Figure 3-4: Résistance d'un conducteur

A l'intérieur de ce cylindre règne un champ électrique \vec{E} et circule un courant i électrique de densité \vec{j} . Par convention, le courant circule dans le sens de \vec{E} et dans le sens contraire de déplacement des charges électriques négatives (électrons).

On peut alors écrire :

$$i = j \cdot S$$

Le champ électrique le long du cylindre est donné par :

$$E = \frac{V}{l} \text{ ou encore } V = l \cdot E$$

De la loi d'Ohm, on a :

$$V = R \cdot I = R \cdot S \cdot j$$

Ce qui donne :

$$j = \left(\frac{l}{R \cdot S} \right) E = \delta \cdot E$$

Où $\delta = \frac{l}{R \cdot S}$ est une nouvelle grandeur appelée conductivité électrique du matériau. Elle s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. son inverse $\frac{1}{\sigma} = \rho$ est la résistivité électrique du matériau.

La relation $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ est une autre écriture de la loi d'Ohm.

Exemple de calcul de la résistance

Soit maintenant le conducteur cylindrique précédent avec $V = V_A - V_B$ avec $V_A > V_B$.

On a
$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Ou
$$j = -\sigma \cdot \frac{dV}{dx}$$

Or
$$j = \frac{I}{S}$$

D'où $\frac{I}{S} = -\sigma \cdot \frac{dV}{dx}$ et $dV = -\frac{I}{S} \cdot \frac{1}{\sigma} dx$

En intégrant entre A et B on trouve : $\int_A^B dV = V_B - V_A = -\frac{I}{S} \cdot \rho \cdot l = R \cdot I$

Enfin on a : $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$.

3.5 Loi de joule

La résistance traduit la difficulté avec laquelle les électrons peuvent circuler dans le matériau. Cette difficulté se traduit par un engagement de chaleur qu'on appelle effet Joule. Dans un circuit électrique cet effet traduit la perte d'énergie par dissipation thermique. Pour une résistance R prise entre une différence de potentiel V et traversée par un courant d'intensité I, la puissance dissipée est donnée par :

$$P_{th} = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Exprimée en Watt.

3.6 Association de résistances

3.6.1 Association en série

Dans l'assemblage de résistances en série (voir la figure ci-après), le courant circulant dans toute la branche est le même, il traverse toutes les résistances.

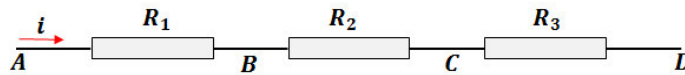


Figure 3-5: Des résistances en série

On écrit alors :

$$V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D)$$

D'où

$$R_{eq} \cdot i = +R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + R_3 \cdot i = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot i$$

Ce qui donne :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

En généralisant, on a :

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

3.6.2 Association en parallèle

Dans une telle association, toutes les résistances sont soumises à une même différence de potentiel $V_A - V_B$, alors que le courant total circulant entre les deux points *A* et *B* est la somme des courants circulant dans chaque branche.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

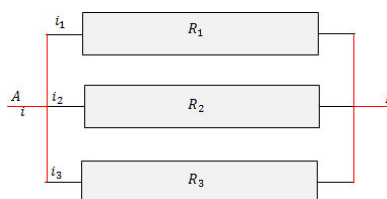


Figure 3-6: Trois résistances en parallèle

Ce qui voudrait dire que :

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

En généralisant, on écrit :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

On appelle conductance l'inverse de la résistance. La conductance équivalente d'un assemblage parallèle de résistance est égale à la somme des conductances.

3.7 Loi de Joule

Quand un courant électrique circule dans un conducteur, c'est que des charges électriques sont en mouvement, ces charges qui ne sont pas isolées sont en collisions presque permanentes avec leurs voisines et ces collisions entraînent des pertes d'énergie pour le système. Ces pertes sont aisément calculables.

Soit à cet effet un circuit électrique constitué d'une pile (générateur) dont ces deux bornes sont reliées à une résistance R. Un courant électrique I circule alors depuis la borne positive à la borne négative de cette pile.

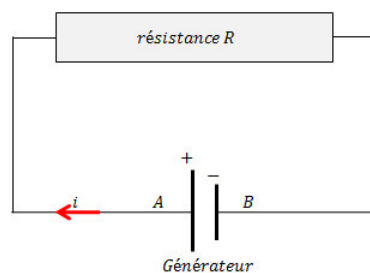


Figure 3-7: Une résistance aux bornes d'un générateur

Considérons à présent une charge q qui circule de A à B, cette circulation s'accompagne d'une perte d'énergie W tel que :

$$W = q(V_A - V_B)$$

Si maintenant un courant i circule dans ce circuit pendant un temps t , ceci correspond à une charge $q = i \cdot t$, et la perte d'énergie devient :

$$W = i \cdot t \cdot (V_A - V_B)$$

Or et d'après la loi d'Ohm

$$V_A - V_B = R \cdot i$$

D'où :

$$W = R \cdot i^2 \cdot t$$

Ce qui correspond à une puissance de :

$$P = \frac{W}{t} = R \cdot i^2 = \frac{(V_A - V_B)}{R}$$

Cette énergie est cédée au milieu extérieur sous un dégagement de chaleur qui constitue l'effet Joule.

3.8 Circuits électriques

3.8.1 Générateur électrique

Un générateur électrique est un dispositif permettant de produire de l'énergie à partir d'une autre forme d'énergie. On en trouve deux types, un de tension est un autre de courant.

a- Générateur de tension

Un générateur de tension est un dispositif capable de maintenir une différence de potentiel constante à ces bornes quelque soit le circuit extérieur. Cette tension est égale à sa force électromotrice ε moins la chute de tension causée par sa résistance interne, lorsque celui-ci débite ($i \neq 0$).

