Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Logiques et méthodes du raisonnement mathématiques

1.1 Logiques mathématiques

1.1.1 Proposition

Définition 1.1. Une **proposition** est une phrase formelle, mathématique, ... etc, à la quelle on peut attribuer une valeur de vérité soit **vraie**, soit **fausse**.

Exemple 1.1.

▶ *Le 01 Octobre 2019 était un Mardi. (vraie)*
▶ *Toutes les voitures rapides sont rouges. (fausse)*
▶ *Je suis plus grand que toi. (.......)*
▶ $2+3=9$. *(fausse)*
▶ 4 *est un multiple de* 2. *(vraie)*
▶ 4 *est un multiple de* 3. *(fausse)*
▶ $2 \times 3>9$. *(fausse)*

Remarque 1.1. Chaque proposition P admet une négation notée $\overline{P}$ qui est :

vraie lorsque P fausse
fausse lorsque P vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

TABLE 1 – Table de vérité pour la négation de $\overline{P}$

Exemple 1.2.

▶ *La négation de "Cette voiture est rapide" est "Cette voiture n'est pas rapide".*
▶ *La négation de* "$2+3=9$" *est* "$2+3 \neq 9$".
▶ *La négation de* "4 *est un multiple de* 2" *est* "4 *n'est pas un multiple de* 2".
▶ *La négation de* "$2 \times 3>9$" *est* "$2 \times 3 \leq 9$".

1.1.2 Connecteur logique

Si P est une assertion (propostion) et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q :

a. L'opérateur logique "et" (conjonction)

La proposition "P et Q" (on note $P \wedge Q$) est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition "P et Q" est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité 2 :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 2 – Table de vérité de "$P \wedge Q$"

Exemple 1.3.

- *"4 est un multiple de 2" et "9 est un multiple de 3". (vraie)*
- *"$2 \times 3 > 9$ " et "$2 \times 3 \leq 9$". (fausse)*
- *"$P \wedge \overline{P}$" est toujours fausse.*

b. L'opérateur logique "ou" (disjonction)

La proposition "P ou Q" (on note "$P \vee Q$") est vraie si l'une (au moins) des deux propositions P ou Q est vraie. La proposition "P ou Q" est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité 3 :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table 3 – Table de vérité de "$P \vee Q$"

Exemple 1.4.

- *" 9 est un multiple de 2" ou "4 est un multiple de 3". (fausse)*
- *" 4 est un multiple de 2" ou "4 est un multiple de 3". (vraie)*
- *"$2 \times 3 > 9$ " ou "$2 \times 3 \leq 9$". (vraie)*
- *"$P \vee \overline{P}$" est toujours vraie.*

c. L'implication "$\Rightarrow$"

La définition mathématique est la suivante :

La proposition "$\overline{P}$ ou Q" est notée "$P \Rightarrow Q$".

Sa table de vérité 4 est donc la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 4 – Table de vérité de "$P \Rightarrow Q$"

La proposition "$P \Rightarrow Q$" se lit en français "P implique Q" ou "si P alors Q".

Exemple 1.5.

- *"$2+2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$" est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors la proposition "$P \Rightarrow Q$" est toujours vraie.*

d. L'équivalence "$\Leftrightarrow$"

L'équivalence est définie par :

"$P \Leftrightarrow Q$" est la proposition "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow p$".

On dira "P est équivalent à Q" ou "P équivaut à Q" ou "P si et seulement si Q. Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité 5 est :

P	V	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 5 – Table de vérité de "$P \Leftrightarrow Q$"

Exemple 1.6.

▶ *"$P \Leftrightarrow \overline{P}$" est une équivalence toujours fausse (quelle que soit la proposition P).*

1.1.3 Quelques proprietés

Soient P, Q et R trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
2. $(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$
3. $(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$
4. $(\overline{PetQ}) \Leftrightarrow (\overline{P}ou\overline{Q})$
5. $(\overline{PouQ}) \Leftrightarrow (\overline{P}et\overline{Q})$
6. $(Pet(QouR)) \Leftrightarrow ((PetQ)ou(PetR))$
7. $(Pou(QetR)) \Leftrightarrow ((PouQ)et(PouR))$
8. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

1.1.4 Quantificateurs

a. Le quantificateur $\forall$: "pour tout"

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple "$x^4 \geq 2$", la proposition $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.
La proposition

$$\forall x \in \mathbb{E}, \;\; P(x)$$

est vraie lorsque les propositions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble $\mathbb{E}$.
On lit "pour tout x appartenant à $\mathbb{E}$, $P(x)$", plus simple "pour tout x appartenant à $\mathbb{E}$, $P(x)$ est vraie".

Exemple 1.7.

