Equations différentielles ordinaires (EDO)
Deuxième partie : Equations Différentielles Linéaires

Chap 4 : Equations Différentielles Linéaires :

Définition 4.1

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (IV.1)$$

où

$$A : I \to \mathbb{R}^{n^2} \ , \ t \mapsto A(t) \qquad (IV.2)$$

est une fonction matricielle d'ordre n.

On dit que $(IV.1)$ est une équation différentielle linéaire homogène.

Définition 4.2

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \qquad (IV.3)$$

où $A(t)$ est comme dans la définition 4.1 et

$$b : I \to \mathbb{R}^{n} \ , \ t \mapsto b(t) \qquad (IV.4)$$

est une fonction matricielle de type $n \times 1$. Nous dirons que l'équation $(IV.3)$ est une équation différentielle linéaire non homogène.

#Dans la suite nous supposerons toujours que $A(t)$ et $b(t)$ sont continues.

Les écritures $(IV.1)$ et $(IV.3)$ sont respectivement les écritures vectorielles des systèmes différentiels linéaires suivants

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ \dot{x}_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{array}\right. \qquad (IV.1')$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ \dot{x}_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ \dot{x}_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{array}\right. \qquad (IV.3')$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ *et* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$.

Exponentielle d'une matrice

Norme dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Considérons l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est un espace vectoriel de dimension n^2 sur $\mathbb{C}$, avec une multiplication, celle des matrices, qui lui donne une structure d'anneau telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $\lambda (Ab) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$.

Les coefficients a_{ij} $(i = 1, 2, ..., n)$; $(j = 1, 2, ..., n)$ de la matrice A sont ses coordonnées par rapport à la base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée par les matrices C_{ij}, où seul n'est pas nul le coefficient (i, j) égal à 1. On peut donc munir cet espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, d'une norme (hermitienne)

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \qquad (IV.5)$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ devient ainsi un espace vectoriel normé.

Proposition 4.3

On a $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Démonstration

En posant $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$ on a $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ d'où $|c_{ij}|^2 = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, |b_{kj}| \right)^2$. Or d'après l'inégalité de Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, |b_{kj}| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right)$$

Il en résulte

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \leq \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|^2 \, \|B\|^2 .$$

Remarques

1) On dit que la norme $(IV.5)$ est multiplicative, où que l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normée.

2) On peut donc appliquer les notions d'analyse: (limite, continuité, dérivabilité, convergence des suites et des séries...).

Définition et propriétés de $\exp A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et t un nombre réel ou complexe.

Proposition 4.4

La série des matrices

$$I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^m}{m!}A^m + ... \qquad (IV.6)$$

est convergente quel que soit $t \in \mathbb{R}$ $(t \in \mathbb{C})$.

Démonstration

Posons $A = (a_{ij})$, et $A^m = (a_{ij}^{(m)})$, on a : $\left|a_{ij}^{(m)}\right| \leq \|A^m\| \leq \|A\|^m$.

Le coefficient c_{ij} de la matrice $\frac{t^m}{m!}A^m$ vérifie donc $|c_{ij}| \leq \frac{|t|^m}{m!}\|A\|^m$ et $\frac{|t|^m}{m!}\|A\|^m$ est le terme général d'une série convergente vers $\exp(|t|\,\|A\|)$.

Les n^2 séries de termes généraux $\frac{t^m}{m!}a_{ij}^{(m)}$; $(i = 1, 2, ..., n)$; $(j = 1, 2, ..., n)$ sont donc absolument convergentes et la série $(IV.6)$ de matrices est convergente.

Définition 4.5

La somme de la série $(IV.6)$ s'appelle exponentielle de la matrice tA et se note $\exp(tA)$ ou e^{tA}.

En particulier

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^m}{m!} + ... \qquad (IV.7)$$

et pour la matrice nulle

$$\exp 0 = I \qquad (IV.8)$$

où I est la matrice unité de même ordre que A.

Remarques

1) Si la série de matrices $\sum_{m=0}^{+\infty} U^m$ converge vers U et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice donnée, les séries $\sum_{m=0}^{+\infty} AU^m$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} U^m A$ convergent respectivement vers AU et UA.