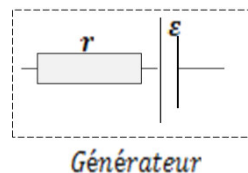


Figure 3-8: Symbole d'un générateur

On écrit :

$$V_A - V_B = \varepsilon - r \cdot i$$

Où r est la résistance interne du générateur.

Si maintenant le générateur ne débite pas ($i = 0$), la différence de potentiel à ces borne est égale à sa force électromotrice f.e.m.

$$V_A - V_B = \varepsilon$$

Association de générateurs

Les générateurs de tensions s'associent en série de sorte que la force électromotrice de l'association soit égale à la somme des f.e.m individuelles et la chute de tensions totale soit égale à la somme des chutes de tensions dans chaque générateur pris individuellement.

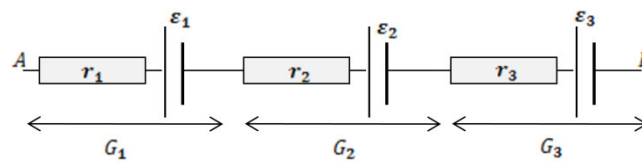


Figure 3-9: Trois générateurs en série

$$V_A - V_B = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (r_1 + r_2 + r_3) \cdot i$$

Or :

$$V_A - V_B = \varepsilon - r \cdot i$$

Ce qui donne :


$$\begin{cases} \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \\ r = \sum_i r_i \end{cases}$$

b- Générateur de courant

Lorsque la résistance interne du générateur de tension est beaucoup très grande devant celle du circuit sur lequel il débite, le courant est constant et insensible à la charge du circuit. Le générateur devient alors un générateur de courant. On le symbolise par $\text{---}\bigcirc\text{---}$

Ce générateur délivre alors un courant constant et le maintient indépendamment de la charge du circuit.

3.8.2 Récepteur

Contrairement aux générateurs, un récepteur est un appareil alimenté en énergie électrique et la transforme en une autre forme d'énergie, mécanique ou thermique à titre d'exemples. Il est symbolisé par 

Soit I le courant qui circule entre les bornes A et B du récepteur de la figure ci-après.

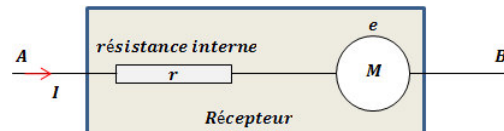


Figure 3-10: Schéma électrique d'un récepteur

La différence de potentiel entre les bornes est donnée par : $V_A - V_B = r \cdot I + e$

La puissance dissipée entre ces points est P donnée par :

$$P = (V_A - V_B) \cdot I = r \cdot I^2 + e \cdot I = r \cdot I^2 + P'$$

Où P' est la puissance utilisable convertie en une autre forme d'énergie.

3.9 Applications de la loi d'Ohm aux réseaux

3.9.1 La loi d'Ohm appliquée à un circuit fermé

Soit un circuit fermé comportant des générateurs, des récepteurs et des résistances tous en série. Compte tenu des définitions des générateurs et des récepteurs, nous pouvons dire que la puissance débitée par l'ensemble des générateurs est consommée par les récepteurs et par perte Joule dans les résistances. On écrit à cet effet :

$$I \cdot \sum \varepsilon = I \cdot \sum e + I^2 \cdot \sum R$$

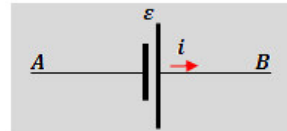
Le premier terme à gauche est la puissance débitée par l'ensemble des générateurs, le premier terme à droite représente la puissance consommée par les récepteurs et le second terme toujours à droite est la puissance dissipée par effet Joule par l'ensemble des résistances.

3.9.2 Loi d'Ohm appliquée à une portion d'un circuit

Un circuit électrique est un ensemble d'éléments, appelés composants, interconnectés entre eux. Soit maintenant une portion d'un tel circuit pris entre deux points A et B entre lesquels circule un courant i .

Si entre A et B, nous avons une f.e.m ε

$$V_A - V_B = -\varepsilon$$

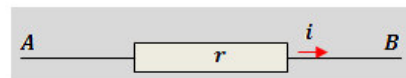


$$V_A - V_B = +\varepsilon$$



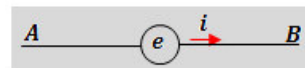
Entre A et B, on a une résistance parcouru par un courant i :

$$V_A - V_B = r \cdot i$$



Entre A et B, nous avons un récepteur (un moteur par exemple) :

$$V_A - V_B = e$$



3.9.3 Généralisation de la d'Ohm

Ces lois regroupent la loi d'Ohm et le principe de conservation de l'électricité.

Soit maintenant un circuit électrique regroupant des générateurs, des récepteurs, et des résistances mortes (Ohmiques) interconnectés par des fils conducteurs; nous définissons :

Un nœud comme étant un point du circuit relié à deux dipôles ou plus.

Une branche comme étant l'ensemble des éléments situés entre deux nœuds.

Et enfin, une maille comme étant un parcours fermé de branches passant au plus par un nœud donné.

