IV / Analyse en composants principales normées (ACP normée)

I / Introduction

Contrairement à l'ACP vu au chapitre précédent, l'ACP normée permet d'éliminer la contrainte d'échelles de mesures des caractères. En effet dans le cas où on se place sur $(\mathbb{R}^n, D_p)$, on est conduit à la diagonisation de la matrice des corrélations R qui ne dépend pas des échelles de mesures choisies pour les variables. Ce qui fait, que cette variante de l'analyse factorielle, est très utilisée en pratique.

Le pb posé dans le cas de l'ACP normée est identique à la problématique posée pour l'ACP. Il s'agit de synthétiser l'information contenue dans le tableau initial en éliminant les redondances qu'ils contient.

Soit un tableau de données quantitatives (individus x caractères). X centré. On suppose qu'à chaque individu i est affecté un poids p_i $(p_i \geq 0, \sum p_i = 1)$

$$\underset{(n,p)}{X} = \begin{cases} [X^1, \dots, X^p] & X^j \in (\mathbb{R}^n, D_p) \\ \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} & {}^tX_i \in (\mathbb{R}^p, I_p) \end{cases}$$

Remarque

L'ACP normé du tableau centré $X \Leftrightarrow$ ACP classique du tableau centré réduit $\tilde{X}$ où $(\mathbb{R}^n, D_p)$ et $(\mathbb{R}^p, I_p)$

(ACP normée, du tableau centré X) $\Leftrightarrow$ (Analyse générale du tableau centré réduit $\tilde{X}$ où $(\mathbb{R}^n, D_p)$, et $(\mathbb{R}^p, I_p)$)

II / Problème d'optimisation et solution

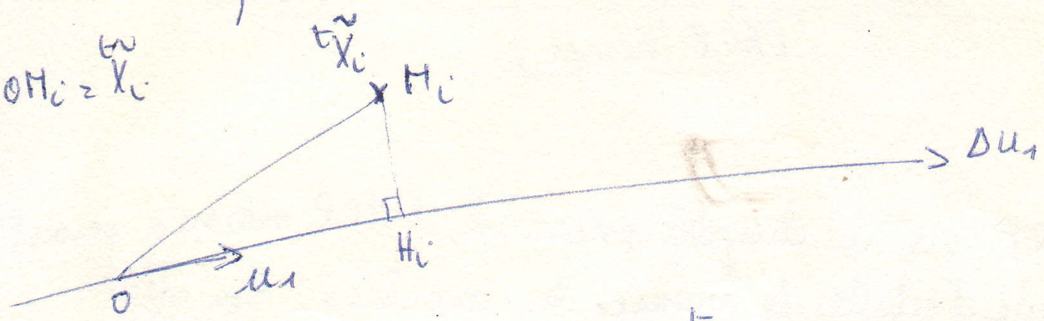
1) On se place sur $(\mathbb{R}^p, I_p)$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad {}^tX_i \in (\mathbb{R}^p, I_p)$$

On a $$\underset{(n,p)}{X} \longmapsto \underset{\substack{(n,p) \\ \text{centré-réduit}}}{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } {}^t\tilde{X}_i \in (\mathbb{R}^p, I_p)$$

a. Recherche du s.e.v E_1 qui ajuste au mieux le nuage des p^{ts} $(\dim E_1 = 1)$

Schématiquement :



H_i est la projection orthogonale de ${}^t\tilde{X}_i$ sur Δu_1

u_1 vecteur unitaire de $(\mathbb{R}^p, I_p)$ c.a.d : $\|u\|_{I_p} = 1$

On a $\forall j = 1, \ldots, p$ $\quad X^j \longrightarrow \tilde{X}^j = \dfrac{X^j}{\|X^j\|_{D_p}}$

$\bar{X}^j = 0 \Rightarrow \|X^j\|_{D_p} = \sigma_j$ ecart-type de la variable j

$\left(\text{var}(X^j) = \|X^j - \bar{X}^j \mathbb{1}\|^2_{D_p} = \|X^j\|^2_{D_p} = \sigma_j^2 . \right)$

Dans ce cas : X_i se transforme en $\tilde{X}_i \in \mathbb{R}^p$

$\tilde{X}_i = (\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^p)$ $\quad \tilde{X}_i^j = \dfrac{X_i^j}{\sigma_j}$

Proposition 1 :

$\forall i = 1, \ldots, n$, on a $\tilde{X}_i = X_i . D_{1/\sigma}$ avec

$$D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_p} \end{pmatrix}$$ σ_j ecart-type de la variable j.

