Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique

Année universitaire 2020/2021

1ère année Licence

Module : Analyse 1

Corrigé de la série de TD N°1

Exercice N°1

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 3\} =]0, 3[$
   - **La borne sup de E_1** : est le plus petit des majorants. L'ensemble des majorants de E_1 est $[3, +\infty]$. Le plus petit de ses majorants est 3, donc $\boxed{\sup E_1 = 3}$.
   - **Le max de E_1** : puisque $\sup E_1 = 3$ et $3 \notin E_1$, alors $\boxed{\max E_1 \text{ n'existe pas}}$.
   - **La borne inf de E_1** : est le plus grand des minorants. L'ensemble des minorants de E_1 est $] - \infty, 0]$. Le plus grand de ses minorants est 0, donc $\boxed{\inf E_1 = 0}$.
   - **Le min de E_1** : puisque $\inf E_1 = 0$ et $0 \notin E_1$, alors $\boxed{\min E_1 \text{ n'existe pas}}$.
2. $E_2 = \{x \in \mathbb{R} | x^3 > 3\} = \{x \in \mathbb{R} |\ x\ >\ \sqrt[3]{3}\} =]\sqrt[3]{3}, +\infty[$
   - **La borne sup de E_2** : est le plus petit des majorants. L'ensemble des majorants de E_2 est vide, donc $\boxed{\sup E_2 \text{ n'existe pas}}$.
   - **Le max de E_2** : puisque $\sup E_2$ n'existe pas, alors $\boxed{\max E_2 \text{ n'existe pas}}$.
   - **La borne inf de E_2** : est le plus grand des minorants. L'ensemble des minorant est $] - \infty, \sqrt[3]{3}]$. Le plus grand de ses minorants est $\sqrt[3]{3}$, donc $\boxed{\inf E_2 = \sqrt[3]{3}}$.
   - **Le min de E_2** : puisque $\inf E_2 = \sqrt[3]{3}$ et $\sqrt[3]{3} \notin E_2$ alors $\boxed{\min E_2 \text{ n'existe pas}}$.
3. $E_3 = \{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, ..., 2\} \Longrightarrow E_3 = [1, 2[$
   - **La borne sup de E_3** : est le plus petit des majorants. L'ensemble des majorants de E_3 est $[2, +\infty]$. Le plus petit de ses majorants est 2, donc $\boxed{\sup E_3 = 2}$.
   - **Le max de E_3** : puisque $\sup E_3 = 2$ et $2 \notin E_3$, alors $\boxed{\max E_3 \text{ n'existe pas}}$.
   - **La borne inf de E_3** : est le plus grand des minorants. L'ensemble des minorants de E_3 est $] - \infty, 1]$. Le plus grand de ses minorants est 1, donc $\boxed{\inf E_3 = 1}$.

- **Le min de E_3** : puisque inf $E_3 = 1$ et $1 \in E_3$, alors $\boxed{\min E_3 = 1}$.

4. $E_4 = \{\frac{-1+2n}{3+n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}..., 2\} \Longrightarrow E_4 = [\frac{1}{4}, 2[$
   - **La borne sup de E_4** : est le plus petit des majorants. L'ensemble des majorants de E_4 est $[2, +\infty[$. Le plus petit de ses majorants est 2, donc $\boxed{\sup E_4 = 2}$.
   - **Le max de E_4** : puisque sup $E_4 = 2$ et $2 \notin E_4$, alors $\boxed{\max E_4 \text{ n'existe pas}}$.
   - **La borne inf de E_4** : est le plus grand des minorants. L'ensemble des minorants de E_4 est $]-\infty, \frac{1}{4}]$. Le plus grand de ses minorants est $\frac{1}{4}$, donc $\boxed{\inf E_4 = \frac{1}{4}}$.
   - **Le min de E_4** : puisque inf $E_4 = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} \in E_4$, alors $\boxed{\min E_4 = \frac{1}{4}}$.

5. $E_5 = \{\frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2\} = \{\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1\} = [\frac{1}{2}, 1]$.
   - **La borne sup de E_5** : est le plus petit des majorants. L'ensemble des majorants de E_5 est $[1, +\infty[$. Le plus petit des majorants est 1, alors $\boxed{\sup E_5 = 1}$.
   - **Le max de E_5** : puisque sup $E_5 = 1$ et $1 \in E_5$, alors $\boxed{\max E_5 = 1}$.
   - **La borne inf de E_5** : est le plus grand des minorants. L'ensemble des minorants de E_5 est $]-\infty, \frac{1}{2}]$. Le plus grand de ses minorants est $\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\inf E_5 = \frac{1}{2}}$.
   - **Le min de E_5** : puisque inf $E_5 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in E_5$, alors $\boxed{\min E_5 = \frac{1}{2}}$.