3.9.3.1 Loi des nœuds ou loi de conservation de l'électricité

En tout nœud du circuit électrique, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants électriques qui en partent.

$$\sum i = 0 \xrightarrow{\text{implique}} \sum i_{\text{entrants}} = \sum i_{\text{sortants}}$$

$$i_1 + i_0 = i'_1 + i'_2 + i'_3 + i'_4$$

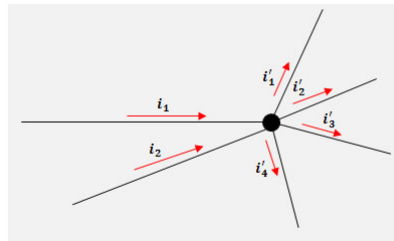


Figure 3-11: Un nœud du réseau électrique

3.9.3.2 Loi des mailles

Le long d'une maille, la variation du potentiel est nulle :

$$\sum \varepsilon = \sum e + i \cdot \sum r$$

Dans le circuit ci-après, on écrit :

$$V_A - V_A = 0 = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_F) + (V_F - V_A)$$

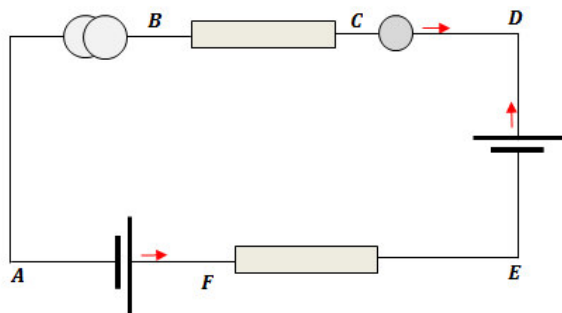


Figure 3-12: Exemple d'une maille électrique

3.9.3.3 Application à un réseau

Soit maintenant un réseau de mailles et de nœuds. Pour définir les courants qui circulent dans chaque branche, on commence par choisir un sens arbitraire de circulation du courant électrique dans chaque branche. Puis, on écrit les deux lois, des mailles et des nœuds

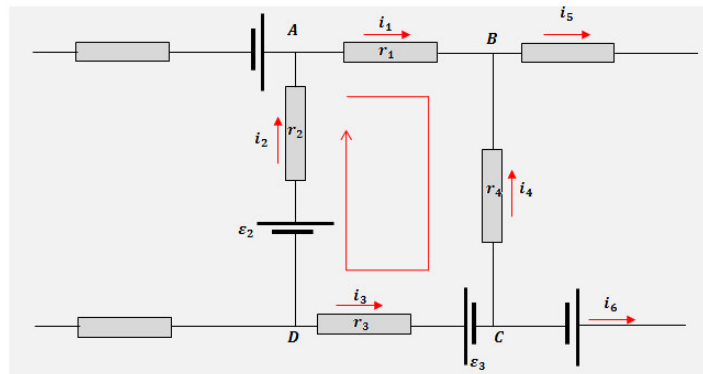


Figure 3-13: Une maille dans un réseau

Soit la portion du circuit de la figure ci-dessous,

La loi des mailles appliquée à la maille désignée par la flèche rouge s'écrit :

$$V_A - V_A = 0 = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_A)$$

Ce qui donne :

$$V_A - V_A = r_1 \cdot i_1 - r_4 \cdot i_4 - \varepsilon_3 - r_3 \cdot i_3 - \varepsilon_2 + r_2 \cdot i_2 = 0$$

La loi des nœuds nous donne :

Au nœud A :
$$i_5 = i_4 + i_1$$

Et au nœud B :
$$i_3 = i_4 + i_6$$

On choisit ainsi pour n courants n équations indépendantes et on résout un système à n équations avec n inconnues

3.9.4 Charge et décharge d'un condensateur

3.9.4.1 Charge d'un condensateur

Soit à charger un condensateur de capacité C par un générateur de d.d.p ε , à travers une résistance R (voir le circuit de la figure ci- après). Nous admettons que la relation $C = \frac{Q}{V}$ est vraie à chaque instant.

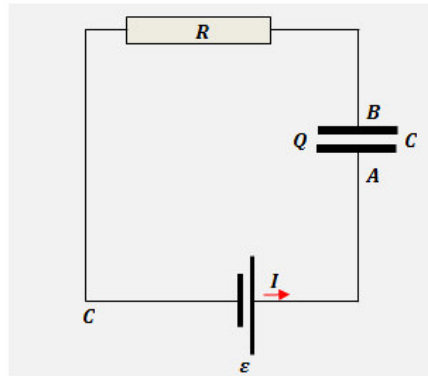


Figure 3-14: Circuit de charge d'un condensateur

Initialement, le condensateur est déchargé et la d.d.p $V_A - V_B$ à ses bornes est nulle. Au fur et à mesure que le condensateur se charge, la charge Q portée par l'une ou l'autre de ses armatures augmente. Une d.d.p $V = V_A - V_B = \frac{Q}{C}$ apparaît donc entre ses bornes, ce qui se traduit par un courant dans le circuit, c'est le courant de charge.

Du fait du diélectrique entre les armatures, les charges cumulées ne peuvent traverser le condensateur, et ainsi, la condensation se poursuit jusqu'à ce que $V_A - V_B$ compense la tension ε du générateur ; c'est à ce moment là que le courant s'annule.

On écrit la loi des mailles :

$$V_A - V_A = 0 = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A)$$

Ce qui donne :

$$\frac{Q}{C} + R \cdot I - \varepsilon = 0$$

Comme $i = \frac{dQ}{dt}$, l'équation de la maille suivante devient :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q = \varepsilon$$

Une équation différentielle de premier ordre à variables séparées et avec second membre, elle admet dans les conditions initiales

$$\begin{cases} \text{à } t = 0 & Q = 0 \\ \text{à } t = \infty & Q = Q_0 = C\varepsilon \end{cases}$$

Donnée par :

$$Q = C \cdot \varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{R.C}})$$

Et le courant à tout instant est donnée par

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R.C}} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Où $\tau = R \cdot C$.

