Equations différentielles ordinaires (EDO)

Première partie : Notions fondamentales, existence et unicité des solutions

Chap 1 : Préliminaires :

Définition 1.1

On appelle équations différentielles, les équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables, ces équations comportant non seulement les fonctions elles mêmes, mais aussi leurs dérivées.

Si les fonctions inconnues dépendent de plusieurs variables, les équations sont dites aux dérivées partielles, dans le cas contraire, c'est à dire quand on considère des fonctions d'une seule variable indépendante, les équations sont appelées équations différentielles ordinaires.

Dans ce qui suit nous ne nous intéresserons qu'aux équations différentielles ordinaires ; et à chaque fois nous omettrons le mot ordinaire pour ne parler que d'équations différentielles.

Définition 1.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application définie sur un domaine D de l'espace $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.On appelle équation différentielle scalaire d'ordre n, une équation

$$f(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \qquad (I.1)$$

On appelle solution de cette équation, une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \phi(t)$ définie et $n-$fois dérivable sur **un intervalle** I, borné ou non, de $\mathbb{R}$ et telle que

$$a) \ \forall t \in I, \ (t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, ..., \frac{d^n\phi(t)}{dt^n}) \in D$$
$$b) \ \forall t \in I, \ f(t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, ..., \frac{d^n\phi(t)}{dt^n}) = 0$$

Définition 1.3

On dit que l'équation est sous forme normale (ou résolue par rapport à la dérivée d'ordre supérieur) si on peut l'écrire sous la forme suivante

$$\frac{d^n x}{dt^n} = g(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}) \qquad (I.2)$$

Définition 1.4

Soient $f_1, ..., f_d$, d fonctions $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ définies sur des domaines D_i de $\mathbb{R}^{1+(p+1)d}$.

On appelle système différentiel d'ordre p, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(t,x_1...x_d,\frac{dx_1}{dt},...,\frac{dx_d}{dt},...,\frac{d^px_1}{dt^p},...\frac{d^px_d}{dt^p})=0 \\ \qquad\qquad\qquad\text{.........................} \\ \qquad\qquad\text{..............................} \\ \qquad\qquad\text{....................................} \\ f_d(t,x_1...x_d,\frac{dx_1}{dt},...,\frac{dx_d}{dt},...,\frac{d^px_1}{dt^p},...\frac{d^px_d}{dt^p})=0 \end{array}\right. \qquad (I.3)$$

Une solution de $(I.3)$ est un ensemble de d fonctions $\phi_1,...\phi_d : I \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \phi_i(t)$ définies et $p-$fois dérivables sur un même intervalle I, borné ou non, de $\mathbb{R}$ et telles que

$$a)\ \forall i,\ \forall t\in I,\ (t,\phi_1(t),...,\phi_d(t),\frac{d\phi_1(t)}{dt},...,\frac{d\phi_d(t)}{dt},...,\frac{d^p\phi_1(t)}{dt^p},...\frac{d^p\phi_d(t)}{dt^p})\in D_i$$

$$b)\ \forall i,\ \forall t\in I,\ f_i(t,\phi_1(t),...,\phi_d(t),\frac{d\phi_1(t)}{dt},...,\frac{d\phi_d(t)}{dt},...,\frac{d^p\phi_1(t)}{dt^p},...\frac{d^p\phi_d(t)}{dt^p})=0$$

Remarque 1.5

La famille (f_i) $i = 1,...,d$ définie en fait une application f de $\mathbb{R}^{1+(p+1)d}$ dans $\mathbb{R}^d$; et une solution définie en fait sur I un vecteur $\phi(t)$ de composantes $\phi_i(t)$ $i = 1,...,d$; de sorte que $(I.3)$ peut s'écrire plus simplement

$$f(t,x,\frac{dx}{dt},...,\frac{d^px}{dt^p})=0 \qquad (I.3')$$

où $x \in \mathbb{R}^d$.

Quitte à considérer des vecteurs, on peut donc se contenter d'étudier une seule équation.

La proposition suivante montre qu'il suffit même d'étudier une équation du premier ordre.

Proposition 1.6

Toute équation différentielle scalaire d'ordre n est équivalente à une équation différentielle du premier ordre avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Soit (E) l'équation

$$f(t,x,\frac{dx}{dt},...,\frac{d^nx}{dt^n})=0 \qquad (E)$$

Posons $x_1 = x$, $x_2 = \dfrac{dx}{dt}$, ... , $x_n = \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ et soit (S) le système

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\
\dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\
\quad . \\
\quad . \\
\quad . \\
\dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\
f(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{dx_n}{dt}) = 0
\end{cases}
\qquad (S)
$$

Si $\phi(t)$ est une solution de (E), $\phi : I \to \mathbb{R}$, ϕ est $n-$fois dérivable et $(t, \phi(t), \dfrac{d\phi(t)}{dt}, ..., \dfrac{d^n\phi(t)}{dt^n}) \in D$, $\forall t \in I$.

Si on pose $\phi_1(t) = \phi(t)$, $\phi_2(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$, ... , $\phi_n(t) = \dfrac{d\phi_{n-1}}{dt}$, le vecteur $(\phi_1(t), ...\phi_n(t))$ est évidemment solution de (S).

Réciproquement, si $(\psi_1(t), ...\psi_n(t))$ est une solution de (S) et si on pose $\psi(t) = \psi_1(t)$ alors $\psi(t)$ est une solution de (E).

Nous nous intéresserons aux équations sous forme normale et nous étudierons donc les équations $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ où $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (Ω ouvert).

définition 1.7

Soit $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$, une équation différentielle où $x \in \mathbb{R}^n$,

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et ϕ une solution définie sur un intervalle I.

ie ; ϕ est une fonction, $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ et telle que $\dfrac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I$.

a) On appelle **courbe intégrale (**ou trajectoire de ϕ) l'ensemble des points $(t, \phi(t))$ où t parcourt I, c'est un ensemble de points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

b) L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ où sont définies les courbes intégrales s'appelle **espace des phases élargi.**

c) On appelle **orbite** l'ensemble des points $\phi(t)$, où t parcourt I, c'est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$.

d) L'ensemble $\mathbb{R}^n$ où les solutions prennent leurs valeurs s'appelle **espace des phases.**

Exemple

Soit l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \tag{1.4}$$

où $x \in \mathbb{R}$.

En posant $x_1 = x$, $x_2 = \dfrac{dx}{dt}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ l'équation $(I.4)$ est équivalente au système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases} \qquad (I.5)$$

ou $\dfrac{dX}{dt} = f(X)$, avec $f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.

