جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Fonctions réelles à une variable

1.1 Généralités sur les fonctions numériques

Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On appelle fonction numérique définie dans un domaine X (on dit aussi fonction réelle), toute application f telle que à chaque point x de X, on fait correspondre un seul élément y de $\mathbb{R}$. Et on écrit

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

   X est le domaine de définition de la fonction f.

2. On appelle graphe d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, l'ensemble

$$G(f) = \{(x, y)/x \in X \; et \; y = f(x)\}.$$

3. **Opérations sur les fonctions réelles** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$.
   (a) On dit que f est égale à g si et seulement si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.
   (b) On dit que f est inférieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$.
   (c) On dit que f est supérieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in X$.
   (d) La somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.
   (e) Le produit : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, $\forall x \in X$.
   (f) Le rapport : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in X$ et $g(x) \neq 0$.

4. **Propriétés générales des fonctions**
   (a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite paire si :

$$\forall x \in X, \; -x \in X \; on \; a \; f(-x) = f(x).$$

   Exemple 1.1. $f(x) = \cos(x)$ *est paire car on a*

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x).$$

   (b) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite impaire si :

$$\forall x \in X, \; -x \in X \; on \; a \; f(-x) = -f(x).$$

Exemple 1.2. $f(x) = \sin(x)$ *est impaire car on a*

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = f(x).$$

(c) On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est périodique si $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

i. $x + \alpha \in X$,

ii. $f(x + \alpha) = f(x)$.

La plus petite valeur positive de α est appelée la période de f.

Exemple 1.3. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :* $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$, *et $\alpha = 2\pi$ est la période de la fonction* $\cos(x)$ *définie sur $\mathbb{R}$.*

(d) Fonctions monotones. Soit $f : X \to \mathbb{R}$, f est dite

i. croisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

ii. strictement croisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

iii. décroisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

iv. strictement décroisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemple 1.4. *Les fonctions exponentielle exp* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et logarithme ln* :$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

(e) Fonctions bornées. La fonction f est dite

i. majorée sur X si $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in X$;

ii. minorée sur X si $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in X$;

iii. bornée sur X si $\exists M, n \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in X$;

Exemple 1.5. *La fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée car on a :*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.6.

1. *$f(x) = x^2$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$;*
2. *$f(x) = x$ est une fonction impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$;*
3. *$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$;*
4. *$f(x) = sin(x)$ est une fonction impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$;*
5. *$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}^*$;*
6. *$f(x) = cos(x)$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

1.2 Limite d'une fonction

1.2.1 Limite en un point

Définition 1.1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de X ou une extrémité de X. Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0,\ \forall x \in X, \big[\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon \big].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Remarque 1.1. N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ. Pour marquer cette dépendance on écrit $\delta(\epsilon)$.

Exemple 1.7. *1. Montrer que la fonction $f(x) = 7x - 3$ admet pour limite $l = 11$ en $x = 2$.*
On a

$$\begin{aligned} \mid f(x) - l \mid &= \mid (7x-3) - 11 \mid \\ &= \mid 7x - 14 \mid \\ &= \mid 7(x-2) \mid \\ &= 7 \mid x - 2 \mid, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \mid f(x) - l \mid < \epsilon &\Rightarrow 7 \mid x - 2 \mid < \epsilon \\ &\Rightarrow \mid x - 2 \mid < \frac{\epsilon}{7}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\epsilon}{7} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \big[\mid x - 2 \mid < \delta = \frac{\epsilon}{7} \Rightarrow \mid f(x) - 11 \mid < \epsilon \big].$$

2. Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \to -3} (3x+2) = -7,\ \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0,\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,\ \lim_{x \to 2} \frac{(x^2-9)}{x-3} = 6,$$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2-4)}{x-2} = 4$, *(ici $\frac{(x^2-4)}{x-2}$ n'est pas définie en 2).*

Proposition 1.2. *Si f admet une limite en un point x_0, cette limite est unique.*

Exemple 1.8. *Calculer la limite des fonctions suivantes :* $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ *n'est pas unique, elle est entre [-1,1], donc elle n'existe pas.*

Définition 1.3. Soit f une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 et on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\ |\ x - x_0\ |< \delta \Rightarrow f(x) > A\big].$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 et on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\ |\ x - x_0\ |< \delta \Rightarrow f(x) < -A\big].$$

Remarque 1.2.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$. f est définie uniquement à droite de 0, donc

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

d'où la nécessité d'introduire les deux notions suivantes :

1. On dit que f a une limite à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x)$ existe et finie.
2. On dit que f a une limite à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)$ existe et finie.