2) Comme A commute avec toute puissance de A ; $A\frac{t^m}{m!}A^m = \frac{t^m}{m!}A^m A$, on a donc $Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Proposition 4.6

On a
$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \qquad (IV.9)$$

Démonstration

La série (IV.6) est une série entière, dérivable terme à terme, d'où

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A + \frac{t}{2!}A^2 + ... + \frac{t^m}{m!}A^{m+1} + ... = Ae^{tA}$$

Proposition 4.7

Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$,on a

a) $e^{tA}e^{-tA} = I \qquad (IV.10)$

b) $e^{tA}e^{\mu A} = e^{(t+\mu)A} \qquad (IV.11)$

Démonstration

a) Posons $F(t) = e^{tA}e^{-tA}$; A étant permutable avec e^{tA}, la proposition 4.6 nous donne

$$\frac{dF}{dt} = Ae^{tA}e^{-tA} - Ae^{tA}e^{-tA} = 0$$

$F(t)$ est donc une constante que l'on obtient en donnant à t la valeur 0, d'où $F(t) = I$.

b) Posons de même $G(t) = e^{-tA}e^{(t+\mu)A}$, il vient en dérivant par rapport à t :

$$\frac{dG}{dt} = -Ae^{-tA}e^{(t+\mu)A} + Ae^{-tA}e^{(t+\mu)A} = 0$$

$G(t)$ est donc une constante égale à $e^{\mu A}$ qui est sa valeur pour $t = 0$.

L'égalité $e^{-tA}e^{(t+\mu)A} = e^{\mu A}$ donne alors (IV.11) en prémultipliant par e^{tA} et en tenant compte de (IV.10).

Remarques

1) Il résulte de (IV.11) que $e^{tA}e^{\mu A} = e^{\mu A}e^{tA}$. (en général, $e^Ae^B \neq e^Be^A$)

2) On déduit de (IV.10) en posant $t = 1$, que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}.

Exponentielle d'un endomorphisme

Lemme 4.8

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}e^AP$.

Démonstration

Par définition, $e^A = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{A^k}{k!}\right) = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$.

La matrice P ne dépend pas de m, on peut écrire, $P^{-1}e^A P = \lim\limits_{m\to\infty}\left(P^{-1}S_m P\right)$; mais $P^{-1}S_m P = \sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{\left(P^{-1}AP\right)^k}{k!}$, d'où

$$\lim_{m\to\infty}\left(P^{-1}S_m P\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(P^{-1}AP\right)^k}{k!}\right) = \exp(P^{-1}AP).$$

Conséquences

Si $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\lambda_r$ sont les valeurs propres de A, celles de e^A sont $e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ ....,e^{\lambda_r}$.

démonstration

Il suffit de prendre pour P une matrice qui triangularise A.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ une base de E par rapport à laquelle f a la matrice A. Appelons g l'endomorphisme de E dont la matrice est e^A dans la base $\mathcal{B}$.

Le lemme 4.8 montre que g est indépendant de la base choisie. On pose alors $g = \exp f$.

Calcul de e^A.

a) **A est diagonale :** $A = diag(r_1, r_2, ..., r_n)$ on a $A^m = diag(r_1^m, r_2^m, ..., r_n^m)$; la série $(IV.7)$ donne alors immédiatement $e^A = diag(e^{r_1}, e^{r_2}, ..., e^{r_n})$.

b) **A est diagonalisable :** il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP = diag(r_1, r_2, ..., r_n)$; $A = PA'P^{-1}$;

$e^{A'} = diag(e^{r_1}, e^{r_2}, ..., e^{r_n})$ d'où d'après le lemme 4.8 $e^A = Pe^{A'}P^{-1} = Pdiag(e^{r_1}, e^{r_2}, ..., e^{r_n})P^{-1}$.

c) **A est nilpotente :** $A^k = 0$. La définition par la série $(IV.7)$ donne $e^A = I + A + \dfrac{A^2}{2} + ... + \dfrac{A^{k-1}}{(k-1)!}$.

d) **Cas général :** On met A sous la forme $A = D + N$, où D est diagonalisable et N est nilpotente, D et N étant permutables $(DN = ND)$. Supposons $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$. Pour calculer $A^m = (D+N)^m$, on peut appliquer la formule du binôme au sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par D et N ; il vient ainsi

$$A^m = D^m + C_m^1 D^{m-1}N + ... + C_m^{k-1}D^{m-k+1}N^{k-1}$$

En remplaçant dans la série $(IV.7)$ et en regroupant les termes en N^p pour chacune des valeurs $p = 0, ..., \ k-1$, on obtient

$$e^A = e^D \left(I + N + \frac{N^2}{2} + ... + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \right) = e^D e^N.$$

Equations linéaires homogènes

Notons $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.9

Si $A(t)$ est une fonction matricielle réelle d'ordre n,définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et continue, l'ensemble des solutions maximales de l'équation

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (IV.12)$$

est un sous espace vectoriel, de dimension n, de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration

Soit V l'ensemble des solutions maximales, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ car on vérifie par substitution dans $(IV.12)$ que si $x, \ y \in V$ et $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha x + \beta y \in V$.