Les solutions de $(I.5)$ sont $X(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}$, (les solutions de $(I.4)$ sont $x(t) = A \sin t + B \cos t$).

Les courbes intégrales sont des courbes de $\mathbb{R}^3$, les orbites, des courbes de $\mathbb{R}^2$, projections des courbes intégrales.

Définition 1.8

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto f(x)$ une fonction. L'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \qquad (I.6)$$

est dite autonome par ce que son second membre ne dépend pas (explicitement) de t. (l'ouvert Ω est de la forme $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{O}$).

Définition 1.9

On appelle équation différentielle périodique, une équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ dont le second membre f est périodique en t.

ie ; $\exists t > 0$ tq $\forall t, f(t + T, x) = f(t, x)$.

Définition 1.10

On dit que l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est une équation linéaire dans $\mathbb{R}^n$ si elle est de la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad (I.7)$$

où $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une fonction matricielle continue de t et $b(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, continu de t.

L'équation $(I.7)$ est dite **homogène** si $b(t) \equiv 0$, **non homogène** ou avec second membre dans le cas contraire.

$\phi(t) \equiv 0$ est toujours une solution de l'équation homogène $\dot{x} = A(t)x$;on l'appelle **la solution triviale** de cette équation.

Définition 1.11

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$; $(t, x) \mapsto f(t, x)$ (resp. $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto f(x)$) une application d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}^n$ est $\dot{x} = f(t, x)$ (resp. $\dot{x} = f(x)$) une équation différentielle.

Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $(t, x_0) \in \Omega$ entraîne $f(t, x_0) = 0$ (resp. $x_0 \in \mathcal{O}$ et $f(x_0) = 0$). On dit que x_0 est un **point critique** ou **point d'équilibre** ou **point singulier.**

$\phi(t) = x_0$ $\forall t \in I$ est une solution constante de l'équation différentielle donnée, on l'appelle une **solution stationnaire** (ou point stationnaire).

Définition 1.12

On appelle champ de vecteurs dans un domaine D de $\mathbb{R}^n$ la donnée en tout point x de D d'un vecteur $F'x)$.

On appelle équation différentielle autonome associée à ce champ, l'équation $\dfrac{dx}{dt} = F(x)$.

Exemple

Soit l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \qquad (E)$$

Cette équation est une équation autonome dont le champ de vecteurs est donné en tout point $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.

Le ^point $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, origine des coordonnées de $\mathbb{R}^2$, est un point d'équilibre du système.

Le seul fait de tracer le champ de vecteurs donne souvent une idée des orbites.

Chap 2 : Résultats fondamentaux :

Problème de Cauchy

Soit Ω $(\Omega = I \times \mathcal{O})$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$;

$(t, x) \mapsto f(t, x)$ une application continue. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (II.1)$$

On appelle problème de Cauchy relatif aux conditions initiales $(t_0, x_0) \in \Omega$, la recherche des solutions $x(t)$ de l'équation $(II.1)$ telles que $x(t_0) = x_0$.

Proposition 2.1

Pour qu'une fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$, dont le graphe est dans Ω (*ie*; $(t, x(y)) \in \Omega,\ \forall t \in I$), soit une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (II.2)$$

avec $x(t_0) = x_0$; $(t_0, x_0) \in \Omega$; $t_0 \in I$, où f est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle soit continue et que

$$\forall t \in I\ ;\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad (II.3)$$

Démonstration

CN: $x(t)$ étant solution de l'équation différentielle est continue par hypothèses, donc la fonction composée $f(t, x(t))$ est aussi continue et donc intégrable. L'équation $(II.2)$ donne par intégration

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

d'où le résultat énoncé, puisque $x(t_0) = x_0$.

CS: $x(t)$ étant continue par hypothèses, il en vas de même de $f(s, x(s))$. Le second membre de $(II.3)$ est donc dérivable. Par conséquent il en vas de même du premier. D'où par dérivation $\dot{x}(t) = f(t, x)$.

Rappels

Définition

Soit X un espace topologique, Y un espace métrique et E une partie de $\mathcal{F}(X, Y)$ (*ie*; E est un ensemble d'applications de X dans Y).

1) Soit $a \in X$, on dit que E est équicontinu au point a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que l'on ait pour tout $f \in E,\ \delta(f(V)) < \varepsilon$. ($\delta(f(V))$ =diamètre de $f(V)$).

2) Lorsque de plus X est métrique, on dit que E est uniformément équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $(d(x, y) < \eta) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

Théorème d'Ascoli (pour $\mathbb{R}^n$)

Soit X un espace métrique compact et $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. L'ensemble H est relativement compact dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si, H est équicontinu et uniformément borné.

Théorème 2.2 (th. de Cauchy-Péano)

On suppose que la fonction f est continue dans un voisinage du point (t_0, x_0) dans $\Omega = I_0 \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle J_0 voisinage de t_0 dans I_0, et une fonction $x \in \mathcal{C}^1(J_0)$ tels que $\forall t \in J_0$,

$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.

(ie ; il passe au moins une solution par le point (t_0, x_0).)

Démonstration

Nous allons le faire dans le cas où $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, le cas général s'en déduit aisément.

Nous allons chercher J_0 sous la forme $J_0 = [t_0, t_0 + \eta]$; $\eta > 0$.

Remarquons d'abord qu'il nous suffit de démontrer l'existence d'une fonction $x \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \eta])$ telle que

$$\forall t \in [t_0, t_0+\eta] \; ; \; x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad (II.3') \text{ (voir proposition 2.1)}$$

Considérons un voisinage de (t_0, x_0) de la forme

$\mathcal{V}_0 = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + \eta] \; et \; \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$ dans lequel la fonction f est définie et continue. Posons

$$M = \max_{(t,x) \in \mathcal{V}_0} \|f(t, x)\|$$

en réduisant au besoin la valeur de η, on peut supposer que $\eta M \leq \varepsilon$.