▶ *"$\forall n \in \mathbb{N}$, n est paire" est une proposition fausse.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$" est une proposition fausse.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$" est une proposition vraie.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$" est une proposition fausse.*

b. Le quantificateur $\exists$: "il existe"

La proposition

$$\exists x \in \mathbb{E}, \;\; P(x)$$

est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de $\mathbb{E}$ pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit "il existe x appartenant à $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ (soit vraie)".

Exemple 1.8.

▶ *"$\exists n \in \mathbb{N}$, $n+2$ est impaire" est une proposition vraie.*
▶ *"$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 2n$" est vraie car il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que la proposition est vraie).*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x+1 \geq 0$" est vraie car par exemple $x = 1$ vérifie bien la propriété).*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = -1$" est une proposition fausse puisque aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 1$" est une proposition vraie car on prend par exemple $x = 1$ ou $x = -1$.*

c. La négation des quantificateurs

La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$" est "$\exists x \in \mathbb{R}$, $\overline{P(x)}$".

Exemple 1.9.

▶ *La négation de*

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \ x^2 \geq 1$$

est

$$\exists x \in [1, +\infty[,\ \ x^2 < 1.$$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) (ou $\overline{x^2 \geq 1}$) mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

La négation de "$\exists x \in \mathbb{R}$, $P(x)$" est "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{P(x)}$".

Exemple 1.10.

▶ *La négation de*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 = 0$$

est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 \neq 0.$$

Remarque 1.2. L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0. \text{ et } \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$$

sont différentes.
On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie "Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone",

bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : "Il existe un numéro, pour toutes les personnes". Ce serait le même numéro pour tout le monde !

1.2 Méthodes du raisonnement mathématiques

1.2.1 Raisonnement direct

On veut démontrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie. Donc on suppose que P est vraie et on cherche est ce que Q est vraie.

Exemple 1.11.

▶ *Montrer que "$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$" est vraie.*
On suppose que "$x^2 - 4 = 0$" est vraie. Est ce que c'est vraie pour "$x = 2$ ou $x = -2$" ?
On a "$x^2 - 4 = 0$ puis "$(x-2)(x+2) = 0$ qui donne "$(x-2) = 0$ ou $(x+2) = 0$" à la fin on obtient $x = 2$ ou $x = -2$" donc c'est vraie.

1.2.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$\text{La proposition "}p \Rightarrow Q\text{" est équivalent à "}\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\text{".}$$

Donc si l'on souhaite montrer la proposition "$p \Rightarrow Q$", on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.12.

▶ *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair).*
La contraposée de la proposition (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair) est (n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair).
Comme n n'est pas pair, il es impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Puis

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$$

avec $l = k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ et donc n^2 est impair.
A la fin : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.
▶ *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que "$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$".*
La contraposée de la proposition

$$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$$

est

$$x \geq 2 \Rightarrow x^3 \neq 2.$$

On a $x \geq 2$ *et puis* $x^3 \geq 2^3 = 8 > 2$, *donc* $x^3 \neq 2$, *ce qui prouve la contraposée.*
▶ *Montrer que si* x *et* y *sont des réels distincts de 1, et si* $x \neq y$, *alors* $\frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y}$.
La contraposée de la proposition

$$x \neq y \Rightarrow \frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y}$$

est

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow x = y$$

avec x *et* y *sont des réels distincts de 1.*
C'est vrai, car

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1-x = 1-y \Rightarrow x = y.$$

▶ *Soient* x, y *de* $\mathbb{R}$. *Montrer que*

$$x \neq -3 \ \textit{et} \ y \neq -1 \Rightarrow x + 3y + xy + 6 \neq 3.$$

La contraposée de la proposition

$$x \neq -3 \ \textit{et} \ y \neq -1 \Rightarrow x + 3y + xy + 6 \neq 3$$

est

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \ \textit{ou} \ y = -1.$$

On a

$$\begin{aligned} x + 3y + xy + 6 = 3 &\Rightarrow x + y(3 + x) + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x)(y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x) = 0 \ \textit{ou} \ (y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = -3 \ \textit{ou} \ y = -1. \end{aligned}$$

Donc c'est vraie.

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. Le raisonement consiste à supposer qu'elle est fausse (c'est-à-dire ($\overline{P}$ est vraie).

Ou encore le raisonnement par l'absurde pour montrer "$P \Rightarrow Q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \Rightarrow Q$" est vraie.

Exemple 1.13.

