Exo 1

1)- $A\cap(B\cup C) \overset{?}{=} (A\cap B)\cup(A\cap C)$

• Montrons que $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Soit $x\in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ et $x\in(B\cup C)$

1er cas :

Si $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$

En utilisant la remarque suivante: "Soit A un s-ensemble de E

Si $x\in A$ il est clair que $x\in A\cup\boxed{\text{ens qlq}}$ et si $x\notin A$, il est clair

que $x\notin A\cap\boxed{\text{ens qlq}}$

Pour le 1er cas

$x\in A\cap B\cup\boxed{\text{ens qlq}}$

Pour cet ensemble on prend $\boxed{A\cap C}$.

donc $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2ème cas : si $x\in C \Rightarrow x\in A\cap C$.

alors $x\in A\cap C\cup\boxed{\text{ens qlq}}$ donc on peut prendre comme

Ensemble quelconque $\boxed{A\cap B}$, alors $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, donc

dans deux cas $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

2)- Montrons que $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$

Soit $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$

1er cas : Si $x\in(A\cap B) \Rightarrow x\in A$ et $x\in B$

$\Rightarrow x\in B\cup C$ (voir la remarque précédent)

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

2ème cas :

2ème cas :

Si $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C$

$\Rightarrow x \in B \cup C$ (Voir la remarque précédente)

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. dans les deux cas on a

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (A \cap (B \cup C)$$

de (a) et (b) on a

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

On peut Demontrer l'égalité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ directement

Par les équivalences :

Soit $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

II) $\circ$ $C_E(A \cup B) \stackrel{?}{=} C_E A \cap C_E B$

Soit $x \in C_E(A \cup B) \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B$.

$\Rightarrow x \in C_E A$ et $x \in C_E B$.

d'où $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$ — (a)

$\circ$ $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$

Soit $x \in C_E A \cap C_E B \Rightarrow x \in C_E A$ et $x \in C_E B \Rightarrow$

$x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B$ — (b)

2

Exo2

$\Rightarrow x \in C_E(A\cup B)$, d'où $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A\cup B)$

de (a) et (b) on a $C_E(A\cup B) = C_E A \cap C_E B$

III) $(A\cup B)\times C \overset{?}{=} (A\times C)\cup(B\times C)$

a) Montrons que $(A\cup B)\times C \subset (A\times C)\cup(B\times C)$

Soit $n,m \in (A\cup B)\times C \Rightarrow n \in A\cup B$ et $m \in C$

1er cas : Si $n\in A \Rightarrow (n,m) \in A\times C$

$\Rightarrow (n,m) \in (A\times C)\cup(B\times C)$ (remarque précédente)

2ème cas :

Si $n \in B \Rightarrow (n,m) \in A\times C \cup (A\times C)$

(1) dans les deux cas $(A\times B)\times C \subset (A\times C)\cup(B\times C)$

b) Montrons que $(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$.

Soit $(n,m) \in (A\times C)\cup(B\times C)$.

1er cas : Si $(n,m) \in A\times C \Rightarrow n \in A$ et $m\in C \Rightarrow n \in A\cup B$ et $m \in C$

$\Rightarrow (n,m) \in (A\cup B)\times C$

2e cas : Si $(n,m) \in B\times C \Rightarrow n\in B$ et $m \in C \Rightarrow n \in B\cup A$ et

(2) $m\in C \Rightarrow (n,m) \in (A\cup B)\times C$

dans les deux cas on a : $(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$

de (a) et (b) on a $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

$\Rightarrow$

n

C

(a) Montrons que : $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) \cap (A - C)$

Soit $x \in A \cap (B - C) \Rightarrow x \in A$ et $x \in B - C$

$\Rightarrow x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ et $x \in A - C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C)$

(b) - Montrons que $(A \cap B) \cap (A - C) \subset A \cap (B - C)$

Soit $x \in (A \cap B) \cap (A - C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ et $x \in (A - C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ et $x \in (A - C)$

$\Rightarrow x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B - C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B - C)$

de (a) et (b) on a : $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$

Suite Exo1

Exo2

On considère les ensembles suivants :

$A = \{1 ; 2 ; 5\}$; $B = \{\{1 ; 2\}, 5\}$; $C = \{\{1, 2, 5\}\}$; $D = \{\phi, 1, 2, 5\}$

$E = \{5, 1, 2\}$; $F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}$; $G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$

① quelles sont les relation ou d'inclusion ?

