

Correction de la série 2Exercice 1*1/ L'espérance de la variance du coût moyen*

$$E(y) = (0,4 * 10\ 000) + (0,6 * 20\ 000) = \mathbf{1600}$$

$E(y) = \mathbf{1600}$

$$Var(y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = [(0,4 * 10000^2) + (0,6 * 20000^2)] = 2\ 800\ 000$$

$$Var(y) = 2\ 800\ 000 - 1600^2 = 240\ 000$$

$Var(y) = \mathbf{240\ 000}$

$\text{ou bien: } Var(y) = E[Y - E(Y)]^2 = (1000 - 1600)^2 * 0,4 + (2000 - 1600)^2 * 0,6$ $= 240\ 000$
--

2/ L'espérance et la variance de la fréquence des sinistres

$$E(freq) = E\left(\frac{N_s}{N}\right) = \frac{(0 * 148\ 565) + (1 * 12\ 301) + (2 * 652) + (3 * 19) + (4 * 2)}{161\ 539}$$

$$= 0,0846 = 8,46\%$$

$E(freq) = \mathbf{8,46\%}$

$$Var(freq) = E(freq^2) - [E(freq)]^2$$

$$E[(freq)]^2 = \frac{(0^2 * 148\ 565) + (1^2 * 12\ 301) + (2^2 * 652) + (3^2 * 1) + (4^2 * 2)}{161\ 539}$$

$$= 0,09355$$

$$Var(freq) = 0,09355 - 0,0846^2 = 0,0864 = 8,64\%$$

3/ La prime pure

Prime pure= fréquence probable * coût moyen

$$= E(\text{fréquence}) * E(Y)$$

$$= 0,0846 * 1\ 600$$

Prime pure = 135,36

4/ En cas de franchise Fr= 100

$$E(Y) = (900*0,4) + (1900*0,6) = 1\ 500$$

$$\text{Prime pure avec franchise } \pi_{fr} = 0,0846 * 1\ 500 = 126,9$$

$\pi_{fr} = 126,9$

Exercice 2

1/ L'espérance et la variance du coût moyen

$$E(Y) = \frac{CT}{N_s} = \frac{2\ 480\ 000}{5\ 470} = 453,38$$

$E(Y) = 453,38$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

Nous commencerons à calculer le Y^2 pour chaque tranche.

$$\text{On a : } \bar{Y} = (1 - \alpha)Y_{min} + \alpha Y_{max} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{Y} - Y_{min}}{Y_{max}}$$

$$\alpha = \frac{CM_{1ere\ tranche} - 0}{Max - 0} = \frac{116,62 - 0}{200 - 0} = 0,583 \text{ avec } CM_{tranche} = \frac{\text{coût de la tranche}}{\text{nombre de sinistres}}$$

$$Y_j^2 = (1 - \alpha)Y_{min}^2 + \alpha Y_{max}^2 = (1 - 0,5831) * 0^2 + (0,6 * 200^2)$$

$Y_j^2 = 23323,42$

$$\sum_{i=1}^n Y_{j1}^2 = 2220 * Y_j^2 \Rightarrow E(Y_{j1}^2) = 2220 * 23\,323,42 = 51\,777\,992,4$$

Nombre	$CM_{tranche}$	α_j	$1 - \alpha_j$	Y_j^2	$\sum Y_j^2$
2220	116,62	0,8	0,42	23 200	51 504 000
1345	371,37	0,86	0,14	143 200	19 260 400
815	626,60	0,76	0,24	410 800	334 802 000
495	880,26	0,60	0,40	796 000	394 020 000
300	1135,67	0,45	0,55	1310 500	393 150 000
185	1367,51	0,22	0,78	1 881 400	348 059 000
110	1650,18	0,03	0,97	2 329 600	256 256 000
Total					1970395000

$$\sum Y_j^2 = \frac{1970395000}{5470} = 360\,218,46$$

$$Var(y) = 360\,218,46 - 453,38^2 = 154\,665,04$$

$Var(Y) = 154\,665,04$
--

2/ La prime pure

$$\pi = \text{fréquence} * \text{coût moyen} = 0,5 * 453,35 = 226,69$$

$\pi = 226,69$

3/ L'instauration d'un plafond de 1000

Nombre	Coût moyen avant plafond	Coût moyen après plafond	Coût après plafond
2220	116,62	116,62	258 890
1345	371,37	371,37	499 490
815	626,60	626,60	510 680
495	880,26	880,26	435 730
300	1135,67	1000	300 000
185	1367,51	1000	185 000
110	1650,18	1000	110 000
Total 5470	6148,21	4 994,84	2 299 790