Exemple 1.9. *On a*

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty,\ \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty.$$

Théorème 1.4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *existe si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = l$ *($l \in \mathbb{R}$) existe, finie et unique.*

Remarque 1.3. $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 1.10. *Soit la fonction f définie comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x = 0$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} -x = 0,$$

donc la limite en 0 existe et égale à 0 c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemple 1.11. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 0 \\ x-1 & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x+1 = 1$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x-1 = -1$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *n'existe pas.*

1.2.2 Limite en l'infini

Définition 1.5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, +\infty[$.

Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,\ \big[x > B \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon\big].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,\ \big[x > B \Rightarrow f(x) > A\big].$$

Remarque 1.4. On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

$+\infty-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0\times\infty$

TABLE 1 – Quelques formes indéterminées

1.2.3 Les formes indéterminées

Voici quelques formes indéterminées (FI) dans le tableau (1) suivant :

Exemple 1.12.

1.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty-\infty\ (FI)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\times(-\infty)=-\infty.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-4}-x)\times(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}{(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(3-\frac{4}{x})}{x(\sqrt{x+3-\frac{4}{x}}+1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-\frac{4}{x})}{(\sqrt{x+3-\frac{4}{x}}+1)}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{x+2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{4}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(3-\frac{4}{x})}{(1+\frac{2}{x})}=3.\end{aligned}$$

1.2.4 Propriétés sur les limites

Proposition 1.6. *Soient f,g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)=l_2$, alors on a*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = l_1 \times l_2$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda \pm g(x) = \lambda l_2$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, *si* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \mid f(x) \mid = \mid l_1 \mid$.

Théorème 1.7. *Soient f, g, h trois fonctions définies dans un intervalle X (un voisinage de x_0) et telle que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \ \forall\, x \in X.$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Exemple 1.13. *Etudier la limite de $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0. $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, on a*

$$\begin{aligned}
-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^2) \leq \lim_{x \to +\infty} (x^2 \sin(\frac{1}{x})) \leq \lim_{x \to +\infty} (x^2) \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x \to +\infty} (x^2 \sin(\frac{1}{x})) \leq 0)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 \sin(\frac{1}{x})) = 0$.

1.3 Continuité d'une fonction

1.3.1 Continuité en un point

Définition 1.8. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

- On dit que f est continue en un point x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\ \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon \big],$$

  c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Définition 1.9. (continuité à gauche et à droite)
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

- Une fonction définie en x_0 et à droite de x_0 est continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- Une fonction définie en x_0 et à gauche de x_0 est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en si x_0 $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 1.14. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que g(0)= 1. Puis :
$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} g(x) = 1 = g(0)$ *donc g est continue à droite de* 0.
$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} g(x) = 0 \neq g(0)$ *donc g n'est pas continue à gauche de* 0.
Finalement, g n'est pas continue en 0.

Exemple 1.15. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x \geq 0 \\ 1 + x & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 + x & si\ x < 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} 1 - x = 1,$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} 1 + x = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} g(x) = 1 = g(0),$$

et donc g est continue en 0.

Proposition 1.10. ***(Opérations sur les fonctions continues)***
Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors

1. *$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $k_1 f + k_2 g$ est continue en x_0.*
2. *La fonction $f \times g$ est continue en x_0.*
3. *Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*
4. *La fonction $\mid f \mid$ est continue en x_0.*

Proposition 1.11. ***(Continuité des fonctions composées)***
Soient $f : X \to X'$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $gof : X \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

Remarque 1.5. f est dite discontinue en x_0 si

1. f n'est pas définie en x_0 ;
2. la limite en x_0 (à droite ou à gauche) existe mais différente de $f(x_0)$;
3. la limite en x_0 n'existe pas.

Définition 1.12. (**Prolongement par continuité**)
Si f n'est pas définie en x_0 (f définie sur $X - \{x_0\}$) et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on définit un prolongement par continuité de f en x_0 par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in X - \{x_0\} \\ l & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 1.16. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?*
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2,$$

on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ comme suit

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.17. *Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$. Voyons si g admet un prolongement par continuité en 0 ?*
On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$$

Elle est donc prolongeable par continuité en 0 *et son prolongement est la fonction* $\widetilde{g}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *comme suit*

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 2 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.18. *Soit* $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *pour* $x \in \mathbb{R}^*$.
On a

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

et par suite

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de h *en* 0.

1.3.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 1.13. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$ *;*
2. $f(a).f(b) < 0$.