Donnons nous maintenant un réel $h > 0$; on définit les fonctions x_h et $\widehat{x}_h$ sur $[t_0 - h, t_0 + \eta]$ $[t_0, t_0 + \eta]$ par :

$$Pour \; t \in [t_0 - h, t_0] \; ; \; x_h(t) = x_0$$
$$et \; pour \; t \in [t_0, t_0 + \eta] \; \widehat{x}_h(t) = x_h(t - h)$$
$$x_h(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{x}_h(s))ds$$

On vérifie aisément que pour

$$t \in [t_0, t_0 + \eta] \; ; \; \|\widehat{x}_h(t) - x_0\| \leq \varepsilon \quad ; \quad \|x_h(t) - x_0\| \leq M(t - t_0) \leq \varepsilon \quad ; \quad \|x_h(t) - x_h(s)\| \leq M(t - s).$$

La famille des fonctions x_h est donc une famille de fonctions équicontinues et uniformément bornée sur $[t_0, t_0 + \eta]$; d'après le théorème d'Ascoli, on peut extraire une suite h_n convergeant vers 0 quand

$n \to +\infty$ telle que $\widehat{x}_{h_n}$ converge uniformément vers une fonction $x \in \mathcal{C}([t_0, t_0+\eta])$. Comme on a de plus $\max\limits_{t\in[t_0,t_0+\eta]} \|\widehat{x}_h(t) - x_h(t)\| \leq Mh$, on en déduit que x_{h_n} converge uniformément vers x sur $[t_0, t_0+\eta]$, et par suite $f(\cdot, \widehat{x}_h(\cdot))$ converge uniformément vers $f(\cdot, x(\cdot))$ sur $[t_0, t_0+\eta]$. En passant à la limite dans la relation

$$\forall t \in [t_0, t_0+\eta] \ ; \ x_{h_n}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{x}_{h_n}(s))ds$$

on obtient la relation $(II.3')$.

Fonctions lipschitziennes

Définition 2.3

a) On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne par rapport à x, s'il existe un nombre réel positif k tel que

$$\forall (t, x_1) \in \Omega \, , \, \forall (t, x_2) \in \Omega \, , \ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \, \|x_1 - x_2\| \qquad (II.4)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

b) On dit que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à x, si tout point (t_0, x_0) de Ω possède un voisinage appartenant à Ω et dans lequel f est lipschitzienne par rapport à x.

Applications contractantes

Définition 2.4

Soit E un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite contractante s'il existe un nombre réel k ; $0 < k < 1$ tel que pour tout couple (x, y) de points de E, on ait

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \qquad (II.5)$$

Proposition 2.5 (Th. du point fixe)

Toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même possède un et un seul point fixe.

Démonstration

Soit x_0 un point arbitraire de E. Montrons que la suite $x_{n+1} = f(x_n)$; $(0 \leq n < +\infty)$ est de Cauchy.

On a pour $m > n \geq 1$

$$d(x_n, x_m) = d(fx_{n-1}, x_{m-1}) \leq kd(x_{n-1}, x_{m-1})$$

et par n application successives du même procédé on obtient

$$d(x_n, x_m) \leq kd(x_0, x_{m-n}) \qquad (II.6)$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}),$$

d'où en appliquant $(II.5)$ un nombre suffisant de fois,

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq (1+k+k^2+...+k^{m-n-1})d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1-k}d(x_0, x_1) \qquad (II.7)$$

De $(II.6)$ et $(II.7)$ on tire $d(x_n, x_m) \leq \dfrac{k^n}{1-k}d(x_0, x_1)$ et puisque $k < 1$, $\left(\dfrac{k^n}{1-k}\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$, est la suite envisagée est de Cauchy.

Puisque E est complet, il existe un $y \in E$ tel que $x_n \to y$ quand $n \to +\infty$. Mais puisque f est continue, on a

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y$$

Le point y est donc bien un point fixe de l'application f.

Montrons qu'il est unique. Supposons qu'il existe $z \neq y$ tel que $f(z) = z$. On aurait

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) \leq kd(y, z) < d(y, z).$$

ce qui est absurde.

Proposition 2.6

Si une certaine itérée d'une application d'un espace métrique complet dans lui même est contractante, alors l'application possède un et un seul point fixe.

Démonstration

Soit $f : E \to E$ l'application considérée, et désignons par f_p, cette application itérée $p - fois$; $f_p = f \circ f \circ ... \circ f$ (p-fois). Supposons que f_p soit contractante et possède, en vertu de la proposition 2.5, le point a pour point fixe unique. On a alors

$$\begin{aligned} & f_{p+1}(a) = f(f_p(a)) = f(a) \\ \text{mais aussi} \quad & f_{p+1}(a) = f_p(f(a)). \end{aligned}$$

Donc $f_p(f(a)) = f(a)$ et $f(a)$ est un point fixe de f_p. Mais puisque f_p ne possède qu'un seul point fixe, à savoir a, il faut bien que $f(a) = a$. Donc a est un point fixe de f. Montrons qu'il est unique. Tout point fixe de f est un point fixe de f_p. Il ne peut donc y avoir plusieurs points fixes de f, puisqu'alors il y en aurait plusieurs pour f_p, ce qui est exclu.

Tonneaux de sécurité

Définition 2.7

Nous appellerons tonneau de centre (t_0, x_0) tout ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ du type

$$S = \{t : |t - t_0| \leq l\} \times \{x : \|x - x_0\| \leq r\} \ , \ l > 0 \ , \ r > 0 \qquad (II.8)$$

La quantité $2l$ est la longueur du tonneau, r est son rayon. Un tonneau est donc un produit cartésien d'un intervalle fermé par une boule fermée. On l'écrira souvent $S = I \times B$ où I est l'intervalle et B la boule.

Définition 2.8

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Un tonneau sera dit tonneau de sécurité relatif à la fonction f, s'il est contenu dans Ω et si $r \geq Ml$ où M est la borne supérieure de $\|f(t,x)\|$ pour $(t,x) \in S$.

Définition 2.9

Un tonneau sera appelé tonneau lipschitzien relatif à la fonction f si cette dernière satisfait à une condition de Lipschitz sur le tonneau.

Proposition 2.10

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue, tout tonneau contenu dans Ω et de centre (t_0, x_0) contient un tonneau de sécurité de même centre.

Démonstration

Soit le tonneau $(II.8)$ ci-dessus. La fonction f, étant continue, est bornée sur S qui est compact. Soit M la borne supérieure de $\|f\|$ sur S. Soient

$$\begin{aligned} I' &= \{t : |t - t_0| \leq l'\} \qquad avec \ \ l' = \min(l, \frac{r}{M}) \\ et \quad B' &= \{x : \|x - x_0\| \leq Ml'\} \end{aligned}$$

Le tonneau $S' = I' \times B'$ est un tonneau de sécurité, à condition qu'il soit contenu dans Ω. Or il l'est, puisqu'il est contenu dans S ; en effet si $l' = \frac{r}{M}$, on a $B' = B$; si $l' = l$, c'est que $l' < \frac{r}{M}$ et le rayon Ml' de B' est inférieur à r.

Proposition 2.11

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne, tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ est centre d'un tonneau de sécurité lipschitzien.

Démonstration

f étant localement lipschitzienne, (t_0, x_0) possède un voisinage où f est lipschitzienne. Ce voisinage contient un tonneau lipschitzien de centre (t_0, x_0). D'après la proposition 2.10, ce point est également centre d'un tonneau de sécurité qui, parce que contenu dans le précédent, est forcément lipschtzien lui aussi.