$$E(Y) = \frac{CT}{N_s} = \frac{2\,299\,790}{5\,470} = 420,44$$

$$E(Y) = 420,44$$

La nouvelle prime sera $\pi_{plafond} = \text{fréquence} * E(y) = 0,5 * 420,44 = 210,22$

$$\pi_{plafond} = 210,22$$

Exercice 3

1) La prime pure :

$$\pi = E(\text{fréquence}) * E(y)$$

$$E(y) = \frac{\text{Coût total}}{N_s} = \frac{23\,690\,000}{1\,128} = 21\,001,77$$

$$\pi = 21\,001,77 * 0,3 = 6\,300,53 \text{ DA}$$

2) Si on applique une franchise de 5000 DA, on calcul la variation de la prime $\Delta\pi$.

Tranche	Nombre de sinistres	Coût total de la tranche	Coût moyen avant franchise	Coût moyen après franchise	Coût après franchise
0-2 000	107	112 799	1 054,20	0	0
2 000 -5 000	143	526 048	3 678,66	0	0
5 000 - 10 000	194	1 535 820	7 916,60	7916,60- 50000=2916,6	565 820,4
10 000 - 20 000	269	4 195 740	15 597,55	10 597,55	2 850 740,95
20 000 - 30 000	163	4 289 675	26 317,02	21 317,02	3 474 674,26
30 000 - 40 000	99	3 660 113	36 970,83	31 970,83	3 165 112,17
40 000- 50 000	60	2 861 858	47 697,63	42 697,63	2 561 857,8
50 000 – 60 000	37	2 125 129	57 435,92	52 435,92	1 940 129,04
60 000 – 70 000	22	1 525 093	69 322,41	64 322,41	141 293,02
70 000 – 80 000	13	1 068 240	82 172,31	77 172,31	1 003 240,03
Plus de 80 000	21	1 789 485	85 213,57	80 213,57	1 684 484,97
Total	1 128	23 690 000			17 387 352,64

$$E(y_{fr}) = \frac{17\,387\,352,64}{1\,128} = \mathbf{15\,414,32}$$

$$\pi_{fr} = 15\,414,32 * 0,3 = \mathbf{4\,624,29}$$

$$\Delta\pi = \frac{4\,624,29 - 6\,300,53}{6\,300,53} = \mathbf{-0,21}$$

Suite à l'instauration d'une franchise $Fr = 5\,000$ DA, la prime baisse de 21%.

Nous pouvons répondre à la question plus simplement avec la méthode suivante :

$$\text{coût} = 23\,690\,000 - [(112\,799 + 526\,048) + (1128 - 107 - 143) * 5000]$$

$$= 23\,690\,000 - [638\,847 + (878 * 5000)]$$

$$= 23\,690\,000 - 5\,028\,847$$

$$\mathbf{Coût = 18\,661\,153}$$

$$\mathbf{E(Y) = \frac{18\,661\,153}{1\,128} = 16\,543,57}$$

3) Franchise = 10 000, $\Delta\pi = ?$

4) $\text{coût} = 23\,690\,000 - [(112\,799 + 526\,048 + 1\,535\,820) + (1128 - 107 - 143 - 194) * 10\,000]$

$$\text{Coût} = 14\,675\,333$$

$$E(Y) = \frac{14\,675\,333}{1\,128} = 13\,010,85$$

$$\pi = 13\,010,85 * 0,3 = 3\,903,01$$

$$\Delta\pi = \frac{3\,903,01 - 6\,300,53}{6\,300,53} = -0,38 \text{ la prime diminue de } 38\%$$

5) Plafond = 50 000

$$\text{coût} = [112\,799 + 526\,048 + 1\,535\,820 + 4\,195\,740 + 4\,195\,740 + 4\,289\,675 + 3\,660\,113 + 286\,185] + [(37 + 22 + 13 + 21)50\,000]$$

$$\text{Coût} = 21\,832\,053 \text{ et } E(y) = \frac{21\,832\,053}{1\,128} = 19\,354,65$$

$$\pi_{pl} = 19\,354,65 * 0,3 = 5\,806,4$$

$$\Delta\pi = \frac{5\,806,4 - 6\,300,53}{6\,300,53} = -0,07 \text{ la prime sera réduite de } 7\%.$$