Chapitre 4 : Le modèle actuariel de l'assurance automobile

L'assurance automobile est l'une des plus répondues. Elle comprend l'assurance responsabilité obligatoire et l'assurance dommage facultative.

I- Le modèle fréquence – coût

La réalisation d'un tarif en assurance IARD s'appuie classiquement sur l'analyse de la prime pure dans le cadre d'un modèle fréquence x coût.

1- La fréquence des sinistres

a- Le nombre de sinistres pour un seul assuré

En pratique un assuré peut être à l'origine de 0 ou d'un ou plusieurs sinistres. Donc il y a des assurés plus sinistrés que d'autres.

Si on considère que :

K_i : est le nombre de sinistres de l'assuré i pendant l'année est une variable aléatoire avec $K_i \geq 0$.

Le nombre de sinistres d'un individu (assuré i) est modélisé par la loi poisson :

pois (λ) : P (X= K) = $\frac{\boldsymbol{e^{-\lambda}\ \lambda^{k}}}{\boldsymbol{k}\ !}$

Cette loi a l'avantage de ne nécessiter qu'un seul paramètre λ.

Exemple

Une étude montre qu'en moyen, on enregistre 0,6 accidents dans une zone donnée, sur une année.

Ceci dit que : la charge annuelle suit une loi de poisson x~>P(0,6)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{e^{-0,6}\ 0.6^{2}}{2!}=0{,}098\ ,\quad P\ (\mathrm{X}=0)=\frac{e^{-0,6}\ 0.6^{0}}{0!}=0{,}54$$

Selon la loi poisson, la formule de l'espérance et de la variance de la charge totale se simplifient. L'espérance E(K) et la variance V(K) étant identiques pour le nombre total des sinistres (propriété de l'équidispersion).

b- le nombre total de sinistre

Soit N_s le nombre total des sinistres de tous les assurés qui sont en nombre de N.

$$N_s = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

$K_i \sim P(\lambda)$ Suit une loi poisson à paramètre λ

$$N_s \sim P(n\,\lambda)$$

$$E\,(N_s\,) \sim n\,\lambda$$

$$\delta(N_S\,) \sim \sqrt{n\,\lambda}$$

c- La fréquence des sinistres d'un portefeuille

La fréquence des sinistres de l'ensemble des assurés est le rapport entre le nombre des sinistres et le nombre d'assurés. Cette fréquence est une variable aléatoire dont l'espérance $E(\frac{N_s}{N})$ est appelée **la fréquence probable.**

Avec : $\boldsymbol{N_s}$ est le nombre d'assuréssinistrés.

N est le nombre d'assurés.

$$E\left(\frac{N_s}{N}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{N_s})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n\,\lambda}$$

$$\boldsymbol{E\left(\frac{N_s}{N}\right) = \lambda}$$

La variance de la fréquence : $\boldsymbol{var\left(\frac{N_s}{n}\right) = \frac{var\,(N_s)}{n^2} = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n}}$ d'où :

$$\boldsymbol{\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}}$$

2- Le coût des sinistres

Soit Y_{ij} le coût du j^{ème} sinistre de l'assuré i, c'est une variable aléatoire où j= 1,2,3,…, k_i

La charge annuelle de prestation X_i à l'assuré i est la somme d'un nombre aléatoire k_i des coûts aléatoires des sinistresY_{ij}.

$$Y_i = Y_{i1} + Y_{i2} + \cdots + y_{ij} + \cdots + Y_{iK}$$

Pour un ensemble d'assurés N, le coût du sinistre est E(y) est appelée **le coût probable d'un sinistre.**

$$\boldsymbol{E(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N}}$$

Généralement, on ne dispose pas d'une fonction de répartition théorique pour les coûts de sinistres, mais plutôt d'une statistique présentée soit sous forme d'une **densité de distribution,** soit sous la forme de **répartition cumulée.**

a- présentation de la densité de distribution

L'examen des sinistres survenus a permis d'établir la statistique des tranches de coûts suivants :

Y_{min}	Y_{max}	Nombre de sinistres	Coûts
0	1 000	129	62 128
1 000	2 000	165	241 610
2 000	3 000	408	1 101 051
3 000	4 000	10	376 221
4 000	5 000	56	251 965
5 000	10 000	90	590 219
10 000	50 000	43	742 088
50 000	L'infini	1	86 289
Total		**1 000**	**3 451 571**

1- Calculez la probabilité qu'un sinistre se situe dans une tranche quelconque.
2- Calculez le coût moyen de chaque tranche.
3- Déterminer le centre de chaque tranche.
4- Etablir la répartition cumulée des nombres et du coût des sinistres.