Preuve

$$X_i D_{1/\sigma} = (X_i^1, \ldots, X_i^p) \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_p \end{pmatrix} = \left(\frac{X_i^1}{\sigma_1}, \frac{X_i^2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{X_i^p}{\sigma_p} \right)$$

$$= (\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^p) = \tilde{X}_i$$

Proposition 2 :

On posant $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix}$ alors $\tilde{X} = X D_{1/\sigma}$

Preuve

$$X D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} X_1 D_{1/\sigma} \\ \vdots \\ X_n D_{1/\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix} = \tilde{X}$$

__Proposition 3__

$\forall i = 1, \dots, n \; ; \; \overline{OH_i} = \tilde{X}_i u_1 = X_i D_{1/\sigma} u_1$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix}$$

__Preuve__

on a : $\overline{OH_i} = \langle u_1, {}^t\tilde{X}_i \rangle_{I_p} = \tilde{X}_i u_1 = X_i D_{1/\sigma} u_1$

__Proposition 4__

On pose $W_i^{(1)} = \overline{OH_i} = X_i D_{1/\sigma} u_1$

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} W_1^{(1)} \\ \vdots \\ W_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$W^{(1)} = X D_{1/\sigma} u_1$ (X tableau centré)

__Preuve__

$$* \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_p \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} X_1 D_{1/\sigma} \\ \vdots \\ X_n D_{1/\sigma} \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix} u_1 = \tilde{X} u_1$$

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 D_{1/\sigma} u_1 \\ \vdots \\ X_n D_{1/\sigma} u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} D_{1/\sigma} u_1 = X D_{1/\sigma} u_1$$

__Problème d'optimisation__

On cherche le vecteur normé u_1^* de $\mathbb{R}^p$ tq $\|W^{(1)}\|^2_{D_p}$ soit maximale (critère M.C.)

$\|W^{(1)}\|^2_{D_p} = \sum_{i=1}^n \|W_i^{(1)}\|^2_{D_p} = \sum_{i=1}^n (\overline{OH_i})^2$ ($\Leftrightarrow \sum e_i^2$ minimale)

Pb à resoudre $\max\limits_{\|u_1\|=1} \|W^{(1)}\|^2_{D_p} = \max\limits_{u_1, \|u_1\|=1} {}^tW^{(1)} D_p W^{(1)}$

$$\max_{u_1, \|u_1\|=1} ({}^tu_1 D_{1/\sigma} {}^tX) D_p (X D_{1/\sigma} u_1)$$

__Remarques__

1/ Si X est un tableau centré on a :

${}^tX D_p X = V$ matrice des variances covariances

2/ Si V est la matrice des variances-covariance, $D_{1/\sigma}$ est la matrice diagonale des ecart type σ_j de la variable j alors

$$R = D_{1/\sigma} V D_{1/\sigma}$$ R matrice de corrélation

3/ On a :

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_n^{(1)} \end{pmatrix}$$ tq $w_i^{(1)}$ est affecté du poids p_i alors

$$\bar{w}^{(1)} = 0 \quad \left(\bar{w}^{(1)} = {}^t w^{(1)} D_p \mathbb{1}_{n\times 1}\right)$$

Resolution du pb : ${}^t u_1 R u_1$ - $\|u_1\|_{I_p} = 1$

Le Lagrangien s'écrit : ${}^t u R u - \lambda({}^t u u - 1)$

Condition necessaire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \iff 2\,{}^t u_1 R + 2\lambda\,{}^t u_1 = 0$$

$$\iff {}^t u_1 R = \lambda\,{}^t u_1$$

$$\iff R u_1 = \lambda u_1 .$$

D'où ${}^t u_1 R u_1 = {}^t u_1 \lambda u_1 = \lambda\,{}^t u_1 u_1 = \lambda$

Le maximum est atteint pour u_1^* vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice R.

