

1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Soit $X \subset \mathbb{R}$, on appelle fonction réelle d'une variable réelle définie sur l'ensemble X , toute application f de X dans \mathbb{R} , qui à chaque point $x \in X$ fait correspondre un seul élément $y \in \mathbb{R}$, on note :

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

X est l'ensemble de définition de f .

Graphe d'une fonction (courbe représentative) :

Le graphe d'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma(f)$ défini comme suit : $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) / x \in X\}$, $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Opérations sur les fonctions :

Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, alors on définit :

- La somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$.
- Le produit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in X$.
- Le rapport : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in X$ et $g(x) \neq 0$.

Fonction paire et impaire : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, I un intervalle symétrique par rapport à zéro (ie, $\forall x \in I, -x \in I$), alors :

- f est dite paire $\Leftrightarrow \forall x \in I; f(-x) = f(x)$.
- f est dite impaire $\Leftrightarrow \forall x \in I; f(-x) = -f(x)$.

Exemple 1.1. *Cosinus est une fonction paire sur \mathbb{R} , en effet : $\cos(-x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Sinus est une fonction impaire sur \mathbb{R} , en effet : $\sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Fonctions périodiques : f est dite périodique sur son domaine de définition $X \Leftrightarrow \exists P > 0 / \forall x \in X : f(x + P) = f(x)$, avec $x + P \in X$. La plus petite valeur positive de P est appelée : période de f .

Exemple 1.2. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, et $P = 2\pi$ est la période de la fonction cosinus définie sur \mathbb{R} .*

Fonctions bornées : Rappelons d'abord les notions de fonctions majorées et de fonctions minorées :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(I)$ est alors l'ensemble de toutes les valeurs de f , alors :

- La fonction f est dite majorée sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est majoré, c'est à dire $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in I$.
- La fonction f est dite minorée sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est minoré, c'est à dire $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in I$.
- La fonction f est dite bornée sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est majoré et minoré à la fois, c'est

à dire $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in I$. Il convient alors de retenir la caractérisation suivante :

$$f \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in I : |f(x)| \leq A.$$

Exemple 1.3. $\sin(x)$ est une fonction bornée sur \mathbb{R} .

En effet $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin(x) \leq 1$ autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| \leq 1$.

1.1 Fonctions monotones :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, f est dite monotone si elle est croissante ou décroissante et on a les définitions suivantes :

- f est croissante si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est strictement croissante si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- f est décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f est strictement décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Limite d'une fonction :

Définissons d'abord la notion d'un voisinage d'un point

Définition 1.2. : Une partie $V(x_0) \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si elle contient un ouvert $]a, b[$ contenant x_0 .

Définition 1.3. On dit qu'une fonction f , définie sur $V(x_0)$ sauf peut être au point x_0 , admet une limite l au point x_0 si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0; \quad \forall x \in V(x_0), x \neq x_0; (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \epsilon)$$

on dit alors que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 , et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Remarquons que η est une constante positive qui dépend en général de ϵ et de x_0 .

Exemple 1.4. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 1) = -1$

On veut avoir $|f(x) - l| = |3x - 1 - (-1)| = |3x| < \epsilon$, ceci est possible dès qu'on a $|x - x_0| = |x - 0| < \frac{\epsilon}{3}$, ici $\eta = \frac{\epsilon}{3}$.

$$\text{Donc } \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta = \frac{\epsilon}{3}, \forall x \neq 0, \quad |x - 0| < \frac{\epsilon}{3} \implies |3x - 1 - (-1)| < \epsilon.$$

Remarque 1.1. f n'admet pas de limite au point $x_0 \iff \forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0; \forall \eta > 0; \exists x$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \epsilon$.

Attention : Si f admet une limite l au point x_0 , alors cette limite est unique.

Exemple 1.5. Calculons la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Lorsque $x \rightarrow 0$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille entre -1 et 1 ; donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas car elle n'est pas unique.