Théorème local d'existence et d'unicité

Théorème 2.12

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \ ; \ (t, x) \mapsto f(t, x)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, une application localement lipschitzienne en x et continue. A tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ est associée une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (II.9)$$

I est un intervalle fermé contenant t_0 comme point intérieur. Cette solution est telle que $x(t_0) = x_0$. Toute autre solution $y : J \to \mathbb{R}^n$ $J \subset I \ ; \ t_0 \in J$ avec $y(t_0) = x_0$ est telle que $\forall t \in J, \ y(t) = x(t)$.

Démonstration

Puisque d'après la proposition 2.11, tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ est centre d'un tonneau de sécurité lipschitzien $S = I \times B$, il suffira, pour que le théorème soit démontré, que nous prouvions l'existence et l'unicité d'une solution définie sur I et dont la trajectoire est dans S.

Nous supposerons que le tonneau S considéré ici est de longueur $2l$ telle que $kl < 1$, où k est une constante de Lipschitz sur S.

Il nous faut donc montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall t \in I \ ; \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \text{(voir proposition 2.1).}$$

On vas procéder par la méthode des approximations successives.

Soit $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues $y : I \to \mathbb{R}^n$, définies sur l'intervalle I du tonneau de sécurité lipschitzien $S = I \times B$ et dont le graphe est dans S.

$\mathcal{C}(I)$ muni de la métrique de la convergence uniforme, $d(x, y) = \sup\limits_{t \in I} \|y(t) - z(t)\|$ est un espace métrique complet.

Définissons une application $\mathcal{F}$ comme suit

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I) \ ; \ y \mapsto \mathcal{F}(y) = z \qquad \textit{telle que}$$

$$\forall t \in I \ ; \ z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \qquad (II.10)$$

Montrons qu'effectivement $z \in \mathcal{C}(I)$.

Puisque z est continue, il suffit de montrer que le graphe de z est dans S. Or

$$\|z(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right\| \leq M\,|t - t_0| \leq Ml.$$

Montrons que $\mathcal{F}$ est une contraction.

Soit y et y' deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ et $z = \mathcal{F}(y)$; $z' = \mathcal{F}(y')$. Par soustraction membre à membre des équations analogues à $(II.10)$ et qui définissent z et z', on a pour tout $t \in I$,

$$z(t) - z'(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y(s)) - f(s, y'(s))\right] ds$$

$$d'où \quad \|z(t) - z'(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, y'(s))\|\, ds \right|$$

La condition de Lipschitz fournie ensuite

$$\|z(t) - z'(t)\| \leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s) - y'(s)\|\, ds \right|$$

On peut majorer la norme sous le signe intégral par $d(y, y')$, ce qui donne

$$\|z(t) - z'(t)\| \leq kd(y, y')\,|t - t_0| \leq kld(y, y')$$

Mais comme ces inégalités sont valables pour tout $t \in I$, on a enfin $d(z, z\prime) \leq kld(y, y')$.

L'application $\mathcal{F}$ est donc bien contractante, puisque l a été choisi tel que $kl < 1$.

Le théorème du point fixe (proposition 2.5) est applicable à $\mathcal{F}$ et suffit à prouver le théorème local d'existence et d'unicité.

La solution cherchée sera la limite uniforme de la suite d'approximations définies par

$$x^*_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*_n(s))ds \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

et par une fonction de départ $x^*_0(t)$ quelconque dans $\mathcal{C}(I)$.

Corollaire

Dans les hypothèses du théorème 2.12, si (t_0, x_0) est centre d'un tonneau de sécurité lipschtzien $S = I \times B$ de longueur $2l$,avec $kl < 1$, où k est une constante de Lipschitz sur S, alors il existe une et une seule solution définie sur I tout entier et dont la trajectoire contient (t_0, x_0).

Théorème globale d'existence et d'unicité

Soit à nouveau l'équation $(II.9)$ ($\dot{x} = f(t,x)$). On dira qu'une solution $y :]\alpha, \beta'[\to \mathbb{R}^n$ est un prolongement à droite d'une solution $x :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ si $\beta' > \beta$ et si $\forall t \in]\alpha, \beta[\ ,\ x(t) = y(t)$.

On définit de même un prolongement à gauche.

Une solution $y : J \to \mathbb{R}^n$ de $(II.9)$ sera appelée prolongement d'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ si I est un sous intervalle propre de J et si $\forall t \in I\ ,\ x(t) = y(t)$.

Définition 2.13

On appelle **solution maximale,** toute solution qui n'admet pas de prolongement.

Théorème 2.14

Toute solution d'une équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$ a sa trajectoire contenue dans celle d'une solution maximale au moins.

Démonstration

On ne suppose pas ici l'unicité des solutions

Soit .$x_0 : I_0 =]\alpha_0, \beta_0[\to \mathbb{R}^n$ une solution. On va définir une suite de solutions

$$x_\nu : I_\nu =]\alpha_0, \beta_\nu[\to \mathbb{R}^n \qquad ; \quad \nu = 0, 1, 2, ...$$

telles que $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq$ .....La solution x_0 étant supposée connue, soit b_ν la borne supérieure des β tels qu'il existe un prolongement de x_ν à droite sur $]\alpha_0, \beta[$. Si cette borne n'existe pas, il existe un prolongement de x_ν sur $]\alpha_0, +\infty[$.

Par contre, si elle existe, ou bien elle est égale à β_ν, auquel cas on arrête la suite des x_ν, ou bien on choisit une solution $x_{\nu+1}$ telle que

$$b\nu - \frac{1}{\nu} < \beta_{\nu+1} \leq b_\nu \qquad (II.11)$$

Posons

$$I = \underset{0 \leq \nu < +\infty}{\cup}]\alpha_0, \beta_\nu[=]\alpha_0, \beta'[$$

On a :

$$\beta_{\nu+1} \leq \beta' \qquad (II.12)$$

La fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t \in I_\nu \ ; \ x(t) = x_\nu(t) = x_{\nu+1}(t) = ... \qquad\qquad \nu = 0, 1, 2, ...$$

est solution de l'équation différentielle.

Or cette solution est un prolongement de x_ν ; et donc $\beta' \leq b_\nu$. cette dernière inégalité, jointe à $(II.11)$ et $(II.12)$ permet d'écrire $\beta' \leq b_\nu < \beta' + \dfrac{1}{\nu}$.