Alors

$$\exists c \in]a, b[,\ f(c) = 0.$$

De plus, si f *est stictement monotone, alors le* c *est unique.*

Exemple 1.19. *Soit la fonction définie sur par* $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

1. *Montrer que la fonction est continue sur* $[-1, 2]$.
2. *Calculer* $f(-1)$ *et* $f(2)$.
3. *En déduire que l'équation* $x^3 + x^2 - x = 5$ *admet au moins une solution dans* $[-1, 2]$.

Corrigé

1. *La fonction* f *est une fonction polynôme, donc elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$.
2. *Calculer* $f(-1)$ *et* $f(2)$.
   D'une part, $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 5 = -4 < 0$. *D'autre part,* $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - (2) - 5 = 5 > 0$.
3. *D'une part,* f *est continue sur* $[-1, 2]$ *(d'après la première question). D'autre part, comme* $f(-1).f(2) < 0$ *(d'après la deuxième question), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $[-1, 2]$.

1.4 Dérivabilité d'une fonction

1.4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.14. Soient X un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Remarque 1.6. Une autre écriture de la dérivée en un point :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to l} \frac{f(x+l) - f(x_0)}{l}.$$

Exemple 1.20. *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^3. \end{array}$$

Trouver la dérivée de f en un point x_0 de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) \\ &= 3x_0^2. \end{aligned}$$

Définition 1.15. (**Dérivée à gauche et à droite en un point**)
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

- On définit la dérivée à droite de f en x_0 par

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- On définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 1.21. *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x \geq 0 \\ 1-x & si\ x < 0. \end{cases} \end{array}$$

f est-elle dérivale en 0 ?
On a $f(0) = 3(0) + 2 = 2$, autrement dit

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x > 0 \\ f(0) = 2 & si\ x = 0 \\ 2-x & si\ x < 0, \end{cases}$$

puis,

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{(3x+2)-2}{x} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{3x}{x} \\ &= 3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{(2-x)-2}{x} \\ &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x}{x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

donc, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Définition 1.16. f est dérivable sur X si elle est dérivable en tout point de X et l'application

$$\begin{array}{rcl} f': & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Remarque 1.7. (Interprétation géométrique de la dérivée en un point)
Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tengente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x0))$.

Remarque 1.8. (Dérivabilité et continuité)
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse en général.

Exemple 1.22. *Exemple : soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \mid x \mid = \left\{ \begin{array}{ll} x & si\, x \geq 0 \\ -x & si\, x < 0. \end{array} \right. \end{array}$$

On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} x = 0 = f(0) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} -x = 0 = f(0) = 0$$

donc f est continue en 0. Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{(x) - 0}{x} \\ &= 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{(-x) - 0}{x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

donc f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.
Conclusion : f est continue en 0 *mais elle n'est pas dérivable en 0.*

1.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.17. *Soient f et g deux fonctions dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(h.f)$, $h \in \mathbb{R}$, $f+g$, $f.g$ sont dérivable x_0, et $(\frac{f}{g})$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus*

1. $(h.f(x_0))' = h.f'(x_0)$.
2. $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3. $(f(x_0).g(x_0))' = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.
4. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{(f'(x_0).g(x_0))-(f(x_0).g'(x_0))}{g^2(x_0)}$.

Proposition 1.18. ***(Dérivée d'une fonction composée)***
Soient $f : X \to X_0$ et $g : X_0 \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $gof : X \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(gof)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Proposition 1.19. ***(Dérivée d'une fonction réciproque)***
Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Définition 1.20. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur X, alors :

- f' est dite dérivée d'ordre 1 de f. Si f' est dérivable sur X alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f. On la note

$$f'' = f^{(2)} = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \ \forall n \geq 1, \ \ f^{(0)} = f.$$

- On dit que f est de classe C^1 sur X si f est dérivable sur X et f^0 est continue sur X.
- On dit que f est de classe C^n sur X (et on écrit $f \in C^n(X)$) si f est n fois dérivable sur X et $f^{(n)}$ est continue sur X.
- f est dite de classe C^∞ sur X si elle est de classe C^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.21. ***(Régles de l'Hospital)***
Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur X, dérivables sur $X - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :

1. *$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$,*
2. *$\forall\ x \in X - \{x_0\},\ \ g'(x) \neq 0$,*

alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 1.23. *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}\ \ (FI),$$

par la suite, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1.$$

1.4.3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 1.22. ***(Théorème de Rolle)***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$, alors,*

$$\exists c \in]a, b[:\ \ f'(c) = 0.$$

Remarque 1.9. Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

Théorème 1.23. ***(Théorème des accroissements finis))***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$, alors,*

$$\exists c \in]a, b[:\ \ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$