Limite à droite, limite à gauche :

· Pour x tend vers x_0 par "les grandes valeurs", nous définissons la limite de f à droite de x_0 par

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_d \iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \forall x, \quad x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l_d| < \epsilon.$$

· Pour x tend vers x_0 par "les petites valeurs", nous définissons la limite de f à gauche de x_0 par

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_g \iff \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \forall x, \quad x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - l_g| < \epsilon.$$

Théorème 1.4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x), (l = l_g = l_d) .$

Exemple 1.6. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$. On sait que $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si : } x \geq 0 \\ -x & \text{si : } x < 0. \end{cases}$

Calculons la limite à droite de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^> x = 0 = l_d$

à gauche de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^< (-x) = 0 = l_g,$

puisque $l_d = l_g = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

Exemple 1.7. Soit la fonction g définie comme suit : $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si : } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si : } x < 0. \end{cases}$. Etudions sa limite au point 0. Nous avons $l_d = \lim_{x \rightarrow 0}^> g(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^> (x + 1) = 1$ et $l_g = \lim_{x \rightarrow 0}^< g(x) = \lim_{x \rightarrow 0}^< (x - 1) = -1$, puisque $l_d \neq l_g$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ n'existe pas.

Limites infinies : soit $x_0 \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) > A.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) < -A.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \implies f(x) > A.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \implies f(x) < -A.$

2 Fonctions continues

2.1 Continuité en un point

Définition 2.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, f$ est continue en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) :$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad [|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

Continuité à gauche, continuité à droite

· f , définie en x_0 et à droite de x_0 , est continue à droite de $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = f(x_0) :$

· f , définie en x_0 et à gauche de x_0 , est continue à gauche de $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = f(x_0)$

Remarque 2.1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = f(x_0)$, c'est la continuité de f au point x_0 , tout simplement!

Exemple 2.1. Soit à étudier la continuité de g au point 0, avec :

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si : } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si : } x < 0. \end{cases}$$

A gauche de 0 : $l_g = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} (1 + x) = 1$

A droite de 0 : $l_d = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (1 - x) = 1$, et $g(0) = g(1 - 0) = 1$;

il vient que $l_g = l_d = g(0)$, ce qui assure la continuité de g au point $x_0 = 0$.

Remarque 2.2. f est dite discontinue en x_0 dans l'un des cas suivants :

- f n'est pas définie en x_0 ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe mais différente de $f(x_0)$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 2.2. Soit à étudier la continuité au point $x_0 = 0$, de

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas car elle n'est pas unique (lorsque $x \rightarrow 0$, $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre -1 et 1), de ce fait f est discontinue au point 0.

2.2 Continuité sur un intervalle :

Définition 2.2. Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur ce même intervalle si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. L'ensemble des fonctions continues sur I est alors noté $C(I)$.

2.3 Opérations sur les fonctions continues :

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I , et continues au point $x_0 \in I$, alors :

- Pour $(\alpha \in \mathbb{R})$, la fonction αf est continue au point x_0 .
- $(f + g)$ est continue en x_0 , la fonction produit (fg) est aussi continue en x_0 .
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- La fonction $|f|$ est continue en x_0 .

Continuité de la fonction composée : Soient f, g deux fonctions telles que $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$, avec $I, J \subset \mathbb{R}$.

Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0) \in J$. Alors la fonction composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$.

2.4 Prolongement par continuité :

Définition 2.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur I sauf en $x_0 \in I$. Supposons que f admette une limite (*finie*), l au point x_0 , alors la fonction \tilde{f} définie comme suit :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0 , et \tilde{f} est le prolongement par continuité de f au point x_0 .

Exemple 2.3. Soit $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, notons bien que h n'est pas définie au point $x = 0$, il est possible de donner un sens à h au point 0 à travers son prolongement par continuité, il suffit pour cela que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ existe.

En effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

Ainsi

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si : } x \neq 0 \\ 0 & \text{si : } x = 0. \end{cases}$$

\tilde{h} est le prolongement par continuité de h au point 0.

Théorème des valeurs intermédiaires (appelé aussi :théorème de la fonction qui change de signe)

Théorème 2.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

· f est continue sur $[a, b]$.

· $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que : $f(c) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors c est unique.