<u>Generalisation</u>

Les r premiers axes factoriels $\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_r$ sont respectivement les axes engendrés par les r vecteurs propres unitaires $u_1^*, \ldots, u_r^*$ associés au r ~~vale~~ plus grandes valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de la matrice des correlation R.

$$\bar{w}^{(1)} = {}^t(X D_{1/\sigma}) D_p \mathbb{1} = D_{1/\sigma}\,{}^t X D_p \mathbb{1}$$

On a $\bar{X}^j = 0 \quad \forall j = 1, p$

$${}^t X D_p = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^1 p_1 & X_2^1 p_2 & \cdots & X_n^1 p_n \\ X_1^2 p_1 & \cdots & \cdots & X_n^2 p_n \\ X_1^p p_1 & \cdots & \cdots & X_n^p p_n \end{pmatrix}$$

$${}^t X D_p \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^1 p_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_i^p p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}^1 \\ \vdots \\ \bar{X}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\bar{w}^{(1)} = D_{1/\sigma} 0 = 0$

$\|w^{(1)}\|_n^2 = Var(w^{(1)})$ en effet

$$\|w^{(1)}\|^2_{D_p} = \|w^{(1)} - \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\overline{w}^{(1)}}}\|^2_{D_p} = Var(w^{(1)}).$$

Remarque.

Le pb d'optimisation $\max\limits_{\|u\|=1} {}^t u_1 D_{1/\sigma} {}^t X D_p X D_{1/\sigma} u$ peut s'énoncer ainsi

" Rechercher l'axe Δu_1 (ou u_1) tq la ~~droite~~ variable $w^{(1)}$ contenant les projections des n pts (${}^t\tilde{X}_i$, $i=1,\dots,n$) sur cette axe soit de variance maximale "

On a : $\max\limits_{u_1^*, \|u_1^*\|=1} Var(w^{(1)})$.

En définitive :, pb $\max\limits_{u_1^*, \|u_1^*\|=1} {}^t u_1 R u_1$

2) On se place sur $(\mathbb{R}^n, D_p)$

$$\underset{(n,p)}{X} = (X^1, X^2, \dots, X^p) \quad X^j \in \mathbb{R}^n$$

X tableau des données initiales ; $\tilde{X}$ tableau des données centré réduit

$\tilde{X}$ s'écrit : $\underset{(n,p)}{\tilde{X}} = (\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^p)$

avec $\tilde{X}^j = \begin{pmatrix} \frac{x_1^j - \bar{x}^j}{\sigma_j} \\ \vdots \\ \frac{x_n^j - \bar{x}^j}{\sigma_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_j} \left(X^j - \bar{X}^j \mathbb{1} \right) \in \mathbb{R}^n$

$\bar{X}^j$ moyenne de la variable j, σ_j son écart-type.

Remarque.

$\|\tilde{X}^j\|_{D_p} = 1$ en effet.

$$\left\|\frac{1}{\sigma_j}(X^j - \bar{X}^j\mathbb{1})\right\|_{D_p} = \frac{1}{\sigma_j} {}^t(X^j - \bar{X}^j\mathbb{1}) D_p (X^j - \bar{X}^j\mathbb{1}) = \frac{1}{\sigma_j}\|X^j - \bar{X}^j\mathbb{1}\| = \frac{\sigma_j}{\sigma_j} = 1$$

On procède de la m manière que ds le chp précédent.

Le pb d'optimisation lié à la recherche de l'axe Δu_1 qui ajuste au mieux le nuage des points $\{\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^p\}$ s'énonce.

$$\max\limits_{s, \|s\|=1} \sum_{j=1}^{p} \|v^j\|^2 \iff \max\limits_{s, \|s\|_{D_p}=1} \|V\|^2_{D_p} = {}^t V V$$

$V = {}^t\tilde{X} D_p s$ ($\tilde{X}$ tableau centré réduit)

solution du pb d'optimisation.

$${}^t V V = {}^t({}^t\tilde{X} D_p s) . ({}^t\tilde{X} D_p s) = {}^t s D_p \tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p s$$

Lagrangien $\mathcal{L}(u) = {}^t s D_p \tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p s - \lambda ({}^t s D_p s - 1)$ $\quad (\|s\|_{D_p} = 1)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u} = 2\,{}^t s D_p \tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p - 2\lambda\,{}^t s D_p = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t s D_p \tilde{X} {}^t\tilde{X} \cancel{D_p} - \lambda\,{}^t s \cancel{D_p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{D_p \tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p s = \lambda s D_p}$$

$$\Leftrightarrow {}^t\tilde{X} \tilde{X} D_p s = \lambda s.$$

s est donc vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice $\tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p$.

<u>Remarque</u>

Les r premiers axes factoriels $\Delta u_1, \ldots, \Delta u_r$ sont ~~engendr~~ resp les axes passant par l'origine et engendrés par les r vecteurs propres normés associés au r plus grandes valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de la matrice $\tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p$.

