Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Février 2021

Corrigé de la série de T.D. $N°3$

Exercice 1. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application ; $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$. Montrons que

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
   On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Longrightarrow \exists x \in A : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in B : y = f(x) \text{ car } A \subset B \\ &\Longrightarrow y \in f(B). \end{aligned}$$

   D'où $f(A) \subset f(B)$.

2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
   Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Longleftrightarrow f(x) \in (C \cap D) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ &\Longleftrightarrow x \in [f^{-1}(C) \ \cap \ f^{-1}(D)]. \end{aligned}$$

   D'où $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 2. Soit

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 + x - 2. \end{aligned}$$

a. La définition de $f^{-1}(\{4\})$ est :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{4\}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 2 = 4\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 6 = 0\right\}. \end{aligned}$$

On calcule $f^{-1}(\{4\})$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 6 = 0\right\} (\Delta = 25) \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x = -3 \text{ ou } x = 2\} \\ &= \{-3, 2\}. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(\{4\}) = \{-3, 2\}$.

b. La bijectivité de f :

f est bijective$\Longleftrightarrow$ f est injective et f est surjective

$i)$ f est injective ?

Méthode 1 :

$f(-3) = f(2) = 4$ mais $-3 \neq 2$. Donc

$\exists x_1 = -3 \in \mathbb{R},\ \exists x_2 = 2 \in \mathbb{R}/f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$.

Par suite, f n'est pas injective.

Méthode 2 :

$$\forall x_1, x_2 \ \in \ \mathbb{R}/f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2?$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow x_1^2 + x_1 - 2 = x_2^2 + x_2 - 2 \\ &\Longrightarrow x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2) + 1\right] = 0 \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ ou \\ x_1 = -1 - x_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc f n'est pas injective.

$ii)$ f est surjective ?

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R}/y = f(x).$$

On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longrightarrow y = x^2 + x - 2 &(1) \\ &\Longrightarrow x^2 + x - (2 + y) = 0, \ \ (\Delta = 9 + 4y). &(2) \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$: $y \in \left]-\infty, -\dfrac{9}{4}\right[$, l' équation (1) n 'admet pas de solutions. Donc f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

Finalement, f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

c. La définition de $f([-1, 1])$:

$$f([-1, 1]) = \{f(x)/x \in [-1, 1]\}.$$

On calcule $f([-1, 1])$:

on a $f(x) = x^2 + x - 2$ et $f'(x) = 2x + 1$.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Si $x \in [-1, -\dfrac{1}{2}]$, la fonction f est décroissante. Alors

$$f([-1, -\frac{1}{2}]) = [f(-\frac{1}{2}), f(-1)] = [-\frac{9}{4}, -2]$$

Si $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, la fonction f est croissante. Alors

$$f([-\frac{1}{2}, 1]) = [f(-\frac{1}{2}), f(1)] = [-\frac{9}{4}, 0].$$

Donc

$$f([-1, 1]) = [-\frac{9}{4}, -2] \cup [-\frac{9}{4}, 0] = [-\frac{9}{4}, 0].$$

d. La définition de $f^{-1}([-2, 4])$:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}([-2,4]) & = & \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-2,4]\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 2 \in [-2,4]\right\} \end{array}$$

On calcule $f^{-1}([-2, 4])$:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + x - 2 & \in & [-2,4] \Longleftrightarrow -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4 \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} x^2 + x - 2 \leq 4....(1) \\ \text{et} \\ x^2 + x - 2 \geq -2....(2) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (1) & \Longleftrightarrow & x^2 + x - 2 \leq 4 \\ & \Longleftrightarrow & x^2 + x - 6 \leq 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x-2)(x+3) \leq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x \in ([-3,2]). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (2) & \Longleftrightarrow & x^2 + x - 2 \geq -2 \\ & \Longleftrightarrow & x^2 + x \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x(x+1) \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[. \end{array}$$

Donc $f^{-1}([-2, 4]) = ([-3, 2]) \cap (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) = [-3, -1] \cup [0, 2]$.