Il reste à montrer que V est de dimension n, ce qui peut se faire en construisant pour V une base de n éléments. Choisissons n solutions maximales $x_i : I \to \mathbb{R}^n \ ; t \mapsto x_i(t) \ ; \ 1 \le i \le n$ de $(IV.12)$ telles que, pour un certain $t_0 \in I$, les $x_i(t_0) = x_{i0}$ soient linéairement indépendants (ie, constituent une base de $\mathbb{R}^n$).

L'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ est une partie génératrice de V. Autrement dit, tout $y \in V$ est une combinaison linéaire $y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$ où les α_i sont des scalaires réels.

En effet, les x_{i0} étant une base de $\mathbb{R}^n$, il existe n scalaires α_i tels que $y(t_0) = \alpha_1 x_{10} + ... + \alpha_n x_{n0}$. d'autre part puisque V est un espace vectoriel, $\alpha_1 x_1(t) + ... + \alpha_n x_n(t)$ est solution de $(IV.12)$. Cette solution prend en t_0 la valeur $y(t_0)$. Elle est donc la solution y, qui est la seule à prendre cette valeur en t_0.

L'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ est une partie libre de V. En effet s'il ne l'était pas, il existerait n scalaires β_i non tous nuls, tels que pour tout $t \in I$, on ait $\beta_1 x_1(t) + ... + \beta_n x_n(t) = 0$. En particulier on aurait $\beta_1 x_{10} + ... + \beta_n x_{n0} = 0$. et les x_{i0} seraient linéairement dépendants, ce qui est absurde.

Remarque

La famille $\mathcal{C}(I, \mathbb{C}^n)$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Théorème 4.10

Si $A(t)$ est une fonction matricielle complexe d'ordre n, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et continue, l'ensemble des solutions maximales de l'équation $\dot{x} = A(t)x$ est un sous espace vectoriel, de dimension n, de $\mathcal{C}(I, \mathbb{C}^n)$.

Démonstration

Analogue à celle du théorème 4.9.

Nous appellerons V^* le sous espace vectoriel en question.

L'équation $\dot{x} = A(t)x$, même pour (At) réelle, peut être considérée comme définie sur le champs complexe, et on peut considérer les solutions complexes. Le théorème 4.10 indique que l'ensemble de ses solutions complexes forme un espace vectoriel complexe V^* de dimension n ; le théorème 4.9 que l'ensemble des solutions réelles forme un espace vectoriel réel V de dimension n.

Montrons que toute base $\{x_1, ..., x_n\}$ de$V$ est aussi une base de V^*. En effet, si les $\alpha_k + \beta_k$ sont n nombres complexes tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)\, x_k = 0$, on obtient, puisque les x_k sont réels $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ et $\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n = 0$ et puisque les x_i forment une base de V, on a $\alpha_k = \beta_k = 0$, $\forall k = 1, ..., n$.

Définition 4.11

Toute base $\{x_1, ..., x_n\}$ de V est appelée **système fondamental de solutions** de $(IV.12)$.

Ecrivons les composantes de x_i sous la forme $x_{i1}, ..., x_{in}$, ce sont des fonctions de t. la matrice

$$F \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

dont chaque colonne est une solution de $(IV.12)$, est appelée **matrice fondamentale** de cette équation. Si $F(t_0) = I$ où I est la matrice unité d'ordre n, on dit que F est **la matrice fondamentale principale en** t_0 pour l'équation $(Iv.12)$. On l'appelle aussi **la résolvante ou la noyau résolvant** de l'équation $(IV.12$. Nous la noterons $R(t, t_0)$.

Proposition 4.12

La solution de l'équation $(IV.12)$ qui prend la valeur x_0 pour $t = t_0$ est égale à $R(t, t_0)x_0$.

Démonstration

Soit $x(t) = R(t, t_0)x_0$. La dérivée $\dot{x}$ se calcule :

$$\begin{array}{rclcl} \dot{x} & = & R'(t,t_0)x_0 & = & (A(t)R(t,t_0))x_0 \\ & & & = & A(t)(R(t,t_0)x_0) \\ & & & = & A(t)x(t) \end{array}$$

ainsi $x(t)$ est bien une solution de l'équation $(IV.12)$ et sa valeur en $t = t_0$ est $R(t_0, t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$.