III/ Relation entre sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Résultat (analogue à l'A.C.P)

les matrice $\tilde{X} {}^t\tilde{X} D_p$ et ${}^t\tilde{X} D_p \tilde{X}$ sont les m̂ valeurs propres.

<u>Proposition</u>

$\forall r \geq 1$ on a :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\, {}^t\tilde{X} D_p s_r \\ s_r = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\, \tilde{X} u_r \end{cases}$$

$\tilde{X}$ tableau centré-reduit

<u>Preuve</u>

voir chapitre precedent.

IV/ Représentation simultanée des individus et des caractères sur les axes factoriels.

1/ Cas où l'on se place sur $(\mathbb{R}^p, I_p)$

Soient $\Delta u_1, \ldots, \Delta u_r$ les r axes factoriels

<u>- Projection des individus.</u>

$$\forall \alpha \geq 1 \quad w^{(\alpha)} = \tilde{X} u_\alpha = \begin{pmatrix} w_1^{(\alpha)} \\ \vdots \\ w_n^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } w_i^{(\alpha)} = \tilde{X}_i u_\alpha$$

On a

- $w_i^{(\alpha)}$ est la projection de l'individu i sur l'axe Δu_α
- $w^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^n$ projection des n individus sur l'axes Δu_α

- Projection des caractères

$\forall \alpha \geq 1$

$$V^{(\alpha)} = \sqrt{\lambda_\alpha}\, u_\alpha = \begin{pmatrix} v_1^{(\alpha)} \\ \vdots \\ v_p^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } v_j^{(\alpha)} = (\sqrt{\lambda_\alpha}\, u_\alpha)_j$$

- $v_j^{(\alpha)}$ = j^{eme} composante du vecteur $\sqrt{\lambda_\alpha}\, u_\alpha$, est la projection de la variable j sur Δu_α.
- $V^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^p$, les p projections des p variables sur Δu_α.

2/ Cas où l'on se place sur $(\mathbb{R}^n, D_p)$

Soient $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_r}$ les r premiers axes factoriels.

- Projection des variables sur l'axe factoriels Δ_{s_α}

On a :

$$V^{(\alpha)} = {}^t\tilde{X} D_p s_\alpha = \begin{pmatrix} V_1^{(\alpha)} \\ \vdots \\ V_p^{(\alpha)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{X} \text{ tableau centré reduite} \\ D_p \text{ metrique des poids} \\ s_\alpha \text{ vect } p \in \mathbb{R}^n \text{ de v.p } \lambda_\alpha \text{ de la matrice } \tilde{X}{}^t\tilde{X} D_p \end{cases}$$

$V_j^{(\alpha)}$ = projection D_p orthogonale de la variable j sur l'axe factoriel Δ_{s_α}

- Projection des individus sur l'axe factoriel Δ_{s_α}

Sur Δu_α on a

$$W^{(\alpha)} = \tilde{X} u_\alpha \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{X} \text{ tableau centré réduit} \\ u_\alpha \ \vec{vp} \text{ associé à la v p } \lambda_\alpha \text{ de la matrice } R = {}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} \end{cases}$$

on a $u_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\, {}^t\tilde{X} D_p s_\alpha$

$\Rightarrow W^{(\alpha)} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\, \tilde{X}{}^t\tilde{X} D_p s_\alpha \qquad s_\alpha\ \vec{vp}$ associé à λ_α de la matrice $\tilde{X}{}^t\tilde{X} D_p$.

$$W^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\, \lambda_\alpha s_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}\, s_\alpha \in \mathbb{R}^n.$$

$$W^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} w_1^{(\alpha)} \\ \vdots \\ w_n^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad \text{où } w_i^{(\alpha)} = (\sqrt{\lambda_\alpha}\, s_\alpha)_i$$

$(s_\alpha)_i$ la i^{eme} composante du vecteur de $\mathbb{R}^n$, s_α

$w_i^{(\alpha)}$ représente la projection de l'individu i sur Δs_α.