Donc $b_\nu \to \beta'$ quand $\nu \to +\infty$. On en conclut que $.x :]\alpha_0, \beta'[\to \mathbb{R}^n$ n'admet pas de prolongement vers la droite, car si elle en admettait un, tous les b_ν seraient supérieurs à un nombre strictement plus grand que β'.

Un raisonnement analogue pour la gauche suffit à montrer l'existence d'une solution maximale.

Théorème 2.15

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \ ; \ (t, x) \mapsto f(t, x)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, une application localement lipschitzeinne en x et continue. A tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ est associée une solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$, solution telle que $x(t_0) = x_0$.

Démonstration

Ce théorème généralise le théorème 2.12. L'existence d'une solution maximale, au moins, résulte précisément de ce théorème 2.12 qui affirme l'existence d'une solution x telle que $x(t_0) = x_0$ et du théorème 2.14 qui affirme que la trajectoire de cette solution est incluse dans celle d'une solution maximale.

Il reste à démontrer l'unicité de cette solution maximale.

Supposons qu'il existe deux solutions maximales $x : I \to \mathbb{R}^n$ et $y : J \to \mathbb{R}^n$, telles que $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$, avec $t_0 \in I \cap J$. L'intervalle $I \cap J$ est ouvert, non vide.

Montrons que $\forall t \in I \cap J \ , \ x(t) = y(t)$.

Le théorème 2.12 dit qu'il existe un intervalle contenant t_0 sur lequel $x(t) = y(t)$. Supposons qu'il existe dans $I \cap J$ un $t^* > t_0$ tel que $x(t^*) \neq y(t^*)$. Soit alors

$$\tau = \inf \{t \in I \cap J \ , \ t > t_0 \ ; \ x(t) \neq y(t)\}$$

Les solutions $x(t)$ et $y(t)$ étant continues, on a $x(\tau) = y(\tau)$. Le théorème 2.12 affirme l'existence d'un intervalle contenant τ sur lequel $x(t) = y(t)$, ce qui contredit la définition de τ. Donc il n'existe pas de point tel que t^*. On démontre de même qu'il n'existe pas de point analogue à gauche de t_0.

Montrons maintenant que $I = J$.

Posons $I =]\tau_1, \tau_2[$ et $J =]\tau_1', \tau_2'[$, et supposons, pour fixer les idées, que $\tau_2' > \tau_2$. S'il en était ainsi, x admettrait un prolongement à droite et donc ne serait pas maximale, ce qui est absurde.

Remarque 2.16

Les résultats des théorèmes d'existence et d'unicité local et global, s'étendent au cas d'une équation scalaire d'ordre n et même au cas d'une équation vectorielle du $n^{ème}$ ordre.

Considérons à cet effet une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^s \;\; ; \;\; (t, u_1, ...u_n) \mapsto f(t, u_1, ...u_n)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^s)^n$ et où les u_i sont des vecteurs de $\mathbb{R}^s$. Soit alors l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)}, ..., y', y) \qquad (II.13$$

et après qu'on ait posé $y^{(k-1)} = x_k \;;\; 1 \leq k \leq n$, Soit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & f(t, x_n, x_{n-1}, ...x_1) \end{array} \right. \qquad (II.14)$$

le système du premier ordre qui lui est équivalent. Si on utilise la norme $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$, le caractère lipschitzien, ou localement lipschitzien du second membre de ce système correspond à une inégalité du type,

$$\left\| f(t, x_n, x_{n-1}, ...x_1) - f(t, x_n', x_{n-1}', ...x_1') \right\| + \sum_{i=2}^{n} \|x_i - x_i'\| \leq k \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_i'\|.$$

Pour qu'il existe un k telle que cette inégalité soit vérifiée, il faut et il suffit qu'il existe un k' tel qu'on ait

$$\left\| f(t, x_n, x_{n-1}, ...x_1) - f(t, x_n', x_{n-1}', ...x_1') \right\| \leq k' \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_i'\|.$$

Théorème 2.17

Si le second membre du système $(II.14)$ est continu et localement lipschitzien en x dans Ω, alors à tout point $(t_0, x_{n,0}, ...x_{1,0}) \in \Omega$ est associée une et une seule solution maximale $y(t)$ de l'équation différentielle $(II.13)$, solution telle que

$$y(t_0) = x_{1,0} \;;\; y'(t_0) = x_{2,0} \;, ..., \; y^{(n-1)}(t_0) = x_{n,0}.$$

Définition 2.18 (solutions globales)

Soit $\Omega = J \times \mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) ; et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \;\; ; \;\; (t,x) \mapsto f(t,x)$, une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. On appelle **solution globale** de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$, une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Remarque 2.19

Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

Exemple

Soit l'équation, sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\dot{x} = x^2 \qquad (E)$$

Cherchons les solutions de (E).

On a d'une par $x \equiv 0$ est une solution.

Si x ne s'annule pas, (E) s'écrit $\dfrac{dx}{dx^2} = dt$, d'où par intégration $\dfrac{-1}{x(t)} = t + c$ et $x(t) = \dfrac{-1}{t+c}$.

Cette formule définie en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -c[$ et sur $]-c, +\infty[$. Ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $x(t) \equiv 0$ est la seule solution globale de (E).

Conditions suffisantes pour qu'une solution maximale soit globale

Théorème 2.20

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \;\; ; \;\; (t,x) \mapsto f(t,x)$, une application continue sur un ouvert produit $\Omega = J \times \mathbb{R}^n$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout t fixé, $t \in J$, l'application $x \mapsto f(t,x)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ est globale.

Démonstration

Soit $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ et $I = [t_0 - T, t_0 + T']$ un intervalle compact quelconque contenu dans J. Comme $\Omega = J \times \mathbb{R}^n$, on peut choisir un tonneau de sécurité de rayon $r_0 = +\infty$. L'application $\mathcal{F}$ définie dans la démonstration du théorème 2.12, opère donc sur l'espace complet $\mathcal{C}(\mathcal{I})$. Soit $K = \max\limits_{t \in [t_0 - T, t_0 + T']} k(t)$, l'application f est par hypothèses $K-$lipschitzienne en x sur $[t_0 - T, t_0 + T'] \times \mathbb{R}^n$. L'application $\mathcal{F}^p$ est lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{p!} K^p (\max(T, T'))^p$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{I})$, donc contractante pour p assez grand. Ceci implique que la solution (unique) du problème de Cauchy est définie sur tout intervalle $[t_0-T, t_0+T'] \subset J$, donc définie sur J tout entier.

Points critiques

Soit a un point critique de l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$. Si $(t_0, a) \in \Omega$, la solution maximale issue de ce point est constante égale à a.

A un point critique correspondent donc une ou plusieurs solutions maximales constantes.