A tout instant de la charge, le courant est donné par la pente de la tangente.

Le terme $\tau = R \cdot C$ a la dimension d'un temps, on l'appelle 'constante de temps' du circuit et caractérise la vitesse de charge. Elle peut être déterminée expérimentalement :

D'après la solution de l'équation différentielle :

$$V(t) = \frac{Q}{C} = \varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

A l'instant $t = \tau$ on $V = \varepsilon (1 - e^{-1}) = 0.63 \cdot \varepsilon$

Sur le graphe $V(t) = f(t)$, on détermine l'abscisse du point d'ordonné $0.63 \cdot \varepsilon$ qui correspond à τ .

Pour $t = 5 \cdot \tau$, la charge du condensateur atteint 99% de sa valeur finale et la charge totale ne sera jamais atteinte.

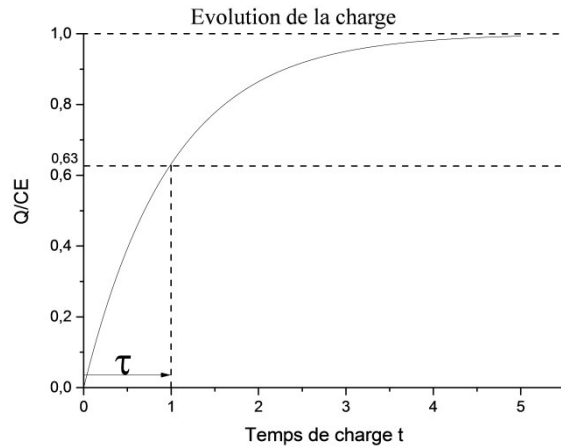


Figure 3-15: Profil de charge d'un condensateur

3.9.4.2 Décharge du condensateur

Notre condensateur étant maintenant chargé, on court-circuite le générateur. On obtient alors le circuit suivant où le condensateur se décharge sur la résistance R .

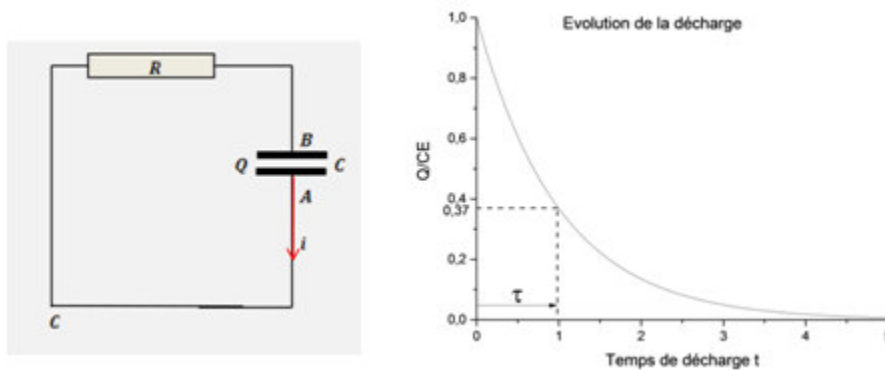


Figure 3-16 : Circuit et profil de décharge d'un condensateur

CHAPITRE CINQ

4 Electromagnétisme

4.1 Introduction

Le champ magnétique est une grandeur physique vectorielle. Sa présence se traduit par l'existence d'une force agissant sur les charges électriques en mouvement. Les premières manifestations magnétiques viennent des aimants naturels qui, en créant un champ magnétique permettent d'attirer des objets ferreux.

4.2 Action d'un champ magnétique sur une particule chargée en mouvement

4.2.1 Force de Lorentz

Une charge électrique soumise à un champ électromagnétique subit une force dite de **LORENTZ** constituée de deux contributions :

La première est électrique et vaut : $\vec{f}_e = q \cdot \vec{E}$.

La seconde est magnétique : $\vec{f}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

La force de Lorentz s'écrit alors : $\vec{F}_{Lorentz} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

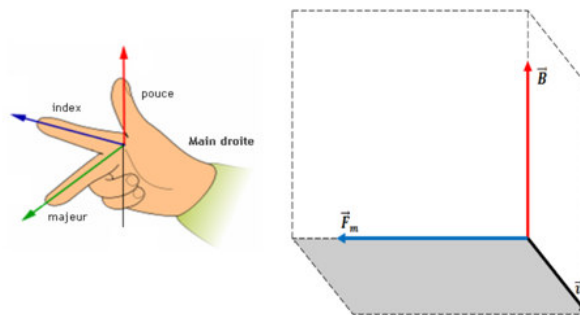


Figure 4-1: Trièdre direct de Laplace

$$\text{En termes de dimension : } [B] = \frac{[f_m]}{[q][v]} = \frac{M.L.T^{-2}}{I.T.L.T^{-1}} = M.I^{-1}.T^{-2}$$

Dans le système S.I, B s'exprime en $\text{Kg}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$. De cette analyse, on voit que le champ électrique est important dans la création du champ magnétique. On utilise communément le Tesla(T). Voici quelques ordres de grandeurs du champ magnétique :

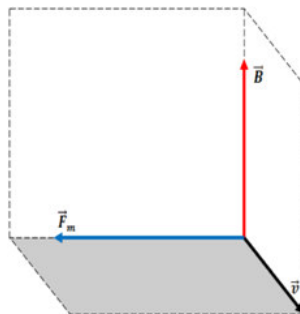
- Le champ magnétique terrestre : $47 \cdot 10^{-6} \text{ T}$
- Aimant permanent : 0.1 T
- Electroaimant : 10 T .