Théorème 4.13

Si $t,\ u,\ s$ sont trois points de $I =]t_1, t_2[$, on a

$$R(t,s) = R(t,u)Ru,s) \qquad (IV.13)$$

Démonstration

Posons $S(t) = R(t, u)Ru, s)$, on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{dS}{dt} & = & \left[\frac{d}{dt}R(t,u)\right]R(u,s) \\ & = & A(t)R(t,u)R(u,s) \\ & = & A(t)S(t). \end{array}$$

Donc $S(t)$ est une solution de l'équation $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X$ (X étant une matrice $n \times n$ fonction de t). Sa valeur pour $t = u$ est $R(u, u)R(u, s) = IR(u, s) = R(u, s)$. Donc $S(t)$ est la solution qui prend la valeur $R(u, s)$ pour $t = u$. Or le membre de gauche de $(IV.13)$, à savoir $R(t, s)$ est aussi une solution de cette même équation, qui prend la valeur $R(u, s)$ pour $t = u$. D'où l'égalité $(IV.13)$.

Corollaire

$R(t, s)$ est inversible et $[R(t, s)]^{-1} = R(s, t)$.

Démonstration

$R(t, s)R(s, t) = R(t, t) = I$

$R(s, t)R(t, s) = R(s, s) = I$.

Si $\{x_1, ..., x_n\}$ est un système fondamental de solutions de $(IV.12)$, toute autre solution y de cette équation s'exprime sous la forme $y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

Si F est la matrice fondamentale construite à partir des x_i et si $\mathbf{a}$ est la matrice $n \times 1$ des α_i, on a

$$y = F\mathbf{a} \qquad (IV.14)$$

Soit F_1 une matrice fondamentale de $(IV.12)$ et F_2 une matrice dont chaque colonne est construite à partir d'une solution de $(IV.12)$. L'équation $(IV.14)$ montre qu'il existe une matrice constante C d'ordre n, telle que $F_2 = F_1 C$.

Pour que F_2 soit une matrice fondamentale, il faut et il suffit que C soit régulière (Inversible).

Théorème 4.14

Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble de solutions de $(IV.12)$ et F $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & ... & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & ... & x_{n2} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ x_{1n} & x_{2n} & ... & x_{nn} \end{pmatrix}$ la matrice correspondante.

Cet ensemble est une base de V si et seulement si, il existe $t_0 \in I$ tel que $\det F(t_0) \neq 0$.

Démonstration

Si $\det F(t_0) \neq 0$, les $x_i(t_0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$, les fonctions x_i aussi dans V (voir dém. du th.4.9). Soit $\{x_1, ..., x_n\}$ une base de V et supposons qu'il existe un $t_0 \in I$ tel que $\det F(t_0) = 0$. les $x_i(t_0)$ seraient alors linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^n$ et donc il existerait n scalaires β_i non tous nuls, tels que

$$\beta_1 x_1(t_0) + ... + \beta_n x_n(t_0) = 0. \qquad (IV.15)$$

Or $\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n$ est une solution de $(IV.12)$. Grâce à $(IV.15)$, on voit que cette solution est celle qui est nulle en t_0. A cause de l'unicité des solutions, c'est celle qui est nulle pour tout $t \in I$. Donc on aurait $\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n \equiv 0$ et les x_i ne formeraient pas une base de V, ce qui est absurde.

Proposition 4.15

Soit la matrice de solutions désignée par F dans le théorème 4.14. S'il existe un $t_0 \in I$ tel que $\det F(t_0) \neq 0$, alors $\det F(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Démonstration

C'est la démonstration de la condition nécessaire du théorème 4.14.

Remarque 4.16

Les définitions et propositions de 4.11 à 4.15, qui sont relatives à des solutions réelles d'équations différentielles réelles, restent valables pour les solutions complexes d'équations différentielles complexes, la variable t demeurant réelle.

Les équations adjointes

Nous noterons dans ce qui suit A^T la transposée de A, $\overline{A}$ la conjuguée complexe de A et A^* la matrice adjointe de A, c'est la transposée de la conjuguée complexe, $A^* = \overline{A}^T$. Si A est réelle, la transposée et l'adjointe de A sont identiques.

Définition 4.17

On appelle équation adjointe de l'équation $(IV.1)$, l'équation

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y \qquad (IV.16)$$

et équation adjointe de l'équation matricielle

$$\dot{X} = A(t)X \qquad (IV.17)$$

où X est non plus un vecteur, mais une matrice d'ordre n, l'équation

$$\frac{dY}{dt} = -A^*(t)Y \qquad (IV.18)$$

où Y est une matrice d'ordre n.

Définition 4.18

Les deux équations $(IV.1)$ et $(IV.17)$ sont dites auto-adjointes se elles sont de même forme que leurs équations adjointes respectives, (ie; si $-A^*(t) = A(t)$).

