Université A. Mira - Bejaia Département de Chimie	**Correction de la série de TD N°2** *Plan factoriel complet*	Master II 2020/2021

Exercice N°1 :

1) L'expérimentateur décide d'exécuter un plan d'expériences en se limitant à deux niveaux par facteur :

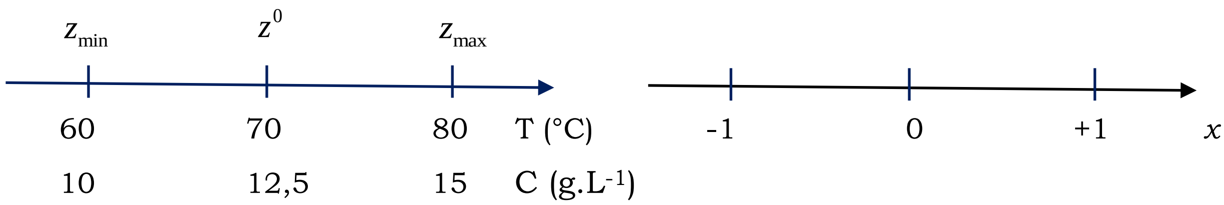
	T (°C)	C ($g.L^{-1}$)
Niveau -1	60	10
Niveau +1	80	15

Plan factoriel complet à deux niveaux 2^2

Nombre d'essais = $2^2 = 4$ (sans répétitions)

Essai N°	T (°C)	C ($g.L^{-1}$)
1	60	10
2	80	10
3	60	15
4	80	15

2) z : variable réelle $\qquad$ x : variable codée (sans unité)



Facteur A : T (°C) $\qquad x_A = \dfrac{T - T^0}{\Delta T}$

La valeur au centre : $T^0 = \dfrac{60+80}{2} = 70\,°C$ $\qquad$ Le pas de variation : $\Delta T = \dfrac{80-60}{2} = 10\ °C$

Par suite : $\boxed{x_A = \dfrac{T-70}{10}}$

Facteur B : C (g.L-1) $x_B = \dfrac{C - C^0}{\Delta C}$ avec : $C^0 = 12{,}5$ g.L-1 et $\Delta C = 2{,}5$ g.L-1

On trouve : $\boxed{x_B = \dfrac{C - 12{,}5}{2{,}5}}$

Au centre du domaine (x_A = 0 ; x_B = 0) soit : (T = 70 °C ; C = 12,5 g.L-1)

Le point (x_A = +0,5 ; x_B = -0,6) correspond à (T = 75 °C ; C = 11 g.L-1)

3) Construction de la matrice d'expériences et calcul manuel :

Modèle linéaire : $\hat{y} = a_0 + a_1\ x_A + a_2\ x_B + a_{12}\ x_A x_B$

N°	x_0	x_A	x_B	$x_A x_B$	y (%)
1	1	-1	-1	1	60
2	1	1	-1	-1	70
3	1	-1	1	-1	80
4	1	1	1	1	90
Diviseur	4	4	4	4	
ai	75	5	10	0	

$a_0 = E_0 = 1/4\,[y_1 + y_2 + y_3 + y_4] = 1/4\,[60 + 70 + 80 + 90] = 75$

$a_1 = E_A = 1/4[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4] = 1/4\,[-60 + 70 - 80 + 90] = 5$

$a_2 = E_B = 1/4[-y_1 - y_2 + y_3 + y_4] = 1/4\,[-60 - 70 + 80 + 90] = 10$

$a_{12} = E_{AB} = 1/4[y_1 - y_2 - y_3 + y_4] = 1/4\,[60 - 70 - 80 + 90] = 0$

Comme : $a_{12} = E_{AB} = 0$ ***il n'y a donc pas d'interaction entre A et B***

Le modèle s'écrit : $\hat{y} = 75 + 5\ x_A + 10\ x_B$

4) On utilisera une feuille d'Excel pour construire les matrices d'expériences et calculer les coefficients du modèle (exercices 1 et 2).

Exercice N°2 :

1) Modèle linéaire : $\hat{y} = a_0 + a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + a_{12}\ x_1 x_2$

Plan factoriel 2^2 = 4 essais

N°	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y (%)
1	+1	-1	-1	+1	60
2	+1	+1	-1	-1	70
3	+1	-1	+1	-1	80
4	+1	+1	+1	+1	95
Diviseur	4	4	4	4	
ai	76,25	6,25	11,25	1,25	

$a_0 = 1/4\,[y_1 + y_2 + y_3 + y_4]$

$a_1 = 1/4[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]$

$a_2 = 1/4[-y_1 - y_2 + y_3 + y_4]$

$a_{12} = 1/4[y_1 - y_2 - y_3 + y_4]$

Le modèle s'écrit : $\hat{y} = 76,25 + 6,25\ x_1 + 11,25\ x_2 + 1,25\ x_1x_2$

*Construction de la matrice d'expériences par **Excel** et calcul des coefficients*

$A = \left({}^tXX\right)^{-1}\ {}^tXY$ $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On note : $X = \begin{pmatrix} + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{pmatrix}$