Exemple 2.4. Montrons que l'équation $x^3 + x^2 - x - 5 = 0$, admet au moins une solution dans $[-1, 2]$. Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I), à la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$, sur $[-1, 2]$. f est polynomiale, elle est donc continue sur \mathbb{R} , particulièrement sur $[-1, 2]$. Nous vérifions aisément que $f(-1) \cdot f(2) < 0$. Le (T.V.I) assure : $\exists c \in]-1, 2[/ f(c) = 0$.

3 Fonctions dérivables

Définition 3.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée "dérivée de f au point x_0 ", notée $f'(x_0)$.

3.1 Dérivée à gauche, dérivée à droite

· f est dérivable à droite, au point x_0 si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie, alors } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \text{ (dérivée à droite)}$$

· f est dérivable à gauche, au point x_0 si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie, alors } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \text{ (dérivée à gauche)}$$

Attention : f est dérivable en $x_0 \iff f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 3.1. Reprenons l'exemple de $f(x) = |x|$, définie sur \mathbb{R} . Etudions sa dérivabilité au point $x_0 = 0$. Rappelons que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le calcul de limites donne : $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$, et $f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$, comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point 0.

Définition 3.2. Une fonction f définie sur I est dite dérivable sur I , si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. L'application

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée la fonction dérivée de f .

Dérivabilité et continuité :

f est dérivable en $x_0 \implies f$ est continue en x_0 . (La réciproque n'est pas forcément vraie).

3.2 Opérations sur les fonctions dérivables :

Proposition 3.3. Soit f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors (αf) , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f+g$ et $f.g$, sont dérivables en x_0 . Le rapport $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus :

- 1) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
- 2) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- 3) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

3.3 Dérivée d'une fonction composée

Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, f dérivable en $x_0 \in I$, et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.

3.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur I , alors f' est dite dérivée d'ordre 1 de f . Si f' est dérivable sur I , alors la dérivée seconde de f notée f'' ou $f^{(2)}$ est définie par $f^{(2)} = (f')'$. Ainsi de proche en proche, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \forall n \geq 1, \quad f^{(0)} = f$$

3.5 Fonction de classe C^n

Définition 3.4. On dit qu'une fonction f , définie sur I est de classe $C^1(I)$, si elle est dérivable sur I et f' est continue sur I . f est dite de classe $C^n(I)$ ou n fois continuellement dérivable sur I , si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur ce même intervalle.

Définition 3.5. On note $C^\infty(I)$: l'ensemble des fonctions n fois continuellement dérivables sur $I, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.2. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont $C^\infty(\mathbb{R})$, toutes leurs dérivées successives existent et sont continues sur \mathbb{R} .

3.6 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 3.6. (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction vérifiant les conditions suivantes :

- f est continue sur $[a, b]$.
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$. Alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème 3.7. (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction vérifiant :

- f est continue sur $[a, b]$.
- f est dérivable sur $]a, b[$; alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exercice 3.8. (continuité/dérivabilité) : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0. \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

- 1) Etudiez la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
- 2) La fonction dérivée f' , si elle existe, est elle continue sur \mathbb{R} ?

Corrigé

· Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est le produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur \mathbb{R} . Donc sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

· Dérivabilité au point 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$,

Par le théorème de l'encadrement des limites, nous avons d'une part : pour $x > 0$: $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$; d'autre part pour $x < 0$

$x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Ce qui assure la dérivabilité de f en 0. Finalement f est dérivable sur tout \mathbb{R} , et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

2) $f'(x)$ est elle continue sur \mathbb{R} ?

· Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ est la somme de fonctions bien définies et continues sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

· Au point 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$; lorsque $x \rightarrow 0$ cette limite n'existe pas car elle n'est pas unique.

Finalement f' n'est pas continue en $x = 0$. Pour conclure : f est dérivable sur \mathbb{R} , mais n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Règle de l'Hôpital pour le calcul de limites : Si h et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de a et si $\frac{h'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a , alors $\frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)}$ admet aussi l comme limite au point a .

Exemple 3.3. Soit à calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$;

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ F.I., utilisons la règle de l'hôpital : avec $h(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{\sin(x) - \sin(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = 0$.