- $A = E \subset D$
- $F \subset G$
- $B \subset G$

② - Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E - G$

$A \cap B = \{5\}$

$G \cup H = \{5, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}\}$

$E - G = \{1, 2\}$

③ - le complémentaire de A dans D

$D - A = \{\phi\}$

Exo3 : On considère les s-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$; $D = \{3, 6\}$

① - Déterminer : $B \cap C$, $C \cap D$

- $B \cap C = \{3\}$
- $C \cap D = \{6\}$

② - Déterminer $B \cup C$, $C \cup D$, Une de ces unions est-elle disjointe ?

- $B \cup C = A$
- $C \cup D = \{2, 3, 4, 6\}$

→ comme $B \cap C = \phi$, les ensembles B et C sont disjoints et la réunion $B \cup C$ est disjointe.

ce n'est pas le cas de $C \cup D$, puisque $C \cap D$ n'est pas vide

③ Determiner $C \Delta D$

- $C \Delta D = \{2, 3, 4\}$

④ - Déterminer les complémentaire dans A de B, C et D

- $A \setminus B = C$
- $A \setminus C = B$
- $A \setminus D = \{1, 2, \cancel{4}, 5, 7\}$

Exo4 : Etant donné A, B et c trois parties d'un ensemble E

Montrer que

① $(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c$

Soit $x \in (A \cap B) \cup B^c \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in B^c$

$$x \in (A \cap B) \cup B^c \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B^c) \wedge x \in (B \cup B^c)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B^c) \cap E$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cup B^c$$

Car $E = B^c \cup B$ et $A \cup B^c$ est un sous ensemble de E

②

$(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Soit $x \in (A - B) - C$ on a :

$$x \in (A - B) - C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B^c \cap C^c)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \longrightarrow \text{loi Morgan}$$
$$\Leftrightarrow x \in A - (B \cup C)$$

③ - $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$$x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$$

b) - Simplifions :

① $(\overline{A\cup B})\cap(\overline{C\cup \bar{A}})$.

$$\overline{(A\cup B)}\cap\overline{(C\cup \bar{A}} = (\bar{A}\cap\bar{B})\cap(\bar{C}\cap A)$$
$$= (\bar{A}\cap A)\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$$
$$= \phi\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$$
$$= \phi$$

② $(\overline{A\cap B})\cup(\overline{C\cap\bar{A}})$

$$\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(C\cap\bar{A})} = (\bar{A}\cup\bar{B})\cup(\bar{C}\cup A)$$
$$= (\bar{A}\cup A)\cup(\bar{B}\cup\bar{C})$$
$$= E\cup(\bar{B}\cup\bar{C})$$
$$= E$$

Suite Exo 4.

Exos :

- les éléments de $P(\{0,1,2\})$, de $P(P(P(\emptyset)))$ de $P(P(\{0,1\}))$
- les elements de la parties de $\{0,1,2\}$ est formé des $2^3=8$ éléments suivants
$\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$

- on a $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ donc $P(P(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;
et finalement $P(P(P(\emptyset)))$ posséde $2^2=4$ elements :
$P(P(P(\emptyset)))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

- on a $P(P(\{0,1\}))$ est formé des $2^4=16$ éléments suivants :
$\emptyset$; $\{\emptyset\}$; $\{\{0\}\}$; $\{\{1\}\}$; $\{\{0,1\}\}$; $\{\emptyset,\{0\}\}$; $\{\emptyset,\{1\}\}$
$\{\emptyset,\{0,1\}\}$; $\{\{0\},\{1\}\}$; $\{\{0\},\{0,1\}\}$; $\{\{1\},\{0,1\}\}$; $\{\emptyset,\{0\},\{1\}\}$;
$\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$; $\{\emptyset,\{1\},\{0,1\}\}$; $\{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$; $\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

3 - la partition de $\{1,2,3\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$; $\{\{1,2\},\{3\}\}$; $\{\{1,3\},\{2\}\}$; $\{\{2,3\},\{1\}\}$;
$\{\{1,2,3\}\}$.