Les trajectoires correspondantes sont des segments de droites est les orbites sont réduites à un point.

Théorème 2.21

Dans les hypothèses du théorème 3.15 si a est un point critique auquel correspond une solution maximale $a : I \to \mathbb{R}^n$, il n'existe pas de solution x ni de temps $\tau \in I$ tels que $x(t) \to a$ quand $t \to \tau$.

Démonstration

Le théorème est vrai, car s'il existait une telle solution et un tel temps τ, l'unicité des solutions ne serait pas respectée.

Remarque 2.22

On conclut du théorème 2.21 que si $a :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ est une solution maximale correspondant à un point critique a, et si une autre solution tend vers a, ce ne peut être que pour $t \to \alpha$ ou $t \to \beta$. En particulier, si la solution maximale a est définie pour tout t, aucune solution ne peut tendre vers a si ce n'est pour $t \to \pm\infty$.

Equations autonomes

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto f(x)$ une fonction. Considérons l'équation différentielle autonome

$$\dot{x} = f(x) \qquad (II.15)$$

Théorème 2.23

Si $x :]\tau_1, \tau_2[\to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto x(t)$ est une solution maximale de l'équation $(II.15)$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$x^* :]\tau_1 - c, \tau_2 - c[\to \mathbb{R}^n \ ; \ t \mapsto x^*(t) = x(t + c)$$

est aussi une solution maximale de la même équation.

Démonstration

Pour tout $t \in]\tau_1, \tau_2[$ on a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)),$$

donc pour tout $t \in]\tau_1 - c, \tau_2 - c[$ on a

$$\frac{dx}{dt}(t+c) = f(x(t+c)) = f(x^*(t)).$$

Mais

$$\frac{dx}{dt}(t+c) = \frac{dx}{dt}(t+c) \cdot \frac{d(t+c)}{dt} = \frac{dx^*}{dt}(t).$$

On donc bien

$$\frac{dx^*}{dt}(t) = f(x^*(t)).$$

Il va de soi enfin que x^* n'admet pas de prolongement.

Remarque 2.24

Deux fonctions telles que $x(t)$ et $x^*(t)$ dans le théorème ci-dessus, sont deux paramétrisations différentes d'une même orbite.

Nous appellerons orbite maximale toute orbite correspondant à une solution maximale.

Théorème 2.25

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ et l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. Dans les hypothèses du théorème global d'existence et d'unicité, il passe par tout point de $\mathcal{O}$ une et une seule orbite maximale.

Démonstration

Il est évident qu'il passe une orbite maximale par tout point de $\mathcal{O}$. Montrons qu'il n'en passe qu'une, ou plus précisément, que si deux orbites maximales passent par un point de $\mathcal{O}$, elles coincident.

Soient donc $x(t)$ et $y(t)$ deux solutions définissant deux orbites et telles que $x(t_1) = y(t_2)$. Nous savons que $x^*(t) = x(t + t_1 - t_2)$ représente la même orbite que $x(t)$. Or $x^*(t_2) = x(t_1) = y(t_2)$. Les deux solutions x^* et y ont même condition initiale en t_2. Donc elles coincident et on a $y(t) = x^*(t)$ pour tous les t où ces fonctions sont définies. Or si x est maximale, il en va de même de x^*. Donc si y est maximale, y et x^* sont définies sur le même intervalle. Il s'en suit que $y(t)$ correspond à la même orbite que $x(t)$.

Chap. 3 : Dépendance par rapport aux conditions initiales

Quelques notions et définitions

Soit l'équation différentielle $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \;\; ; \;\; (t,x) \mapsto f(t,x)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; *et*

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (III.1)$$

l'équation différentielle qui lui est associée.

Supposons satisfaite les hypothèses du théorème globale d'existence et d'unicité ($\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une et une seule solution maximale $x(t)$ de $(II.1)$ telle que $x(t_0) = x_0$.).

L'ensemble de ces solutions est spécifié par une fonction qui s'écrit :

$$x : \Lambda \to \mathbb{R}^n \ ; \ (t; t_0, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0) \qquad (III.2)$$

L'ensemble Λ s'obtient de la manière suivante : un point $(t; t_0, x_0) \in \Lambda$ si $(t_0, x_0) \in \Omega$ et $t \in J(t_0, x_0)$, où $J(t_0, x_0)$ est l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de condition initiale (t_0, x_0).

Nous appellerons la fonction $(III.2)$, la solution exprimée en fonction des conditions initiales de l'équation $(III.1)$.

Proposition 3.1

On a pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$; $x(t; t_0, x_0) = x_0$; et pour tout point de Λ ; $\dfrac{\partial x}{\partial t}(t, t_0, x_0) = f(t, (t; t_0, x_0)$.

Démonstration

Evidente.

Théorème 3.2 (théorème local de continuité)

Si f est continue et localement lipschitzienne en x, alors tout point $(t'_0, x'_0) \in \Omega$ est le centre de deux tonneaux $S = I \times B$ et $S' = I \times B'$; $B' \subset B$, $S \subset \Omega$, $S' \subset \Omega$, tels que $x(t; t_0, x_0)$ existe et soit continue sur $I \times I \times B'$ et ait ses valeurs dans B.

Démonstration (par la méthode des approximations successives)

On sait que tout point $(t'_0, x'_0) \in \Omega$ est centre d'un tonneau lipschitzien contenu dans Ω. En diminuant sa longueur sans changer son rayon, ajustons-le pour que

$$l = \frac{r}{4M} \quad et \quad 2kl < 1 \qquad (III.3)$$

où M est un majorant de $\|f(t, x)\|$ sur le tonneau et k une constante de Lipschitz également sur le tonneau. Désignons ce dernier par $S = I \times B$. Enfin, choisissons pour $S' = I \times B'$ le tonneau de même centre (t'_0, x'_0), de même longueur et de rayon $r' = \dfrac{r}{2}$.

Nous appellerons $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \to B$ et le munirons de la métrique de la convergence uniforme correspondant à la distance d définie pour tout y_1 , $y_2 \in \mathcal{C}(I)$ par

$$d(y_1, y_2) = \sup_{t \in I} \|y_1(t) - y_2(t)\| .$$

Cet espace est complet car $\mathbb{R}^n$ l'est.

A tout point $(t_0, x_0) \in S'$ et à toute fonction $y \in \mathcal{C}(I)$, faisons correspondre une fonction z par l'équation

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \qquad (III.4)$$

Montrons que, pour tout (t_0, x_0) fixé, $z \in \mathcal{C}(I)$. On a

$$z(t) - x_0' = x_0 - x_0' + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \qquad (III.4)$$

et donc grâce à $(III.3)$ et au fait que x_0 est dans B' de rayon $\frac{r}{2}$,

$$\|z(t) - x_0'\| \leq \|x_0 - x_0'\| + M\,|t - t_0| \leq \frac{r}{2} + 2Ml = r$$

Donc $Z(t) \in B$ est est continue ; et par conséquent $z \in \mathcal{C}(I)$.