V / Aides à l'interprétation

1/ Qualité globale de représentation

Def 1

On appelle inertie expliqué par l'axe factoriel Δu_α, la quantité

$$I_{\Delta u_\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Remarques

1/ Dans le cas de l'ACP normé, on est conduit à diagonaliser la matrice R des corrélations. On sait que $\sum \lambda_i = \text{tra}\, R \Rightarrow$ si R est d'ordre p $\text{tra}\, R = p \Rightarrow I_{\Delta u_\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{p}$

2/ Le pourcentage d'inertie expliqué par Δu_α est donné par : $100\, I_{\Delta u_\alpha} = \frac{100}{p} \lambda_\alpha$ cette quantité mesure la quantité d'information recueillie sur Δu_α

Def 2

On appelle inertie expliqué par le plan factoriel $(\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'})$, la quantité :

$$I_{\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'}} = \frac{\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha'}}{\sum_i \lambda_i}$$

Remarques

1/ Comme $\sum \lambda_i = \text{tra}\, R$, si R est d'ordre p : on a

$$I_{\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'}} = \frac{\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha'}}{p}$$

2/ En général, on utilise l'indicateur $I_\Delta . 100$ pour mesurer ~~l'au~~ qualité globale de représentation. Cet indicateur donne le pourcentage d'information du tableau de départ recueille sur l'axe, plan ou espace.

3/ En pratique, dès que le pourcentage d'inertie expliqué dépasse 70 % on dit qu'on a une bonne visualisation.

2/ Interprétation des nouvelles variables.

a) Corrélation entre nouvelles et anciennes variables.

Soit $w^\alpha = Y^\alpha$, une nouvelle variable. $\tilde{X}^j$ le vecteur normé représentant l'ancienne $j^{\text{ème}}$ variable. On a.

$\forall j = 1, \dots, p \quad r(Y^\alpha, X^j) = (\lambda_\alpha)^{\frac{1}{2}} u_\alpha^j$ où

- λ_α, la $\alpha^{\text{ième}}$ vp de la matrice des corrélations R $(\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_\alpha)$
- u_α^j, projection D_p orthogonale de $\tilde{X}^j$ sur Δu_α

Preuve

$Y^\alpha = W^\alpha = \tilde{X} . u_\alpha$.

$$r(Y^\alpha, \tilde{X}^j) = \frac{cov(Y^\alpha, \tilde{X}^j)}{(Var\, Y^\alpha)^{1/2} (Var\, \tilde{X}^j)^{1/2}} = \frac{{}^t\tilde{X}^j D_p Y^\alpha}{(\lambda_\alpha)^{1/2} . 1}$$

car $Var(Y^\alpha) = Var(W^\alpha) = \lambda$ (déjà vu).

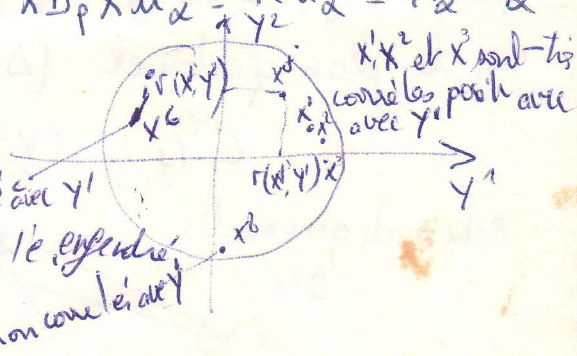
$\| \tilde{X}^j \|^2_{D_p} = Var(\tilde{X}^j) = 1$

$$\Rightarrow r(Y^\alpha, \tilde{X}^j) = \frac{{}^t\tilde{X}^j D_p . \tilde{X} u_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}}$$

Les calculs s'effectuent pour chaque CP Y^α, pour tout couple de C.P $Y^{\alpha_1}, Y^{\alpha_2}$. exp On représente les corrélations sur une figure dite « cercle des corrélations » où chaque v. $\tilde{X}^j$ est repéré par un p^t d'abscisse $r(Y^{\alpha_1}, X^j)$ et d'ordonnée $r(Y^{\alpha_2}, X^j)$

or ${}^t\tilde{X}^j D_p \tilde{X} u_\alpha$ est la j^{eme} composante du vecteur ${}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} u_\alpha = R u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha$

$$\Rightarrow r(Y^\alpha, \tilde{X}^j) = \frac{\lambda_\alpha (u_\alpha)_j}{\sqrt{\lambda_\alpha}} = \sqrt{\lambda_\alpha} (u_\alpha)_j$$



Ds le cas de l'ACP normé le cercle est la projection de l'ensemble des variables centrées réduites sur l'e. engendré par (Y^1, Y^2)

b) Contribution

b.1/ Contribution relative

- Cas des individus.