4.2.2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, c'est-à-dire de même intensité et de même direction en tout point de l'espace. Prenons à cet effet un champ $\vec{B}(0,0,B)$ dans la

direction OZ du repère orthonormé (O, X, Y, Z) et soit maintenant la particule se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ dans le plan (OXY) .

La particule subit alors la force magnétique: $\vec{f}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

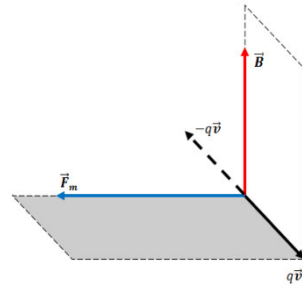


Cette force est perpendiculaire à la vitesse, son rôle est de changer la direction de la vitesse instantanément sans pour autant changer sa grandeur. Et par conséquent, le mouvement est circulaire uniforme.

Le mouvement étant circulaire, la force est centrifuge :

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \quad \text{d'où} \quad \frac{m \cdot v}{R} = q \cdot B$$

Le rayon du cercle est donné par $R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$ et la vitesse angulaire par : $\omega = \left(\frac{q}{m}\right) \cdot B$



4.2.3 Force magnétique agissant sur un courant électrique, Force de LAPLACE

Par définition, l'intensité du courant est la charge par unité de temps traversant une section droite d'un conducteur.

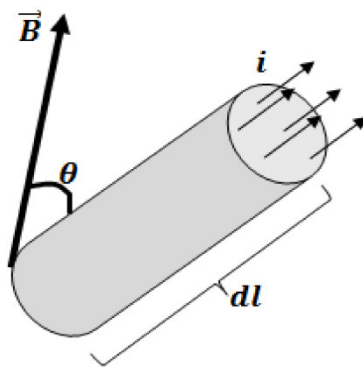


Figure 4-2: Force magnétique agissant sur un courant électrique

Si n est la densité de charges, c'est-à-dire le nombre de charges q contenues dans un volume unitaire, alors :

$\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{v}$ où v est la vitesse de déplacement des charges q dans le conducteur.

Le courant total à travers une surface droite S et $I = s \cdot J = n \cdot S \cdot q \cdot v$

Si maintenant, le conducteur est placé dans un champ magnétique \vec{B} (voir la figure), la force subit par unité de volume est donnée par :

$$\vec{f} = m \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot \vec{J} \times \vec{B}$$

Pour un élément de longueur dl on aura :

$$\vec{dF} = \vec{f} \cdot (S \cdot dl) = m \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \cdot \vec{dl} \times \vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par \vec{dl} et \vec{B} , son module est donné par :

$$dF = \|\vec{dF}\| = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin\theta$$

Un circuit réel de longueur fini dans un champ magnétique \vec{B} subit la force $\vec{F} = \int dF$ pris sur tout le contour.

4.2.4 Champ magnétique crée par un courant, loi de BIOT et SAVART

Le champ magnétique produit par un courant électrique dépend de la géométrie du circuit, de l'intensité du courant qui le parcourt et de la distance au point considéré.

Un élément de longueur \vec{dl} parcouru par un courant I crée en tout point M repéré par \vec{r} un champ magnétique \vec{dB} . Le champ magnétique total crée est donné par la loi de Biot et Savart suivante :

$$\vec{B} = \int \vec{dB} = K_m \int \frac{I \cdot \vec{dl} \times \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = K_m \int \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

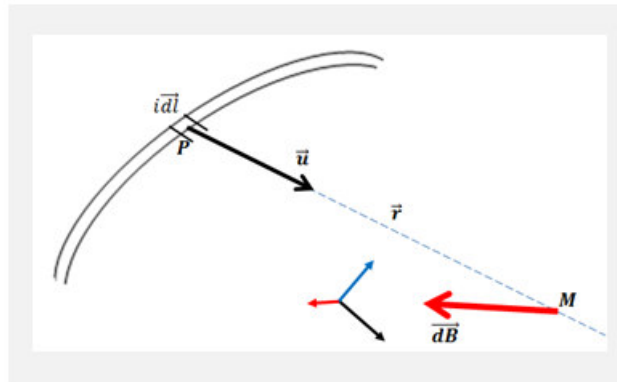


Figure 4-3: Champ magnétique crée par un courant électrique

K_m est une constante qui dépend du système d'unités, dans le système d'unité international S.I, la constante K_m est donnée par :

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}. \text{ OÙ } \mu_0 \text{ est la perméabilité magnétique du vide. } k_m = 10^{-7} \text{ S. I}$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

Cette formule est connue sous le nom de la formule de Biot et Savart, deux physiciens Français du 19^{ème} siècle.

Le champ \vec{B} dépend du courant I et du circuit C, c'est un champ axial défini à partir d'un produit vectoriel. $(I\vec{dl}, \vec{u}, \vec{B})$ un trièdre direct.

Pour un ensemble de circuits, le champ total produit est la somme des champs créés par chaque circuit.