L'application considérée est donc une application $\mathcal{F} : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ paramétrée par $(t_0, x_0) \in S'$. Il est clair d'après $(III.4)$ que pour y fixé $y \in \mathcal{C}(I)$, $z = \mathcal{F}(y)$ dépend continûment de (t_0, x_0).

Montrons que $\mathcal{F}$ est une contraction.

Soit y et y' deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ On a pour tout $t \in I$

$$z_1(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds \quad ; \quad z_2(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))ds$$

d'où grâce à la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} \|z_1(t) - z_2(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\|\, ds \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_2(s)\|\, ds \right| \end{aligned}$$

On peut majorer la norme sous le signe intégral par $d(y_1, y_2)$, ce qui donne

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq kd(y_1, y_2)\,|t - t_0| \leq 2kld(y_1, y_2)$$

Mais comme ces inégalités sont valables pour tout $t \in I$, on a enfin $d(z_1, z_2) \leq 2kld(y_1, y_2)$. et comme $2kl < 1$, il s'agit bien d'une contraction.

Le point fixe unique obtenu pour chaque $(t_0, x_0) \in S'$ est bien la solution de $(III.1)$ issue de x_0 au temps t_0. Elle dépend continûment de (t_0, x_0) au sens de la métrique de $\mathcal{C}(I)$. Donc $x(t; t_0, x_0)$, considéré comme définie sur $I \times I \times B'$, est continue en (t_0, x_0) uniformément pour $t \in I$; et donc continue par rapport à ses trois arguments (pris ensembles).

Définition 3.3

Considérons un ouvert $\Psi \subset \mathbb{R}^n$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un point $t_0 \in I$, tels que $x(t; t_0, x_0)$ soit définie pour tout $x_0 \in \Psi$ et tout $t \in I$.

L'ensemble $\{(t, x(t; t_0, x_0)) : t \in I \ , \ x_0 \in \Psi\}$ sera appelé tube de trajectoires issu de Ψ à l'instant t_0.

Considérons à nouveau le tonneau $S' = I \times B'$ de centre (t'_0, x'_0) du théorème 3.2. Le rayon de B' était égal à $\dfrac{r}{2}$ est la longueur de I à $2l$.

Considérons la boule $B" = B(x'_0, \frac{r}{4})$. Pour tout $x_0 \in B"$, la solution $x(t; t'_0, x_0)$ existe sur I tout entier et est telle que,

$$\|x(t; t'_0, x_0) - x_0\| \leq Ml \leq \frac{r}{4}$$

Il en résulte que $\|x(t; t'_0, x_0) - x'_0\| \leq \dfrac{r}{2}$ et donc la fonction $x(.; t'_0, .)$ est à valeurs dans B' dès que $x_0 \in B"$. Le tube de trajectoires $T = \left\{(t, x(t; t'_0, x_0)) : t \in I \ , \ x_0 \in B(x'_0, \frac{r}{4})\right\}$ est un ensemble ouvert dans $I \times B'$.

En effet, il est l'image réciproque de l'ouvert $B(x'_0, \frac{r}{4})$ par l'application continue $x(t'_0, ., .) : I \times B' \to \mathbb{R}^n$; $(t_0, x_0) \mapsto x(t'_0, t_0, x_0)$. Pour tout $t \in I$, l'ensemble $\left\{x(t; t'_0, x_0) : \ x_0 \in B(x'_0, \frac{r}{4})\right\}$ est l'image homéomorphe de $B(x'_0, \frac{r}{4})$ par l'application $x(t; t'_0, .) : B(x'_0, \frac{r}{4}) \to \mathbb{R}^n$; $x_0 \mapsto x(x(t; t'_0, .)$. En effet cette application est bijective en vertu de l'unicité des solutions. Elle est continue en vertu du théorème 3.2. En fin l'application inverse est également continue, car on peut prendre $(t, x(x(t; t'_0, .)$ pour condition initiale au lieu de (t'_0, x_0). Alors x_0 apparait comme la valeur en t'_0 de la solution issue de x au temps t, et le théorème 3.2 peut être appliqué à nouveau. On a donc en résumé ;

Proposition 3.4

Tout point Ω est le centre d'un tonneau $S = I \times B$ contenu dans Ω et possédant la propriété suivante :

"Il existe une boule ouverte $B" \subset B$ telle que la réunion des trajectoires issues de $B"$ à l'instant t_0 constitue un tube de trajectoires défini sur toute la longueur de I "

Ce tube est ouvert dans S. Si $I = [t_1, t_2]$, les images de B" par les applications $x(t_1, t_0, .)$ et $x(t_2, t_0, .)$ sont homéomorphes à B". Nous les appellerons respectivement bouts gauche et droit du tube.

Théorème 3.5 (théorème globale de continuité)

Avec les notations précédentes, si $f(t, x)$ est localement lipschitzienne en x est continue, la solution de $(III.1)$ exprimée en fonction des conditions initiales $x : \Lambda \to \mathbb{R}^n$; $(t; t_0, x_0) \mapsto x(t; t_0, x_0)$ est une fonction continue.

Démonstration

Considérons dans Ω une trajectoire γ allant d'un point (t_0, x_0) à un point (t^*, x^*) et comprenant ses extrémités. Tout point de γ est centre d'un tonneau semblable à celui mentionné à la proposition 3.4. L'ensemble de ces tonneaux constitue un recouvrement de γ ; mais puisque γ est compact, on peut ramener ce recouvrement à un recouvrement fini.

Soient (t_0, x_0), $(t_1, x_1), ..., (t_n, x_n) = (t^*, x^*)$ les centres des tonneau , eux même désignés par la notation $S_i = I_i \times B_i$; $0 \leq i \leq n$. Rien n'empêche de supposer que les I_i ne se touchent que par leurs extrémités. Soit t'_1 l'extrémité gauche de I_1, t_2 celle de I_2, etc... A chaque tonneau est associé un tube de solutions. L'intersection du bout droit d'un tube avec le bout gauche du suivant est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. En effet les deux bouts sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et ont au moins le point $x(t'_i; t_0, x_0)$ en commun.

