

Exercice N°1 : 1) Modèle linéaire sans interactions : $\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

Plan factoriel 2^3 N = 8 essais

Le plan est construit selon l'algorithme de Yates :

N°	x_0	x_1	x_2	x_3	y (%)
1	1	-1	-1	-1	38
2	1	1	-1	-1	36
3	1	-1	1	-1	25
4	1	1	1	-1	24
5	1	-1	-1	1	31
6	1	1	-1	1	27
7	1	-1	1	1	18
8	1	1	1	1	15
Diviseur	8	8	8	8	
ai	26,75	-1,25	-6,25	-4,00	

$$a_0 = 1/8 [y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8]$$

$$a_1 = 1/8 [-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8]$$

$$a_2 = 1/8 [-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8]$$

$$a_3 = 1/8 [-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8]$$

Le modèle s'écrit : $\hat{y} = 26,75 - 1,25 x_1 - 6,25 x_2 - 4,00 x_3$

2) Au risque $\alpha = 0,05$, l'intervalle de confiance des effets principaux correspond à :

$$\left[a_i - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ; a_i + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

Avec $\sigma = 0,7$ et $N = 8$, on en déduit les résultats suivants : $a_i \pm 0,49$

$a_1 = -1,25$	$a_2 = -6,25$	$a_3 = -4,00$
$[-1,74 ; -0,76]$	$[-6,74 ; -5,76]$	$[-4,49 ; -3,51]$

Exercice N°2 :

1) La réponse étudiée y est le module d'élasticité, donné dans l'ordre de Yates.

Plan factoriel complet 2^3 $N = 8$ essais

Modèle linéaire : $\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$

N°	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1,26
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1,35
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	4,46
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	3,88
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	2,29
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1,23
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	5,11
8	1	1	1	1	1	1	1	1	5,12
Diviseur	8	8	8	8	8	8	8	8	

a_0	a_1	a_2	a_3	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{123}
3,09	-0,19	1,56	0,35	0,05	-0,07	0,12	0,22

Le modèle complet, avec les effets principaux et les interactions s'écrit :

$$\hat{y} = 3,09 - 0,19 x_1 + 1,56 x_2 + 0,35 x_3 + 0,05 x_1x_2 - 0,07 x_1x_3 + 0,12 x_2x_3 + 0,22 x_1x_2x_3$$

Il faut noter qu'avec le modèle complet il n'est pas possible d'avoir une estimation de σ .

2)

a) En négligeant les interactions AB et AC, on obtient le modèle :

$$\hat{y} = 3,09 - 0,19 x_1 + 1,56 x_2 + 0,35 x_3 + 0,12 x_2x_3 + 0,22 x_1x_2x_3$$

b) Estimation de l'écart-type σ .

N°	y expérimentale	$\hat{y}$ calculée	$(y - \hat{y})^2$
1	1,26	1,28	0,0004
2	1,35	1,33	0,0004
3	4,46	4,58	0,0144
4	3,88	3,76	0,0144
5	2,29	2,17	0,0144
6	1,23	1,35	0,0144
7	5,11	5,09	0,0004
8	5,12	5,14	0,0004
		Somme	0,0592

La variance résiduelle est estimée par : $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - p} = \frac{0,0592}{8 - 6} = 0,0296$

$N = 8$ essais $p = 6$: nombre de coefficients significatifs.

$f = (N - p) = 2$: degrés de liberté

On en déduit une estimation de l'écart-type $\sigma = 0,17$.

2) Au risque $\alpha = 0,05$, l'intervalle de confiance de chacun des effets principaux correspond

$$\hat{a} : \left[a_i - t_{\alpha}(f) \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ; a_i + t_{\alpha}(f) \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

La valeur tabulée $t_{\alpha}(f) = 4,30$ pour $\alpha = 0,05$ et $f = 2$

Avec $\sigma = 0,17$ et $N = 8$, on en déduit les résultats suivants : $a_i \pm 0,26$

$a_1 = -0,19$	$a_2 = 1,56$	$a_3 = 0,35$
$[-0,45 ; +0,07]$	$[1,30 ; 1,82]$	$[0,09 ; 0,61]$