Application : Champ magnétique crée par une boucle de rayon R parcouru par un courant I :

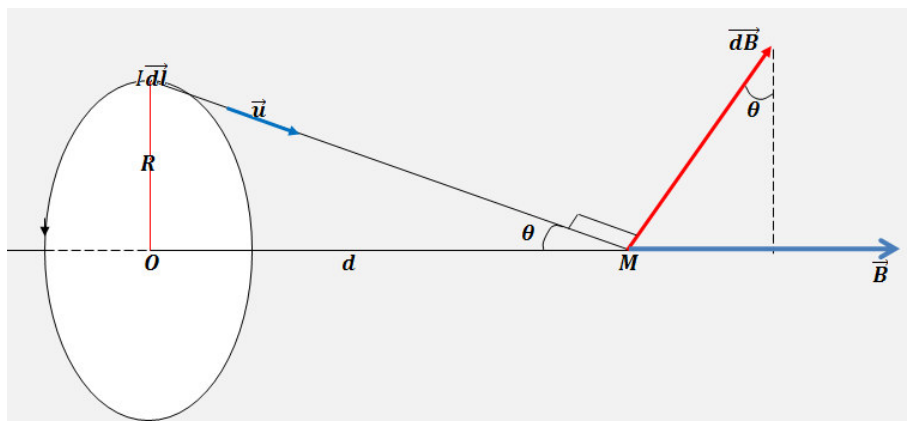


Figure 4-4: Champ magnétique d'une boucle de courant

Soit à calculer le champ magnétique crée par une spire de rayon R parcouru par un courant I en un point de son axe à une distance d du centre de la spire. Pour des raisons de symétrie et parce que $(I\vec{dl}, \vec{u}, \vec{B})$ est un trièdre direct, alors le champ \vec{B} ne peut être que suivant l'axe de la spire :

$$\vec{B} = B \cdot \vec{i}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{dl}{r^2} \cdot \sin\theta$$

$B = \int dB_x$, pris pour toute la couronne.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \int dl, \text{ avec } r^2 = R^2 + d^2$$

Ce qui donne $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot 2\pi \cdot R$, or, $\sin\theta = \frac{R}{r}$.

Alors B devient $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta^3 / R$.

Finalement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta^3}{R} \cdot \vec{i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2}{r^3} \cdot \vec{i}$$

4.2.5 Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'énonce comme suit : « la circulation de \vec{B} le long d'une courbe fermée C quelconque, orientée et fermée, appelé contour d'Ampère, est égale μ_0 fois la somme algébrique des courants traversant la surface délimitée par le contour C.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 \cdot \sum I$$

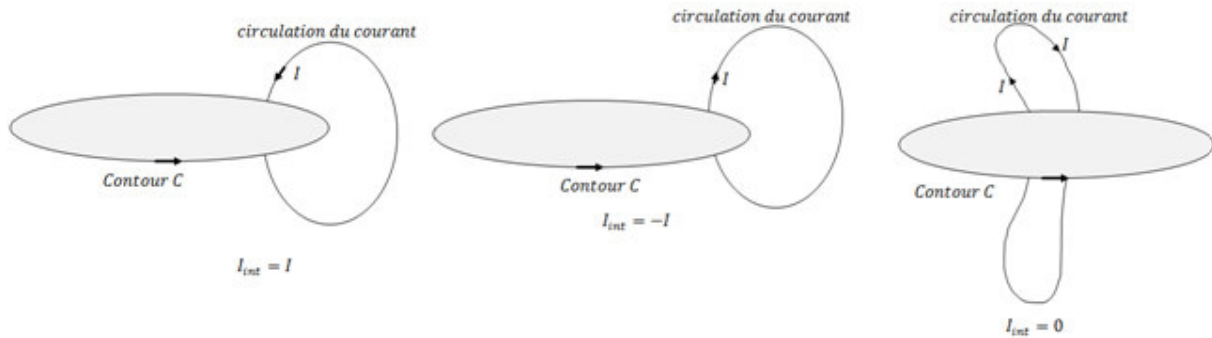


Figure 4-5: Illustration du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est l'équivalent du théorème de Gauss en électrostatique.

Remarques :

- Le courant électrique est l'origine du théorème d'Ampère et de la formule de Biot et Savart.

- Le choix du sens du contour C est arbitraire, seul compte, la somme algébrique des courants le traversant.

Exemple : Le solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini, comportant N spires par unité de longueur parcouru par un courant I. Pour des raisons de symétrie, le champ magnétique est porté par l'axe du solénoïde.

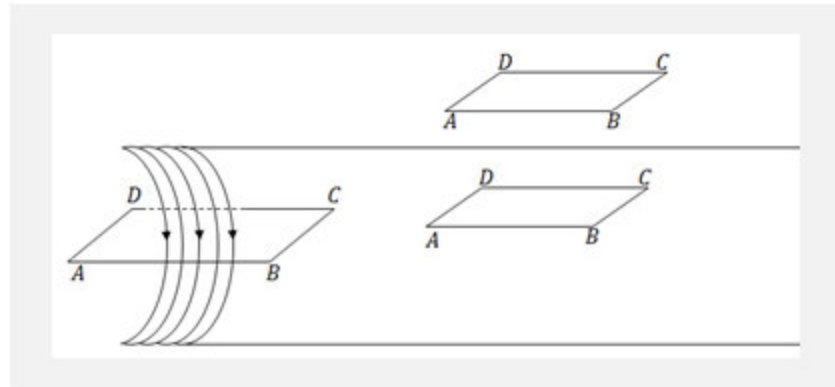


Figure 4-6: Solénoïde infini

Soit maintenant à considérer un contour d'Ampère rectangulaire, trois cas sont envisagés :

- Premier cas : le contour (C) est loin du solénoïde

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \cdot \vec{AB} + \vec{B} \cdot \vec{BC} + \vec{B} \cdot \vec{CD} + \vec{B} \cdot \vec{DA} = 0$$

- Deuxième cas : le contour est à l'intérieur du solénoïde et aucun courant ne le traverse. On obtient le même résultat :

$$\sum I = 0 \text{ ce qui donne une circulation nulle } \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