Réponse

1- La probabilité qu'un sinistre se situe dans une tranche $= \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ sisnitres\ par\ tranche\ N_s}}{\boldsymbol{nombre\ total\ de\ sinistres}}$

Pour la première tranche : $\frac{129}{1000} * 100 = 12{,}9\%$ appelé **la fréquence de sinistre par tranche.**

2- Le coût moyen de la tranche $= \frac{\boldsymbol{co\hat{u}t\ de\ la\ tranche}}{\boldsymbol{nombre\ de\ sisnitres\ par\ tranche\ N_s}} = \frac{\mathbf{62\ 128}}{\mathbf{129}} =$ $\mathbf{481,61.}$

3- Le centre de la tranche $= \frac{\boldsymbol{Y_{min}+Y_{max}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0+1\ 000}}{\mathbf{2}} = \mathbf{500.}$

Remarque

Le coût moyen est en général différent du centre de la tranche. A titre d'exemple, pour la tranche [10 000 à 50 000], pour laquelle le coût moyen est égal à 17 257,86 alors que le centre est de 30 000, cela signifie que dans cette tranche, nous avons plus de sinistres à faible coût que de sinistre à coûts élevés.

4- Le nombre cumulé = $N_{s1}N_{s2} = 129 + 165 = 294.$

Coût cumulé = $co\hat{u}t_{\ 1} + co\hat{u}t_2 = 62\ 128 + 241\ 610.$

Probabilité (%)	**Coût moyen**	**Centre**	**Nombre cumulé**	**Coût cumulé**
12,9	481,61	500	129	62 128
16,5	1 464,30	1 500	294	303 738
40,8	2 698,65	2 500	702	1 404 789
10,8	3 483,53	3 500	810	1 781 010
5,6	4 499,38	4 500	866	2 032 975
9,0	6 557,99	7 500	956	2 623 194
4,3	17 257,86	30 000	999	3 365 282
0,1	86 289,00	-	1 000	3 451 571

b- **paramètres de la distribution**

A partir des données de l'exemple précédent, nous pouvons calculer le coût moyen du sinistre ainsi que la variance du coût.

L'espérance

Le coût moyen d'un sinistre se calcul comme suit :

$$E(y) = \frac{coût\ total}{nombre\ de\ sinistres} = \frac{3\ 451\ 571}{1\ 000} = 3451{,}57$$

L'écart type

$$Var\ (Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

Avec l'hypothèse d'indépendance, il est possible d'écrire :

$$Variance\ totale = \sum variance\ des\ tranches\ de\ coût$$

Mais comment évaluer la variance d'une tranche de coût ?

En remplaçant le sinistre d'une tranche de classe par le centre ou le coût moyen de la classe, nous sous estimons la dispersion des charges individuelles à l'intérieur de la classe. Hors il est préférable de surestimer l'incertitude que le contraire. Pour se faire, la technique habituelle est de considérer que les charges de sinistre sont concentrées aux deux extrémités de la tranche (dispersion maximale), sachant que par ailleurs, le coût moyen de la tranche demeure inchangé (E(y)).

Ceci s'écrit, pour une tranche, comme suit :

Soit : n le nombre de sinistres de la tranche, min son planché et max son plafond et E(y) le coût moyen et α la proportion de sinistres au plafond de la tranche.

Coût moyen = α n max + (1- α) n min

=> E(Y) = α n max + (1- α) n min

=> $\propto = \frac{E(y)-min}{max-min}$

Dans ce cas $\sum Y_j^2 \quad = n_a\ [(1-\propto)min^2 + \propto max^2]$

Dans le tableau suivant nous calculons α, (1-α) et $E\ (Y^2)$ de l'exemple précédent.