Remarque

L'adjointe de l'adjointe d'une équation donnée est cette équation même.

Proposition 4.19

Si x est une solution quelconque de l'équation différentielle linéaire (réelle ou complexe) $\dot{x} = A(t)x$ et y est une solution quelconque de l'équation adjointe, le produit scalaire de x et y est constant.

Démonstration

En prenant les adjointes, des deux membres $(IV.16)$ et en tenant compte de $(IV.1)$, on construit l'expression

$$\frac{dy^*}{dt}x + y^*\frac{dx}{dt} = -y^*Ax + y^*Ax = 0$$

ce qui implique que $y^*x = c$ où c est une constante. Le produit y^*x est un produit scalaire au sens usuel du terme. Si les composantes de x et y sont notées x_k et y_k respectivement, $(1 \leq k \leq n)$. On a donc $\overline{y}_1x_1 + ... + \overline{y}_nx_n = c$, et si x et y sont des solutions réelles $y_1x_1 + ... + y_nx_n = c$.

Proposition 4.20

L'adjointe de l'inverse d'une matrice fondamentale de l'équation différentielle $\dot{X} = A(t)X$ est une matrice fondamentale de l'équation adjointe.

Démonstration

Soit X la matrice fondamentale, telle donc que $\det X \neq 0$. on a

$$\frac{dX}{dt} = AX \ , \quad d'où \ \ \frac{dX}{dt} X^{-1} = A,$$

et encore

$$-X^{-1} \frac{dX}{dt} X^{-1} = -X^{-1} A$$

Cette équation s'écrit encore

$$\frac{d}{dt} X^{-1} = -X^{-1} A.$$

En prenant les adjointes des deux membres, on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(X^{-1}\right)^{*} = -A^{*} \left(X^{-1}\right)^{*}.$$

Equations linéaires non homogènes

Proposition 4.21

On considère l'équation linéaire non homogène

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \qquad (IV.19)$$

où $A(t)$ et $b(t)$ sont définies et continues sur un même intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. La solution $t \rightarrow x(t)$ de cette équation satisfaisant à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0 \qquad (IV.20)$$

a pour expression

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)ds \qquad (IV.21)$$

où $R(t, t_0)$ est la résolvante de l'équation homogène correspondante.

Démonstration

Pour démontrer cette proposition, remarquons tout d'abord que la solution générale de l'équation homogène

$$\dot{y} = A(t)y \qquad (IV.22)$$

a pour expression

$$R(t, t_0)c \qquad (IV.23)$$

où c est un vecteur constant arbitraire.

Pour déterminer la solution $x(t)$ cherchée pour l'équation non homogène $(IV.19)$, nous utiliserons la méthode dite "de variation des constantes" de Lagrange. Elle consiste à substituer au vecteur c dans $(IV.23)$ un vecteur fonction de t, que nous noterons $e(t)$; et à déterminer ce vecteur par la condition que $x(t) = R(t, t_0)e(t)$ satisfait à $(IV.19)$ et $(IV.20)$. La condition $(IV.20)$ donne immédiatement $x(t_0) = Ie(t_0) = x_0$ d'où

$$e(t_0) = x_0 \qquad (IV.24)$$

Par substitution dans $(IV.19)$ de l'expression adoptée pour $x(t)$, on obtient

$$\frac{dR(t, t_0)}{dt}e(t) + R(t, t_0)\frac{de}{dt} = A(t)R(t, t_0)e(t) + b(t)$$

Si on remplace au premier membre $\dfrac{dR(t, t_0)}{dt}$ par sa valeur $A(t)R(t, t_0)$, il vient $R(t, t_0)\frac{de}{dt} = b(t)$, d'où on tire par intégration

$$e(t) - e(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)ds$$

De là enfin en tenant compte de $(IV.24)$ on tire l'expression annoncée.

Equations linéaires homogènes à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax \qquad (IV.25)$$

où A est une matrice constante d'ordre n, réelle ou complexe. On sait que $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$, et par conséquent e^{tA} est une solution de l'équation $\dot{X} = AX$; puisque $e^{0A} = I$, on voit que $R(t, 0) = e^{tA}$, pour l'équation $(IV.25)$. La solution générale de cette équation est donc

$$x(t) = e^{tA}c \qquad (IV.26)$$

où c est un vecteur constant.

Remarque

$$R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A} = \exp[(t-t_0)A].$$

La question n'est pour autant pas vidée, sous cette forme, on ne sait pas, par exemple quand est ce que $e^{tA}c$ est périodique ou encore $e^{tA}c \to 0$ pour $t \to \infty$!