${}^tX = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & - & - & + \end{pmatrix}$ $\quad {}^tXX = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left({}^{t}XX\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.25\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Soit : $\left({}^{t}XX\right)^{-1}=\frac{1}{4}\ I_4$

Matrice unité (ou identité)

Par suite, $A=\frac{1}{4}\ {}^{t}XY$

D'autre part, $Y=\begin{pmatrix}60\\70\\80\\95\end{pmatrix}$ et ${}^{t}XY=\begin{pmatrix}305\\25\\45\\5\end{pmatrix}$ On en déduit : $A=\begin{pmatrix}76{,}25\\6{,}25\\11{,}25\\1{,}25\end{pmatrix}$

2) Test de Student :

a) L'écart type des réponses individuelles représente le carrée de l'écart à la moyenne (C. E. M)

b) On calcule la somme des carrées des écarts à la moyenne (S. C. E. M). Elle permet notamment d'établir la variance.

c) L'essai au centre est répété n_0 = 6 fois

Essais	y_0	$\left(y_i-\bar{y}_0\right)^2$
1	77,3	0,49
2	79,1	1,21
3	77,8	0,04
4	77	1
5	77,7	0,09
6	79,1	1,21

$\bar{y}_0=78$ $\qquad S^2_{rep}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_0}\left(y_i-\bar{y}_0\right)^2}{n_0-1}$ = 0,808

$f=n_0-1$ = 5 : degrés de liberté.

$S_{ai}=\dfrac{S_{rep}}{\sqrt{N}}==\dfrac{S_{rep}}{\sqrt{4}}$ = 0,4494

N = 4 (Plan factoriel 2^2) $\qquad t_i=\dfrac{|a_i|}{S_{ai}}$

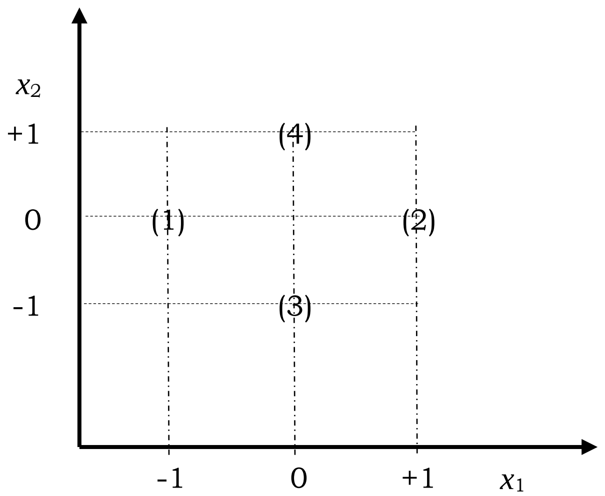
ai	ti	Signification
76,25	169,65	S
6,25	13,91	S
11,25	25,03	S
1,25	2,78	S

La valeur tabulée $t_\alpha(f)$ = 2, 57 pour α = 0,05 et f = 5

Les $t_i > t_\alpha(f)$ = 2, 57 : tous les coefficients a_i sont significatifs

3) a)

	Variable réelle		Variable codée		
N°	T/°C	C (g.L^{-1})	x_1	x_2	y (%)
1	60	12,5	-1	0	71
2	80	12,5	+1	0	83,5
3	70	10	0	-1	66
4	70	15	0	+1	88,5



Les points considérés sont les milieux des arêtes. Il ne s'agit pas d'un plan factoriel.

b)

N°	x_0	x_1	x_2	$x_1\ x_2$	y (%)
1	+1	-1	0	0	71
2	+1	+1	0	0	83,5
3	+1	0	-1	0	66
4	+1	0	1	0	88,5
Diviseur	4	4	4	4	
ai	77,25	3,125	5,625	0	

Le modèle s'écrit : $\hat{y} = 77,25 + 3,125\ x_1 + 5,625\ x_2$ (Pas d'interaction 12 : a_{12} = 0)

4) $\hat{y} = 76,25 + 6,25\ x_1 + 11,25\ x_2 + 1,25\ x_1 x_2$ (question 2)

La valeur ***prédite*** au centre du domaine ($x_1 = x_2 = 0$) : $\hat{y}_0 = a_0 = 76,25$

La moyenne des réponses ***mesurées*** au centre du domaine : $\bar{y}_0 = 78$

$\bar{y}_0 - \hat{y}_0 = 1,75$

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{S^2_{rep}} = 0,899$ et $t_\alpha(f)\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 2,57\ \dfrac{0,899}{\sqrt{4}} = 1,16$

Au risque α = 0,05, l'intervalle de confiance de a_0 correspond à :

$$\left[a_0 - t_\alpha(f)\ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\ ;\ a_0 + t_\alpha(f)\ \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] = \left[76,25 - 1,16\ ;\ 76,25 + 1,16\right] = \left[75,09\ ;\ 77,41\right]$$

Ce modèle peut être complété en faisant des essais supplémentaires (n_α points en étoiles et n_0 points au centre) pour faire un plan composite centré (Box-Benhken ou Doehlert). Le modèle envisagé sera quadratique.