Exercice 3. On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R} - \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}. \end{array}$$

1. On calcule $f^{-1}(\{1\})$:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\{1\}) & = & \{x \in \ \mathbb{R} - \{-2\} / f(x) \in \{1\}\} \\ & = & \left\{x \in \ \mathbb{R} - \{-2\} / \dfrac{x+1}{x+2} = 1\right\} \\ & = & \{x \in \ \mathbb{R} - \{-2\} / x + 1 = x + 2\} \\ & & \{x \in \ \mathbb{R} - \{-2\} / 1 = 2\} \\ & = & \varnothing \end{array}$$

2. On étudie l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   $i)$ l'injectivité de f.

   $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-2\} / f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2?$
   Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-2\} : f(x_1) = f(x_2)$. *On a*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{x_1+1}{x_1+2} = \frac{x_2+1}{x_2+2} \\ &\Longrightarrow (x_1+1)(x_2+2) = (x_2+1)(x_1+2) \\ &\Longrightarrow 2x_1 - x_1 + 2x_2 - x_2 = 0 \\ &\Longrightarrow x_{1-}x_2 = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

   D'où f est injective.
   $ii)$ La surjectivité de f.
   on a $y = 1$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective.
   $iii)$ La bijectivité de f.
   f est injective et f n'est pas surjective donc f n'est pas bijective.
3. On donne l'ensemble J pour lequel la fonction $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow J$ soit bijective.

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \forall y \in J, \exists x! \in \mathbb{R} - \{-2\} / y = f(x)$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Longrightarrow y = \frac{x+1}{x+2} \\ &\Longrightarrow x+1 = y(x+2) \\ &\Longrightarrow x = \frac{2y-1}{1-y} \end{aligned}$$

   $\exists x = \dfrac{2y-1}{1-y} \in \mathbb{R} - \{-2\}$ unique si $y \in \mathbb{R} - \{1\}$.
   Donc
   $f \ : \ \mathbb{R} - \{-2\} \ \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ est bijective.
4. On détermine l'application récéproque f^{-1}

$$\begin{aligned} f^{-1} \ : \ \mathbb{R} - \{1\} \ &\longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \\ y \ &\longrightarrow \ f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{1-y}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient les applications

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\longrightarrow \ f(x) = x+2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g \ : \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\longrightarrow \ g(x) = 2-x \end{aligned}$$

1. On calcule $f \circ g$

$$\mathbb{R} \overset{g}{\mapsto} \underset{\overset{\longmapsto}{f\circ g}}{\mathbb{R}} \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}$$

$$f\circ g\ :\ \mathbb{R}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$$
$$x\ \longrightarrow\ (f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$$(f\circ g)(x)=f(2-x)=-5x+12.$$

On calcule $g\circ f$

$$\mathbb{R}\overset{f}{\mapsto}\underset{\underset{g\circ f}{\longmapsto}}{\mathbb{R}}\overset{g}{\mapsto}\mathbb{R}$$

$$g\circ f\ :\ \mathbb{R}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$$
$$x\ \longrightarrow\ (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

$$(g\circ f)(x)=g(5x+2)=-5x.$$

2. Bijectivité de $g\circ f$:
   Méthode 1 :
   $i)$ $g\circ f$ est injective :$\forall x_1,x_2\in\ \mathbb{R},\ (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$?
   Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$: $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. On a

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\ &\Longrightarrow\ -5x_1=-5x_2\\ &\Longrightarrow\ x_1=x_2.\end{aligned}$$

   Donc $(g\circ f)$ est injective.
   $ii)$ $g\circ f$ est surjective :

$$\forall y\in\mathbb{R},\exists ?x\in\ \mathbb{R}: y=(g\circ f)(x)$$

   $Soit\ y\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}y=(g\circ f)(x)\ &\Longrightarrow\ y=-5x\\ &\Longrightarrow\ x=-\frac{1}{5}y.\end{aligned}$$

   Donc,

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x=-\frac{1}{5}y\in\ \mathbb{R}: y=(g\circ f)(x).$$

   D'où, $g\circ f$ est surjective.
   Finalement,
   $g\circ f$ est surjective et injective donc elle est bijective.
   Méthode 2 :

$$g\circ f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\exists! x\in\ \mathbb{R}: y=(g\circ f)(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} y &= (g \circ f)(x) \Longrightarrow y = -5x \Longrightarrow x = -\frac{1}{5}y \\ \text{Donc, } \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x &= -\frac{1}{5}y \in \mathbb{R} \text{ solution unique de } y = (g \circ f)(x). \end{aligned}$$

Finalement, $g \circ f$ est bijective.