Le second membre de l'équation $(IV.25)$ correspond à une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; $x \mapsto Ax$. supposons que A représente cette transformation dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si on passe à une nouvelle base $(f_1, ..., f_n)$ et si P est la matrice de changement de base, l'équation $(IV.25)$ devient

$$\dot{x}_1 = Ax_1 \qquad\qquad (IV.27)$$

où

$$A_1 = P^{-1}AP \quad ; \quad et \quad x(t) = Px_1(t)$$

Solutions complexes

Supposons que P soit choisie de telle sorte que A_1 soit en forme normale de Jordan ; $A_1 = diag(\lambda_1 I_1 + H_1, ..., \lambda_s I_s + H_s)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A, non forcément distinctes, les I_i sont des matrices unités et les H_i sont des matrices nilpotentes du type

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

H_i du même ordre que I_i, pour $1 \le i \le s$.

Dans ces conditions la matrice fondamentale principale en $t = 0$ pour l'équation $(IV.27)$ est

$$\exp tA_1 = diag(\exp[t(\lambda_1 I_1 + H_1)], ..., \exp[t(\lambda_s I_s + H_s)]) \qquad (IV.28)$$

Il n'est pas difficile de calculer explicitement

$$\exp[t(\lambda_i I_i + H_i)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(\lambda_i I_i + H_i)^k$$

On obtient si υ_i est l'ordre des matrices I_i et H_i

$$(\lambda_i I_i + H_i) = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & . & . & . & \frac{t^{\upsilon_i - 1}}{(\upsilon_i - 1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & . & . & \frac{t^{\upsilon_i - 2}}{(\upsilon_i - 2)!} \\ . & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \frac{t^2}{2!} \\ . & . & . & . & . & . & \frac{t}{1!} \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \qquad (IV.29)$$

La matrice fondamentale principale en $t = 0$ pour l'équation $(IV.27)$ étant précisée par les formules $(IV.28)$ et $(IV.29)$, une matrice fondamentale pour l'équation $(IV.25)$ sera donnée par la formule : Pe^{tA_1}.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.22

Les solutions de $(IV.25)$ sont des combinaisons linéaires des $e^{\lambda_i t}$ où les λ_i sont les valeurs propres de A, les coefficients des $e^{\lambda_i t}$ étant des polynômes en t de degrés respectivement égaux aux ordres des blocs de Jordan de A diminués d'une unité. En particulier, les degrés de ces polynômes ne dépassent jamais les multiplicités des valeurs propres correspondantes ; et si les valeurs propres λ_i de A sont distinctes, les solutions de $(IV.25)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des $e^{\lambda_i t}$.

Solution générale obtenue sans exponentielles matricielles

Soit l'équation $\dot{x} = Ax$ où on a supposé que A est déjà sous forme normale de Jordan. Si on explicite cette équation, elle se décompose en autant de systèmes scalaires indépendants que A comporte de blocs diagonaux. Contentons nous d'écrire ici un seul de ces systèmes. On supposera le bloc de Jordan correspondant d'ordre υ et de valeur propre λ. Il vient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \lambda x_2 + x_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \dot{x}_{\upsilon-1} & = & \lambda x_{\upsilon-1} + x_\upsilon \\ \dot{x}_\upsilon & = & \lambda x_\upsilon \end{cases}$$

Pour déterminer la solution générale de ce système, utilisons la substitution de variables $y_i = x_i e^{-\lambda t}$ $(1 \leq i \leq \upsilon)$, qui fournit le nouveau système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \dot{y}_{\upsilon-1} &= y_\upsilon \\ \dot{y}_\upsilon &= 0 \end{cases}$$

On l'intègre sans peine et on obtient en définitive les solutions : $x_\upsilon = c_1 e^{\lambda t}$; $x_{\upsilon-1} = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t}$; .... ; $x_1 = \left(c_1 \dfrac{t^{\upsilon-1}}{(\upsilon-1)!} + c_2 \dfrac{t^{\upsilon-2}}{(\upsilon-2)!} + ... + c_\upsilon \right) e^{\lambda t}$.
Dans lesquels les c_i sont des constantes arbitraires.

(On vérifie au passage que les polynômes en t se déduisent les uns des autres par dérivation).

On écrit des solutions analogues pour chacun des blocs de Jordan, et on obtient n solutions linéairement indépendantes en annulant toutes les constantes arbitraires sauf une, de toutes les manières possibles. Les solutions obtenues correspondent aux colonnes de la matrice $(IV.29)$.