▶ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer par l'absurde que* $\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1$.
On suppose que $\exists n \in \mathbb{N}$, *tel que* $\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1$. *On a*

$$\begin{aligned} \frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1 &\Rightarrow 6n+3 > (n+2)^2 \\ &\Rightarrow 6n+3 > n^2+4n+4 \\ &\Rightarrow 0 > n^2-2n+1 \\ &\Rightarrow (n-1)^2 < 0, \textit{ impossible} \end{aligned}$$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1$ *est vraie.*
▶ *Soient* x, y *de* $\mathbb{R}$. *Montrer par l'absurde que*

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \textit{ ou } y = -1.$$

On suppose que "$x + 3y + xy + 6 = 3$" *et on montre le contraire de* "$x = -3$ *ou* $y = -1$" *c'est-à-dire* "$x \neq -3$ *et* $y \neq -1$".
On a

$$\begin{aligned} x + 3y + xy + 6 = 3 &\Rightarrow x + y(3 + x) + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x)(y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x) = 0 \textit{ ou } (y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = -3 \textit{ ou } y = -1, \end{aligned}$$

Contradiction avec "$x \neq -3$ *et* $y \neq -1$". *donc la proposition*

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \textit{ ou } y = -1$$

est vraie.

1.2.4 Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type

$$\forall x \in \mathbb{E},\ P(x)$$

est fausse, alors il suffit de trouver $x \in \mathbb{E}$ tel que $P(x)$ soit fausse.
Trouver un tel x c'est trouvé un contre-exemple à la proposition "$\forall x \in \mathbb{E},\ P(x)$".

Exemple 1.14.

▶ *Soit la proposition suisvante :*

$$"\forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}",$$

est une proposition fausse car $n = 3$ est impair (n=3 est un contre exemple)

1.2.5 Raisonnement par récurrence

On donne un nom, par exemple $P(n)$ à la propiété (c'est-à-dire la formulle) qu'on veux démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq k (k \geq 0)$, on procède en trois étapes :
Etape 1 (initialisation) : on montre que la propriété $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $P(n)$ est vraie pour $n = k$ (valeur initiale de l'ensemble).
Etape 2 (.....) : on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie aussi ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie).
Etape 3 (Conclusion) : on rédige alors, on a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemple 1.15.

▶ *Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n) : \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

$$\text{On a } \textstyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 \text{ et } \frac{0(0+1)}{2} = 0. \text{ Donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= (\sum_{k=0}^{n} k) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{......} parcequeP(n)estvraie\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

$P(n+1)$ *est donc vraie.*
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
▶ *Montrez par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$*. On note* P *la propriété portant sur* n

$$P(n): \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$*,* $P(n)$ *est vraie.*
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ *est vraie.*

On a $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ *et* $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$*. Donc* $P(0)$ *est vraie.*

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$*. Supposons* $P(n)$ *vraie et montrons alors que* $P(n+1)$ *est vraie.*
Pour que $P(n+1)$ *soit vraie il faut démontrer que*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (\sum_{k=0}^{n} k^2) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ ...... } parceque P(n) est vraie \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
► *Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^4}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

On a $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= (\sum_{k=0}^{n} k^3) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \ldots\ldots parceque P(n) est vraie \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
► *Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* (\forall n \geq 1)$*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(1)$ est vraie.

On a $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \;...... parceque P(n) est vraie \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)}{(n+2)}.
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ *Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \geq 0$),*

$$3^{2n} - 1 \text{ est un multiple de 8.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \exists k \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 1 = 8k.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

On a $3^{2\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 8k$. Donc il existe $k = 0$ pour que $P(0)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\exists k' \in \mathbb{N},\ 3^{2n+2} - 1 = 8k'.$$

On a

$$\begin{aligned}
3^{2n} - 1 = 8k &\implies 3^2(3^{2n} - 1) = 3^2(8k) \\
&= 3^{2n+2} - 9 = 8(3^2 k) \\
&= 3^{2n+2} - 1 - 8 = 8(3^2 k) \\
&= 3^{2n+2} - 1 = 8(3^2 k) + 8 \\
&= 3^{2n+2} - 1 = 8(3^2 k + 1)
\end{aligned}$$

si on prend $k' = (3^2k+1)$ *on aura* $3^{2n+2} - 1 = 8k'$, *donc* $P(n+1)$ *est vraie.*
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
▶ *Montrez par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geq 2$

$$5^n \geq 4^n + 3^n.$$

Soit $n \geq 2$. *On note* P *la propriété portant sur* n

$$P(n): \quad 5^n \geq 4^n + 3^n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \geq 2$, $P(n)$ *est vraie.*
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(2)$ *est vraie.*

$$\textit{On a } 5^2 = 25 \geq 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25. \textit{ Donc } P(2) \textit{ est vraie.}$$

Etape 2 : Soit $n \geq 2$. *Supposons* $P(n)$ *vraie et montrons alors que* $P(n+1)$ *est vraie.*
Pour que $P(n+1)$ *soit vraie il faut démontrer que*

$$5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
5^n \geq 4^n + 3^n \quad &\Rightarrow \quad 5 \times (5^n \geq 4^n + 3^n) \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq 5 \times (4^n + 3^n) \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq (4+1)4^n + (3+2)3^n \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 4^n + 3^{n+1} + 2 \times 3^n \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1} + 4^n + 2 \times 3^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1} \\
&\Rightarrow \quad 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ *est donc vraie.*
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 2$.