Exercice N°2

A et B sont deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrons que si A $\subset$ B $\Longrightarrow$ sup A $\leq$ sup B et inf B $\leq$ inf A .

   a) **A $\subset$ B $\Longrightarrow$ sup A $\leq$ sup B**

   Puisque $\left.\begin{array}{l} B \text{ est majorée} \\ B \subset \mathbb{R} \\ B \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{sup B existe}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} A \text{ est majorée} \\ A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{sup A existe}$

   Alors, $\forall x \in$ B $\Longrightarrow x \leq$ sup B.

   Et comme A $\subset$ B, donc $\forall x \in$ A $\Longrightarrow x \leq$ sup B.

   Donc sup B est un majorant de A et sup A est le plus petit des majorants de A, alors

   $\boxed{\text{sup A} \leq \text{sup B}}$

b) $\mathbf{A \subset B \Longrightarrow inf\ B \leq inf\ A}$

Puisque $\left.\begin{array}{l} B \text{ est minorée} \\ B \subset \mathbb{R} \\ B \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow inf\ B\ existe$ $\qquad \left.\begin{array}{l} A \text{ est minorée} \\ A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow inf\ A\ existe$

Alors, $\forall x \in$ B $\Longrightarrow x \geq$ inf B.

Et comme A $\subset$ B, donc $\forall x \in$ A $\Longrightarrow x \geq$ inf B.

Donc inf B est un minorant de A et inf A est le plus grand des minorants de A, alors

$\boxed{\text{inf B} \leq \text{inf A}}$

2. Montrons que sup (A $\cup$ B)= max (sup A, sup B) et inf (A $\cup$ B)= min (inf A, inf B).

a) **sup (A $\cup$ B)= max (sup A, sup B) :**

Montrons les inégalités des deux sens, ce qui veut dire

$$\begin{cases} max\ (supA, supB) \leq sup\ (A \cup B) \\ max\ (supA, supB) \geq sup\ (A \cup B) \end{cases}$$

On a $\quad$ A $\subset$ (A $\cup$ B) $\Longrightarrow$ sup A $\leq$ sup (A $\cup$ B)

Et $\quad$ B $\subset$ (A $\cup$ B) $\Longrightarrow$ sup B $\leq$ sup (A $\cup$ B)

Donc

$\boxed{\text{max (sup A, supB)} \leq \text{sup (A} \cup \text{B)}}$**............(1)**

Soit $x \in$ (A $\cup$ B) alors $x \in$ A ou x $\in$ B

(A $\cup$ B) est borné $\Longrightarrow x \leq$ sup A ou $x \leq$ sup B

Donc $x \leq$ max (sup A, sup B)

En d'autre terme max (sup A, sup B) est un majorant de (A $\cup$ B) et sup (A $\cup$ B) est le plus petit des majorants

Donc $\boxed{\text{sup (A} \cup \text{B)} \leq \text{max (sup A, sup B)}}$**.....(2)**

De **(1)** et **(2)**, on déduit que

$\boxed{\text{sup (A} \cup \text{B)=max (sup A,supB)}}$

b) **inf (A $\cup$ B)= min (inf A, inf B) :**

A $\subset$ (A $\cup$ B) $\Longrightarrow$ inf A $\geq$ inf(A $\cup$ B)

B $\subset$ (A $\cup$ B) $\Longrightarrow$ inf B $\geq$ inf(A $\cup$ B)

Donc $\boxed{\text{min (inf A, inf B)} \geq \text{inf (A} \cup \text{B)}}$**......(3)**

Soit $x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \Longrightarrow x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{B}$

$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ est bornée $\Longrightarrow x \geq \inf \mathrm{A}$ ou $x \geq \inf \mathrm{B}$ (car A et B sont bornées)

Donc $x \geq \min(\inf \mathrm{A}, \inf \mathrm{B})$.