Recherche pratique des solutions

Pour calculer les solutions dans les cas d'espèces, on utilisera un procédé plus expéditif que celui qui consiste à passer par la forme normale de Jordan. Pratiquement, on commencera par déterminer les valeurs propres de A. On sait que toutes les solutions correspondant à une valeur propre λ sont de la forme $x_i(t) = P_i(t)e^{\lambda t}$, où les P_i sont des polynômes de degré au plus égal à la multiplicité de la valeur propre λ, diminuée d'une unité. On substituera ces expressions des x_i dans l'équation à résoudre, les coefficients dans les P_i demeurant indéterminés. Après simplification de toutes les équations par $e^{-\lambda t}$, on obtient des équations polynômiales en t dont tous les coefficients peuvent être séparément égalés à 0, car ces équations sont des identités. On obtient ainsi un ensemble d'équations linéaires permettant de déterminer ceux des coefficients des P_i qui ne peuvent demeurer arbitraires.

Equations linéaires non homogènes à coefficients constants

Soit l'équation

$$\dot{x} = Ax + b(t) \qquad (IV.30)$$

où A est une matrice constante d'ordre n et $b(t)$ une matrice de type $n \times 1$, fonction continue de t sur un intervalle ouvert I. La résolvante de l'équation homogène $\dot{x} = Ax$ étant $e^{(t-t_0)A}$, grâce à $(IV.21)$, on obtient alors comme expression de la solution de $(IV.31)$ qui prend la valeur x_0 en t_0 ;

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds \qquad (IV.31)$$

Equations linéaires scalaires d'ordre n

Considérons $n+1$ fonctions $a_i : I \to \mathbb{R}$; $t \mapsto a_i(t) \qquad 0 \leq i \leq n$, toutes définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que $a_0(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et considérons l'équation différentielle

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \qquad (IV.32)$$

On l'appelle **"Equations linéaires scalaires homogène d'ordre n"**. On peut l'écrire sous la forme d'une équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \\ \frac{-a_n}{a_0} & . & . & . & . & . & \frac{-a_1}{a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (IV.33)$$

où on a posé $x_1 = y$; $x_2 = y'$; ... ; $x_n = y^{(n-1)}$. Il en résulte que si $y_1, ..., y_n$ sont n solutions de $(IV.32)$, alors la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & . & . & . & y_n \\ y_1' & y_2' & . & . & . & y_n' \\ & & & & & \\ & & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & . & . & . & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (IV.34)$$

est une matrice de solutions de $(IV.33)$. Son déterminant porte le nom de **wronskien** de l'équation $(IV.32)$, associé aux solutions $y_1, ..., y_n$.

On dit que n solutions $y_1, ..., y_n$ de $(IV.32)$ définies sur I sont linéairement indépendantes si l'identité

$$c_1y_1(t) + ... + c_ny_n(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

implique que $c_1 = ... = c_n = 0$.

Proposition 4.23

n solutions $y_1, ..., y_n$ de $(IV.32)$ sont linéairement indépendantes si, et seulement si, le wronskien qui leur est associe est différent de zéro. toute solution de $(IV.32)$ est une combinaison linéaire à coefficients complexes de n solutions linéairement indépendantes.

Démonstration

Si les solutions $y_1, ..., y_n$ sont linéairement dépendantes, il existe des constantes $c_1, ..., c_n$ non toutes nulles, telles que, pour tout $t \in I$; $c_1 y_1(t) + ... + c_n y_n(t) = 0$; d'où par dérivation $c_1 y_1^{(k)}(t) + ... + c_n y_n^{(k)}(t) = 0$.

Donc les colonnes de $(IV.34)$ sont linéairement dépendantes sur I et le wronskien est identiquement nul.

Inversement, si le wronskien est nul, les solutions $y_1, ..., y_n$ sont linéairement dépendantes.

Enfin, puisque dans le cas où le wronskien est différent de zéro, toute solution de $(IV.33)$ est une combinaison linéaire des colonnes de $(IV.34)$, on voit qu'à la même condition, toute solution de $(IV.32)$ est combinaison linéaire des solutions $y_1, ..., y_n$.

Définition 4.24

Un ensemble de n solutions linéairement indépendantes de $(IV.32)$ est appelé **système fondamental de solutions** pour cette équation.