- Troisième cas : le contour est traversé par N spires et donc par N courants. Alors :

$$B = \mu_0 \cdot NI.$$

4.2.6 Dipôle magnétique et lignes de champ

Nous avons vu que le champ magnétique crée par une boucle de courant I en un point M sur son axe est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \frac{R^2}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{t}$$

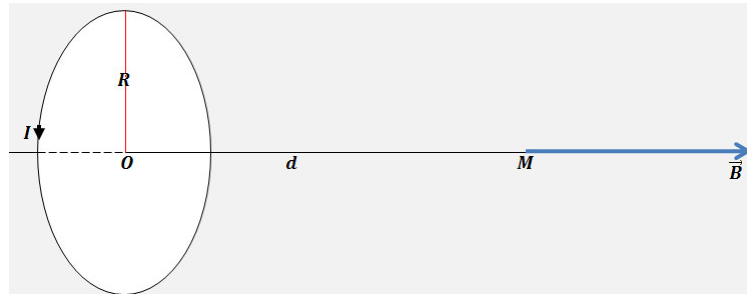


Figure 4-7: Champ magnétique d'une boucle de courant

Par définition, le moment magnétique dipolaire du circuit est \vec{M} tel que $M = S \cdot I = \pi \cdot R^2 \cdot I$, et l'expression précédente de \vec{B} devient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \frac{\vec{M}}{(d^2 + R^2)^{3/2}}$$

Si maintenant le circuit est très petit, de sorte à avoir $R \ll d$, alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}}{R^3}$$

En analogie parfaite avec le dipôle électrique (revoir le cours sur les dipôles électriques):

$$\vec{E} = \frac{2k \cdot \vec{P}}{R^3}$$

C'est pourquoi, ce circuit est appelé dipôle magnétique

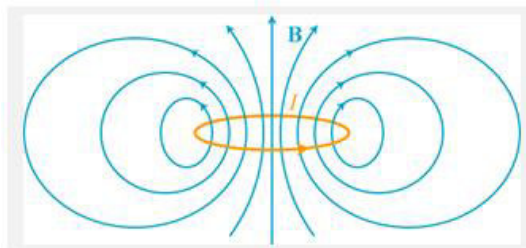


Figure 4-8 : Dipôle magnétique d'après skullinthe stars.com

Les lignes de champ sont semblables à celles du dipôle électrique à l'exception que les lignes sont des courbes fermées, elles entrent par le pôle nord et rentrent par le pôle sud, alors que pour le dipôle électrique, les lignes de champ partent des charges positives vers les charges négatives. Il est à noter qu'on ne peut pas séparer les pôles du dipôle magnétique.

4.3 Flux magnétique

4.3.1 Flux du champ magnétique à travers une surface fermée

Le flux du champ magnétique \vec{B} à travers une surface fermée quelconque est donnée par :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Le flux de B à travers toute surface fermée est nul.

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

Ceci est le fait qu'un aimant ou une bobine n'est qu'une juxtaposition de dipôles magnétiques. Ceci dit que le flux entrant à travers une surface fermée est égal au flux sortant à travers la même surface.

4.3.2 Flux du champ à travers un contour

Soit C un contour fermé sur lequel s'appuie une surface $S = S_1 + S_2$, on a alors :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

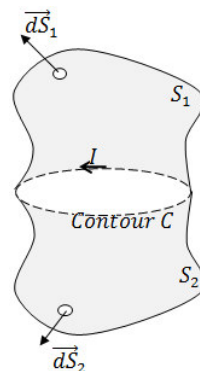


Figure 4-9: Deux surfaces s'appuyant sur un même contour

Ce qui donne : $\Phi_{S1} = -\Phi_{S2}$.

Le signe (-) est lié à l'orientation de la surface.

4.3.3 Induction magnétique

4.3.3.1 Mise en évidence des courants induits

L'expérience montre que lorsqu'une bobine est placée au voisinage d'un aimant permanent, et que le tout est figé, un galvanomètre n'indique aucun passage de courant. Mais, lorsqu'on approche ou on éloigne la bobine et l'aimant l'un de l'autre, un courant dit induit est indiqué par le galvanomètre. Un courant induit apparaît également lorsque la forme ou l'orientation de la bobine changent.

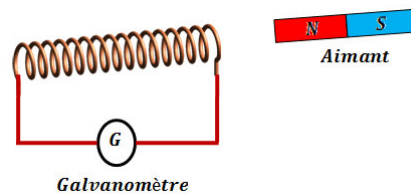


Figure 4-10: Mise en évidence des courants induits

4.3.3.2 Loi de Faraday

Lorsqu'un courant induit apparaît dans un circuit, tout se passe comme si ce circuit était le siège d'une force électromotrice, que l'on appelle « force électromotrice d'induction ». La loi de Faraday dit : « la force électromotrice d'induction 'e' est égale et opposée à la vitesse de variation du flux du vecteur induction à travers le contour du circuit »

On écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le signe de 'e', qui est conditionné par le sens du courant induit s'obtient de la manière suivante :

- On oriente arbitrairement le contour du circuit.
- On mesure algébriquement $d\Phi$ selon les conventions suivantes :
Si 'e' est positif le courant circule dans le sens arbitraire choisi
Sinon dans le sens contraire.

Références utiles

1. Physique générale. Tome1, Mécanique, électricité. Renaud. Michel Silhouette. Dominnique Fourme. Paris ; Montréal : Etudes Vivantes, 1979.
2. Electricité et Ondes. J.L. Caubarrere. J. Fourny ; H. Ladjouz. O.P.U. 2002.
3. Physique générale. Tome II, Champs et ondes.