Par conséquent, min (inf A, inf B) est un minorant de (A ∪ B) et inf (A ∪B) est le plus grand des minorants. Donc

$\boxed{\inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \geq \min(\inf \mathrm{A}, \inf \mathrm{B})}$**.......(4)**

De **(3)** et **(4)**, on obtient

$$\boxed{\inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \min(\inf \mathrm{A}, \inf \mathrm{B})}$$

Exercice N°3

1. **Montrons que** $|x+y| \leq |x| + |y|$ **:**

   Par définition de la valeur absolue :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x| \ldots\ldots \mathbf{(1)}\,;$$

   $$\forall\, y \in \mathbb{R}, -|y| \leq y \leq |y| \ldots\ldots \mathbf{(2)}$$

   $\mathbf{(1)}+\mathbf{(2)} \Longrightarrow -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$.

   On a :

   $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a \ldots\ldots\mathbf{(\star)}$

   Donc

   $$\boxed{|x+y| \leq |x|+|y|}$$

2. **Montrons que** $||x|-|y|| \leq |x-y|$ **:**

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(3)}\,;$$

   $$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad |y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \ldots\ldots\ldots \mathbf{(4)}$$

   De **(3)**, on obtient : $|x|-|y| \leq |x-y|$

   De **(4)**, on obtient : $|y|-|x| \leq |x-y| \Longrightarrow |x|-|y| \geq -|x-y|$

   A partir de **(3)** et **(4)**, on obtient : $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$.

   En utilisant $\mathbf{(\star)}$, on aura :

   $$\boxed{||x|-|y|| \leq |x-y|}$$

Exercice N°4

1. **La partie entière :**

   Par définition, $x = E(x) + \alpha$, avec $\alpha \in [0, 1[$

   - $\boxed{E(1,2) = 1}$, car $1,2 = 1 + 0,2.$
   - $\boxed{E(-4) = -4}$, car $-4 = -4 + 0.$
   - $\boxed{E(\sqrt{8}) = 2}$, car $\sqrt{8} = 2,8 = 2 + 0,83.$
   - $\boxed{E(-4\pi) = -13}$, car $-12,56 = -13 + 0,44.$

2. **Démonstration :**

   - $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$

     On a :

     $$E(x) \leq x\textbf{........(1)}$$

     $$E(y) \leq y\textbf{........(2)}$$

     (1)-**(2)** $\Longrightarrow E(x) - E(y) \leq x - y$**....(3)**

     Et puisque $x \leq y \Longrightarrow x - y \leq 0$

     Alors **(3)** devient $E(x) - E(y) \leq 0$, Donc $\boxed{E(x) \leq E(y)}$.

   - $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$

     $$\begin{cases} x - 1 \leq E(x) \leq x \\ y - 1 \leq E(y) \leq y \\ x + y - 1 \leq E(x+y) \leq x + y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x \leq -E(x) < -x + 1\textbf{...............(1)} \\ -y \leq -E(y) < -y + 1\textbf{...............(2)} \\ x + y - 1 \leq E(x+y) < x + y\textbf{......(3)} \end{cases}$$

     En additionnant **(1)**, **(2)** et **(3)**, on déduit

     $-1 \leq E(x+y) - E(x) - E(y) < 2$

     Donc $\boxed{E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}}$ car les nombres entiers qu'il y a entre -1 et 2 sont 0 et 1.

   - $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

     Montrons les inégalités des deux sens, ce qui veut dire

     $$\begin{cases} E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x) \\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) \geq E(x) \end{cases}$$

— D'une part, on a :

$E(nx) \leq nx \Longrightarrow \dfrac{E(nx)}{n} \leq x.$

La fonction partie entière est croissante, alors

$E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x)$ **.....(1)**

— D'autres part, on a :

$E(x) \leq x \Longrightarrow nE(x) \leq nx \Longrightarrow E\big(nE(x)\big) \leq E(nx)$

$nE(x)$ est un entier donc $E\big(nE(x)\big) = nE(x)$

$\Longrightarrow nE(x) \leq E(nx) \Longrightarrow \dfrac{nE(x)}{n} \leq \dfrac{E(nx)}{n} \Longrightarrow E(x) \leq \dfrac{E(nx)}{n}$

$\Longrightarrow E(E(x)) \leq E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) \Longrightarrow E(x) \leq E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)$**.......(2)**

De **(1)** et **(2)**, on obtient l'inégalité recherchée $\boxed{E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*}$.

Dr. ALKAMA