Def :

On appelle contribution relative de l'individu i sur l'axe factoriel Δu_α la quantité

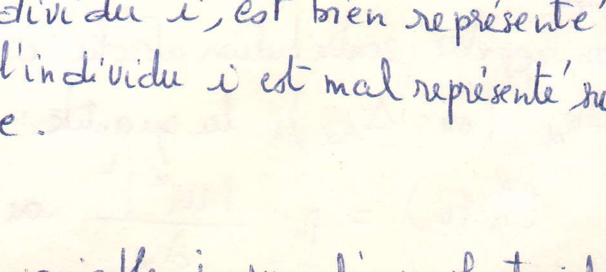
$$C_r^\alpha(i) = \frac{|W_i^\alpha|^2}{\| {}^t\tilde{X}_i \|^2}$$ où $\left\{ \begin{array}{l} W_i^\alpha \text{ mesure algébrique de la projection de l'ind } i \text{ sur } \Delta u_\alpha \\ {}^t\tilde{X}_i \in (\mathbb{R}^p, I_p),\ \tilde{X}_i\ i^{eme} \text{ ligne du tableau } \tilde{X} \text{ centré-réduit.} \end{array} \right.$

Remarques

1/ $C_r^\alpha(i)$ ~~représente~~ ~~la~~ mesure la qualité de représentation de l'ind i sur Δu_α

2/ $\forall \alpha, \forall i, \quad 0 \leq C_r^\alpha(i) \leq 1$, en effet

$$C_r^\alpha(i) = \frac{|W_i^\alpha|^2}{\| {}^t\tilde{X}_i \|^2} = \left(\frac{W_i^\alpha}{\| {}^t\tilde{X}_i \|} \right)^2 = (\cos\theta)^2 \in [0, 1]$$



3/ Plus $C_r^\alpha(i)$ est proche de 1, plus l'individu i, est bien représenté sur Δu_α. Si $C_r^\alpha(i)$ est proche de 0, l'individu i est mal représenté sur Δu_α et ne peut être interpreter sur cet axe.

- Cas des caractères

Def :

On appelle contribution relative de la variable j sur l'axe factoriel Δu_α ou Δv_α (selon qu'on le se place sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$), la quantité :

$$C_r^\alpha(j) = \frac{(V_j^\alpha)^2}{\|\tilde{X}^j\|^2_{D_p}}$$

V_j^α mesure algébrique de la projection D_p-orthogonal de X^j sur Δs_α.
$\tilde{X}^j$ = le vecteur représentant la variable j centré - réduit

Remarques.
1/ Comme $\tilde{X}^j$ est centré réduit $Var(\tilde{X}^j) = \|\tilde{X}^j\|^2 = 1 \Rightarrow$

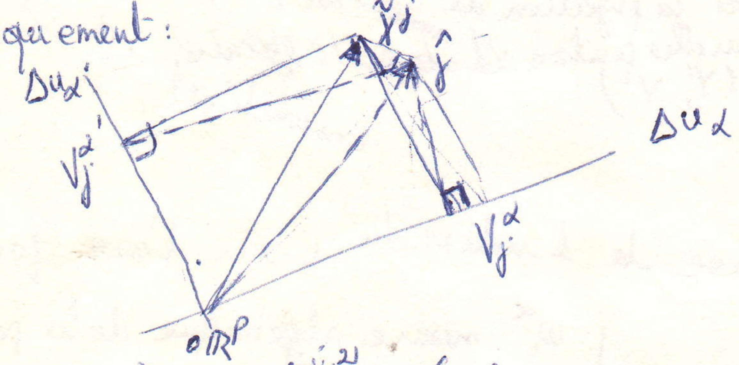
$$C_r^\alpha(j) = (V_j^\alpha)^2$$

2/ $C_r^\alpha(j)$ mesure la qualité de représentation de la variable j sur Δu_α (ou Δs_α)

3/ $C_r^{\alpha,\alpha'}(j) = C_r^\alpha(j) + C_r^{\alpha'}(j)$ la qualité de représentation du caractère j sur le plan factoriel $(\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'})$ avec

$$C_r^\alpha(j) = (V_j^\alpha)^2 \text{ et } C_r^{\alpha'}(j) = (V_j^{\alpha'})^2$$

Schématiquement :



$\hat{j}$ est la proj D_p-ortho de $\tilde{X}^j$ sur le plan factoriel $(\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'})$