Liste des figures

Figure 1-1 : Deux vecteurs équivalents	5
Figure 1-2 : Un vecteur dans un espace Euclidien	6
Figure 1-3: Vecteur issu d'un produit vectoriel	7
Figure 1-4: Elément de surface cartésien	11
Figure 1-5:Elément de volume cartésien.....	11
Figure 1-6: Système de coordonnées cylindriques	11
Figure 1-7: Elément de surface cylindrique	12
Figure 1-8: Elément de volume cylindrique.....	13
Figure 1-9: Système de coordonnées sphériques.....	13
Figure 1-10: Elément de longueur, de surface et de volume sphérique.....	15
Figure 2-1:Représentation schématique d'un atome.....	18
Figure 2-2: Schémas d'un atome, d'une molécule et d'un solide cristallin	20
Figure 2-3: Electrification par contact 1	21
Figure 2-4: Electrification par contact 2	22
Figure 2-5: Electrification par contact 3	22
Figure 2-6: Répulsion entre deux charges de même signes.....	24
Figure 2-7: Attraction entre deux charges de signes opposés	25
Figure 2-8: Champ, potentiel et Force de deux charges en un point M.....	28
Figure 2-9: Superposition de deux champs électriques.....	29
Figure 2-10: Circulation du champ électrique entre deux points	29
Figure 2-11: Lignes de champs et surfaces équipotentielles	31
Figure 2-12: Lignes de champs et équipotentielles de deux charge adjacentes	32
Figure 2-13: Champ et potentiel d'une distribution linéique de charges	33
Figure 2-14: Champ et potentiel électrique d'une distribution surfacique de charges.....	33
Figure 2-15: Champ et potentiel électrique d'une distribution volumique de charges	33
Figure 2-16: Une ligne de champ perpendiculaire à une surface équipotentielle.....	35
Figure 2-17: Le potentiel le long d'une ligne de champ	36
Figure 2-18: Deux équipotentielles dans un champ variable	36
Figure 2-19: Champ crée par un segment chargé.....	39
Figure 2-20:Champ crée par un disque uniformément chargé en un point sur son axe de révolution ..	41
Figure 2-21: Travail d'une force électrostatique dans un champ électrique	44
Figure 2-22:Energie interne d'une distribution de charges.....	45
Figure 2-23: Schéma d'un dipôle électrique	47
Figure 2-24: Champ électrique d'un dipôle	48
Figure 2-25: Dipôle électrique dans un champ électrique.....	49
Figure 2-26: Alignement du dipôle électrique.....	50
Figure 2-27: Energie potentielle d'un dipôle électrique	50
Figure 2-28: Surfaces concave et convexe	51
Figure 2-29: Orientation d'une surface géométrique	52
Figure 2-30: Surface fermée s'appuyant sur un contour	52
Figure 2-31: Angle Plan	52
Figure 2-32: Cas d'angles Plans.....	53
Figure 2-33: Angle solide.....	53
Figure 2-34: Exemple d'un angle solide	54
Figure 2-35: Flux du champ E à travers une surface orientée	55

Figure 2-36: Une sphère creuse chargée e volume.....	56
Figure 2-37: Symétrie cylindrique d'un fil uniformément chargé	58
Figure 2-38: Un disque uniformément chargé en surface	59
Figure 2-39: Champ électrique au voisinage d'une surface.....	63
Figure 2-40: Profil du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur	64
Figure 2-41: Pouvoir des pointes.....	65
Figure 2-42: Influence d'un conducteur neutre et isolé	67
Figure 2-43: conducteur maintenu à un potentiel constant.....	68
Figure 2-44: Influence retour.....	69
Figure 2-45: Influence totale	69
Figure 2-46: Cage de Faraday	70
Figure 2-47:Un condensateur sphérique.....	71
Figure 2-48: Conducteurs en regard.....	72
Figure 2-49: Deux conducteurs en regard	73
Figure 2-50: Condensateur cylindrique	74
Figure 2-51: Trois condensateurs en parallèle.....	76
Figure 2-52: Trois condensateurs en série.....	77
Figure 3-1: Origine du courant électrique	78
Figure 3-2: Densité de courant	79
Figure 3-3: Courant à travers un conducteur	80
Figure 3-4: Résistance d'un conducteur	81
Figure 3-5: Des résistances en série	83
Figure 3-6: Trois résistances en parallèle.....	83
Figure 3-7: Une résistance aux bornes d'un générateur	84
Figure 3-8: Symbole d'un générateur	85
Figure 3-9: Trois générateurs en série	86
Figure 3-10: Schéma électrique d'un récepteur	87
Figure 3-11: Un nœud du réseau électrique	89
Figure 3-12: Exemple d'une maille électrique.....	89
Figure 3-13: Une maille dans un réseau	90
Figure 3-14: Circuit de charge d'un condensateur	91
Figure 3-15: Profil de charge d'un condensateur	93
Figure 4-1: Trièdre direct de Laplace.....	94
Figure 4-2: Force magnétique agissant sur un courant électrique	96
Figure 4-3:Champ magnétique crée par un courant électrique.....	97
Figure 4-4: Champ magnétique d'une boucle de courant	98
Figure 4-5: Illustration du théorème d'Ampère	99
Figure 4-6: Solénoïde infini	100
Figure 4-7: Champ magnétique d'ue boucle de courant	101
Figure 4-8 : Dipôle magnétique d'après skullinthe stars.com.....	101
Figure 4-9: Deux surfaces s'appuyant sur un même contour.....	102
Figure 4-10: Mise en évidence des courants induits.....	103