Equations à coefficients constants

Soit l'équation différentielle

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (IV.35)$$

où les $a_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes, avec $a_0 \neq 0$. La matrice d'ordre n dans l'équation $(IV.33)$ a pour équation aux valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{-a_n}{a_0} & . & . & . & . & . & \frac{-a_1}{a_0} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Si on développe le déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne, on obtient l'équation

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (IV.36)$$

Théorème 4.25

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les racines distinctes de $(IV.36)$ de multiplicité respectives $\rho_1, ..., \rho_s$. Un système fondamental de solutions est

$$t^k e^{\lambda_i t} \quad (k = 0, 1, ..., \rho_{i-1} \quad ; \quad i = 1, ..., s) \qquad (IV.37)$$

Démonstration

On calcule sans peine que si on substitue $t^k e^{\lambda_i t}$ à y au premier membre de $(IV.35)$, on obtient

$$\left(f^{(k)}(\lambda_i) + C_k^1 f^{(k-1)}(\lambda_i)t + ... + C_k^k f(\lambda_i)tk \right) e^{\lambda_i t}.$$

Puisqu'une racine multiple d'ordre ρ d'un polynôme $f(\lambda)$ est aussi racine des polynômes $f^{(k)}(\lambda)$ pour $0 \leq k \leq \rho - 1$, on a bien montré que les fonctions mentionnées dans l'énoncé sont solutions de $(IV.35)$.

Il reste à montrer que les fonctions $(IV.37)$ sont linéairement indépendantes. Si elles ne l'étaient pas, il existerait des constantes c_{ik} non toutes nulles telles que

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=0}^{\rho_i - 1} c_{ik} t^k \right) e^{\lambda_i t} \equiv 0 \qquad (IV.38)$$

Certains des polynômes $P_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{\rho_i - 1} c_{ik} t^k$ peuvent être identiquement nuls. Nous pouvons donc écrire $(IV.38)$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{\sigma} P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0 \qquad (IV.39)$$

avec $\sigma \leq s$ et en supposant que $P_\sigma(t) \neq 0$ ($P_\sigma(t)$ non identiquement nul), tous les $P_i(t)$ étant identiquement nuls pour $i > \sigma$. Multiplions $(IV.39)$ par $e^{-\lambda_1 t}$ et dérivons un nombre suffisant de fois pour que $P_1(t)$ soit transformé en une fonction idntiquement nulle. Dans ces dérivations successives, les polynômes facteurs de $e^{(\lambda_i - \lambda_1)t}$ ne changent pas de degré pour $2 \leq i \leq \sigma$. Multiplions ensuite l'équation obtenue par $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ et dérivons de même pour remplacer $P_2(t)$ par une fonction identiquement nulle, les degrés des autres polynômes demeurant inchangés.

On continuerait de même jusqu'à démontrer que le produit d'un polynôme de degré égal à celui de $P_\sigma(t)$ multiplié par une exponentielle est identiquement nul. Or ceci est absurde.

Série d'exercices N°2 d'EDO

EXO 1 : On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer $\exp A$ et $\exp B$. Vérifier que $\exp A$ et $\exp B$ ne commutent pas.

b) Calculer $\exp(A+B)$. Vérifier que $\exp(A+B) \neq \exp A \exp B$ et $\exp(A+B) \neq \exp B \exp A$.

EXO 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ $B \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que l'égalité $AB = BA$ implique $\exp A \exp B = \exp B \exp A = \exp(A+B)$.

EXO 3 : Calculer $\exp A$ dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

EXO 4 : a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et de la forme $A = diag(A_1, ..., A_k)$ où $A_1, ..., A_k$ sont des matrices carrées, on a $\exp A = diag(\exp A_1, ..., \exp A_k)$.

b) Calculer $\exp A$, où A est la matrice de Jordan d'ordre h, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0... & 0 \\ 0 & \lambda & 1... & 0 \\ : & & & : \\ . & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0... & \lambda \end{pmatrix}$

c) Utiliser a) et b) pour calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

EXO 5 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(\exp A) = \exp(trA)$.

EXO 6 : Montrer que toute matrice fondamentale principale en un point t_0 d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $\dot{x} = Ax$, commute avec la matrice A.

EXO 7 : Montrer que si P et $\int_0^t P(s)ds$ commutent, l'équation $\dot{x}(t) = P(t)x(t)$, a pour matrice fondamentale principale en $t = 0$, $X(t) = \exp(\int_0^t P(s)ds)$.

EXO 8 : Trouver la matrice fondamentale principale en $t = 0$ pour les équations différentielles suivantes

a) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x,$ *b)* $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} x$

EXO 9 : On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
b) Calculer $\exp(tA)$.
c) Résoudre le système

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad \textit{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

d) Montrer que $x(t)$ vérifie une équation linéaire du troisième ordre à coefficients constants (écrire cette équation).

EXO 10 : Résoudre les équations différentielles
1) $x^{(5)} - 3x^{(4)} + 3x^{(3)} - x" = 0$
1) $x^{"} + 2ix' + x = 0$