Supposons qu'on ait remplacé les tubes de S_0 et S_1 par deux nouveaux tubes, réunion des trajectoires issues de l'intersection de leurs bouts. On a donc constitué un nouveau tube défini sur $I_0 \cup I_1$. On fait de même pour ce tube avec celui de S_2, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un tube unique T, défini sur $I_0 \cup I_1 \cup ... \cup I_n$.

Pour $1 \leq i \leq n$, désignons par T_i l'ensemble des x de ce tube correspondants à $t = t'_i$. On remarque que $x(t; t'_n, x_n)$ est fonction continue de $t \in I_n$ et $x_n \in T_n$, la quantité t'_n étant fixé. De même $x_n = x(t'_n; t'_{n-1}, x_{n-1})$ est une fonction continue de $x_{n-1} \in T_{n-1}$, les quantités $t'_n,\ t'_{n-1}$ étant fixées. De même $x_{n-1} = x(t'_{n-1}; t'_{n-2}, x_{n-2})$ est une fonction continue de $x_{n-2} \in T_{n-2}$, les quantités $t'_{n-1},\ t'_{n-2}$ étant fixées. On continue de même jusqu'à constater que $x_1 = x(t'_1, t_0, x_0)$ est une fonction continue de $(t_0, x_0) \in T \cap S$, la quantité t'_1 étant fixée. En définitif, on constate que $x(t, t_0, x_0)$ est une fonction continue, par une application répétée du théorème qui dit qu'une fonction continue d'une fonction continue est continue.

Continuité par rapport à un paramètre

Si une équation différentielle dépend d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^s$, elle est définie à partir d'une application du type

$$f : \Omega' \to \mathbb{R}^n \quad ; \quad (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x\lambda), \qquad (III.5)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$.

L'équation différentielle sera notée

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (III.6)$$

et sa solution, exprimée en fonction des conditions initiales et du paramètre

$$x : \Lambda' \to \mathbb{R}^n \;;\; (t; t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t; t_0, x_0, \lambda) \qquad (III.2)$$

Un point $(t; t_0, x_0, \lambda) \in \Lambda'$ si $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega'$ et si $t \in J(t_0, x_0, \lambda)$, où $J(t_0, x_0, \lambda)$ est l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de condition initiale (t_0, x_0) pour la valeur λ du paramètre.

Théorème 3.6

Si la fonction f définie en $(III.5)$ est localement lipschitzienne en (x, λ) et continue, la solution $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ est continue.

Démonstration

On complète l'équation initiale $(III.6)$ par la suivante $\dfrac{d\lambda}{dt} = 0$. On obtient ainsi un système du premier ordre, localement lipschitzien en (x, λ) et continu dans Ω'. Le théorème 3.6 n'est autre que le théorème 3.5 appliqué à ce nouveau système.

Le lemme de Gronwall

Lemme 3.7

Soit $t_0 < t_1$ et soit f et μ deux fonctions continues de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout , $f(t) \geq 0$, $\mu(t) \geq 0$ et

$$f(t) \leq a + b \int_{t_0}^{t} f(s)\mu(s)ds \qquad (III.7)$$

où a et b sont des constantes strictement positives, alors pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$f(t) \leq a \exp\left(b \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds \right) \qquad (III.8)$$

L'intérêt de ce lemme est qu'il remplace une inégalité où $f(t)$ intervient au premier comme au second membre par une majoration de $f(t)$.

Démonstration du lemme

Multiplions les deux membre de $(III.7)$ par $\mu(t)$ et posons

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\mu(s)ds$$

Il vient

$$v'(t) = \mu(t)(a + bv(t))$$

En divisant les deux membres par $a + bv(t)$ et en intégrant de t_0 à t, on obtient

$$\frac{1}{b}Log\frac{a + bv(t)}{a} \leq \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds$$

ou encore

$$1 + \frac{b}{a}v(t) \leq \exp\left(b\int_{t_0}^{t} \mu(s)ds\right)$$

d'où grâce à $(III.7)$, l'inégalité cherchée.

Série d'exercices N°1 d'Eq. Dif

<u>EXO1 :</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est définie sur Ω et possède des dérivées partielles premières, par rapport à x, continues, elle est localement lipschitzienne par rapport à x, dans Ω.

<u>EXO2 :</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction qui vérifie les conditions suivantes :
$a)$ f est localement lipschitzienne par rapport à x, sur Ω.
$b)$ f est continue par rapport à t, sur Ω.
Montrer que f est continue sur Ω.

<u>EXO3 :</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue et décroissante en x. Montrer que si deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ sont égales pour $t = t_0$,elles le sont pour tout $t \geq t_0$.

<u>EXO4 :</u> Etudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = x\,|x|$.

<u>EXO5 :</u> On considère le problème de Cauchy,

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \lambda x_2 + \exp(\lambda t)\cos(\lambda x_1) \end{array} \right. \tag{1}$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Etudier l'existence et l'unicité des solutions du système (1).

<u>EXO6 :</u> Soit $x \in \mathbb{R}^n, A(t)$ une matrice réelle d'ordre n, fonction continue de t définie sur $\mathbb{R}$ et $b(t)$ un vecteur de R^n, fonction continue de t défini sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont-elles satisfaites pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)$$

Donner une condition suffisante pour que le second membre soit lipschitzien en x.

Les solutions maximales de cette équation, sont-elles globales?

<u>EXO7 :</u> Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle

$$\dot{x} = t\sqrt{t^2 + x^2} \qquad , \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

est globale.

EXO8 : Soit l'équation différentielle $\dot{x} = x^2$.
a) Cette équation admet-elle des points critiques? si oui lesquels?
b) Soit (t_0, x_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Suivant le signe de x_0, résoudre cette équation et donner l'intervalle maximal sur lequel cette solution est définie.
c) Tracer quelques trajectoires de cette équation.

EXO9 : Soit l'équation différentielle $x''' = xx$".
Montrer qu'il existe une solution maximale et une seule $x(t)$, telle que $x(t)$, $x'(t)$, $x"(t)$ prennent des valeurs données en un point t_0 donné.

EXO10 : Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \sqrt{x} & si \;\; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

et posons $x(t_0) = x_0$.
Etudier l'existence est l'unicité des solutions de cette équation.

EXO11 : Discuter l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{2x}{t} & si \;\; t \neq 0 \\ 0 & si \;\; t = 0 \end{cases}$$

EXO12 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue et lipschitzienne et l'équation différentielle qui lui est associée

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Soit $x : I \to \mathbb{R}^n$ et $y : I \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de cette équation, définies sur un intervalle fermé $I = [t_1, t_2]$. démontrer en utilisant le lemme de Gronwall, que si $t_0 \in I$ et si $x(t_0) = y(t_0)$, alors pour tout $t \in I$ on a $x(t) = y(t)$.