On a $d^2(\hat{j}, O_{\mathbb{R}^p}) \leq \|\tilde{X}^j\|^2_{D_p}$ (hyp est supérieur aux longueurs des autres côtés d'un triangle ~~rec~~ rectangle)

or $d^2(\hat{j}, O_{\mathbb{R}^p}) = (V_j^\alpha)^2 + (V_j^{\alpha'})^2 \leq \|\tilde{X}^j\|^2_{D_p} = 1$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq C_r^\alpha(j) + C_r^{\alpha'}(j) \leq 1$$

$\Rightarrow$ La variable $\hat{j}$ se projecte à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, appelé : cercle des corrélations.

b.2/ Contribution absolue :

- Cas des individus.

Def :
On appelle contribution absolue pour la construction de l'axe factoriel Δu_α (ou Δs_α), la quantité :

$$C_a^\alpha(i) = p_i \frac{|w_i^\alpha|^2}{\lambda_\alpha} \quad \text{où}$$

p_i poids affecté à l'individu i
w_i^α mesure algébrique de la proj orthogonale de l'ind i sur Δu_α
λ_α Vp associée au $\vec{vp}$ u_α de la

Remarques :

1/ $C_a^\alpha(i)$ la part de l'ind i pour la construction de l'axe factoriel

2/ On $\|w^\alpha\|^2_{D_p} = Var(w^\alpha) = {}^t w^\alpha D_p w^\alpha$ avec $w^\alpha = \tilde{X}.u_\alpha$ ($\tilde{X}$ tableau centré-réduit) $\Rightarrow$ $\|w^\alpha\|_{D_p} = {}^t(\tilde{X}u_\alpha)\, D_p\, (\tilde{X}u_\alpha)$

$$= {}^t u_\alpha ({}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} u_\alpha)$$

$$= {}^t u_\alpha \lambda_\alpha u_\alpha = \lambda\, {}^t u_\alpha u_\alpha = \lambda_\alpha$$

$$\sum_{i=1}^n C_a^\alpha(i) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{|w_i^\alpha|^2}{\lambda_\alpha} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_{i=1}^n p_i (w_i^\alpha)^2 = \frac{1}{\lambda_\alpha} \|w^\alpha\|^2_{D_p} = 1$$

D'où $\forall \alpha$, $\forall i = 1, \dots, n$, $0 \leq C_a^\alpha \leq 1$

Si $C_a^\alpha(i)$ est proche de 1, on dit que l'individu tend à tirer l'axe factoriel.

3/ La contribution absolue de l'individu pour la construction du plan factoriel, $(\Delta u_\alpha, \Delta u_{\alpha'})$ se calcule en cumulant les contributions absolues de l'individu i sur les axes, c.a.d

$$C_a^{\alpha,\alpha'}(i) = C_a^\alpha(i) + C_a^{\alpha'}(i) = p_i \frac{(w_i^\alpha)^2 + (w_i^{\alpha'})^2}{\lambda_\alpha}$$

4/ La part des individus i_1 et i_2 pour la construction de l'axe factoriel Δu_α est la somme des parts de chacun d'eux.

$$C_a^\alpha(i_1, i_2) = C_a^\alpha(i_1) + C_a^\alpha(i_2)$$

_Cas des caractères.

Def :

On appelle contribution absolue de la variable j, pour la construction de l'axe factoriel Δu_α (Δs_α), la quantité :

$$C_a^\alpha(j) = \frac{|V_j^\alpha|^2}{\lambda_\alpha} \quad \text{où} \quad \left|\ \begin{array}{l} V_j^\alpha \text{ projection } D_p\text{-orthogonale de la variable } j \\ \text{sur } \Delta s_\alpha \end{array}\right.$$

Remarque

$\forall j = 1, \dots, p$ on a $0 \leq C_a^\alpha(j) \leq 1$, en effet :

$$\sum_{j=1}^p C_a^\alpha(j) = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_{j=1}^p |V_j^\alpha|^2 = \frac{1}{\lambda_\alpha} \cdot \lambda_\alpha = 1 .$$

$V_j^\alpha = j^{\text{ème}}$ composante de $\sqrt{\lambda_\alpha}\, u_\alpha$. $\sum_{j=1}^p |V_j^\alpha|^2 = \|V_j^\alpha\|^2_{D_p} = \|\lambda_\alpha u_\alpha\|^2_{D_p} = \lambda_\alpha$.