α (%)	**1-α (%)**	$\sum Y_j^2$
48,2	51,8	62 128 000
46,4	53,6	39 483 000
69,9	30,1	3 057 255 000
48,4	51,6	1 337 547 000
49,6	50,1	1 147 685 000
31,2	68,8	4 353 285 000
18,1	81,9	23 025 280 000
0,0	0,0	7 445 791 521
Total		40 823 801 521

$$\propto_1 = \frac{481{,}61 - 0}{1\,000 - 0} = 48{,}2$$

D'où, la variance de l'ensemble du portefeuille :

$$var\ (y) = E(y^2) - [(E(y)]^2 = \ 40\,823\,801,\ 521 - \ 3\,451{,}571^2 = \ 2\,8\,910,\ 46$$

avec

$$E(y^2) = \frac{40\,823\,801\,521}{1000} = 40823801{,}525$$

Soit : δ= 5 376,84 (contre 4 244 avec la version faisant intervenir les carrés des coûts moyens de chaque tranche)

La charge globale du sinistre

Pour un sinistre noté X, la charge global de ce sinistre pour la compagnie d'assurance est la prime pure qui est égal à : $prime\ pure = fréquence * coût\ moyen$

Soit : $E(x) = E(k) * E(y)$

Avec : E(X) : la charge global du sinistre X

E(K) : la fréquence du risque X

E(Y) : le coût moyen du sinistre X

Exemple : si on dispose des informations suivante concernant le risque X, quelle sera la prime à payer par chaque assuré ?

E(Y)= 3 452, fréquence= $E(\frac{N_s}{N})$= 8 % => $\pi = E(\frac{N_s}{N})$* E(Y) = 8* 3 452 = 276,16

Ceci dit que chaque assuré doit payer la prime pure qui est égal à 276,16.

II/ L'étude de plafond et de franchise

1- Le plafond de garantie

Le plafond de garantie correspond au montant de prise en charge par l'organisme d'assurance en cas de réassurance.

Supposons que l'assureur se fasse réassurer en excédent de sinistres. Au-delà d'un plafond, noté PL, le réassureur prend en charge le sinistre.

* Si le montant du sinistre est inférieur au plafond **Y< PL**, la compagnie s'engage à payer tous les dommages.

* Si le montant du sinistre est inférieur au plafond **Y> PL**, la compagnie indemnise à hauteur du plafond. La différence reste à la charge de l'assuré.

Sinistre (Y)	**Assureur**	**Réassureur**
Y< PL	*Y*	*0*
Y> PL	*PL*	*Y-PL*

Exemple

Si l'assureur introduit uu plafond de garantie de l'ordre de 10 000. Quelle sera la conséquence sur la prime. (voir le tableau en fin de cours)

$$E(Y)_{plaf} = \frac{3\ 053\ 194}{1\ 000} = 3\ 063{,}19$$

$$\pi = 0{,}08 * 3\ 063{,}19 = 245DA$$

2- Le cas d'une franchise

La franchise est le montant de l'indemnisation qui reste à la charge de l'assuré.

Dans le cas où l'assureur décide d'appliquer une franchise, le tableau suivant présente la prise en charge d'un sinistre Y entre l'assureur et l'assuré.

Sinistre Y	**Assuré**	**Assureur**
Y< FR	Y	0
Y > FR	FR	Y-FR

Exemple

Si on applique une franchise de 5 000, quelles sont les conséquences sur la prime.

FR =5 000

on peut faire deux calculs :

1) $E(Y) = \frac{748\ 596}{1\ 000} = 748{,}596$

π= 0,08* 748,596 = 60 DA

2) Après franchise, le nombre de sinistrés N_s= 90+43+1=134

En cessant d'appeler sinistres les évènements où l'assureur n'intervient pas, la fréquence probables serra :

Correction de la fréquence : 1 000 $\longrightarrow$ 8%

134 $\longrightarrow$ FR_c= 1,072%

$$E(Y) = \frac{CT}{N_s} = \frac{748\ 596}{134} = 5586{,}53$$

$$\pi = \frac{1{,}072}{100} * 5586{,}53 = 60DA$$

Tranche	**Nombre de sinistres**	**Coûts**	**Coût en cas de plafond PL=10 000**	**Coût en cas de franchise FR=5 000**
0 – 1 000	129	62 128	62 128	0
1 000- 2 000	165	241 610	241 610	0
2 000- 3 000	408	1 101 051	1 101 051	0
3 000- 4 000	10	376 221	376 221	0
4 000- 5 000	56	251 965	251 965	0

5 000- 10 000	90	590 219	590 219	590 219-(90*5 000) =140129
10 000- 50 000	43	742 088	10 000	742088-(43* 5000) =527088
>50 000	1	86 289	10 000	86289-(1*5000) =81289
Total	1 000	3 451 571	**3 053 194**	**748 596**