note : $H(x_0) \geqslant 0$. si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$x^t H(x_0) x \geqslant 0$

Donc, toutes les valeurs propres de la matrice $H(x_0)$ sont positives.

2- La matrice $H(x_0)$ est dite définie positive (DP) et on note $H(x_0) > 0$, si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t H(x_0) x > 0$

Donc, toutes les valeurs propres de la matrice $H(x_0)$ sont strictement positives.

I - Eléments d'analyse convexe :

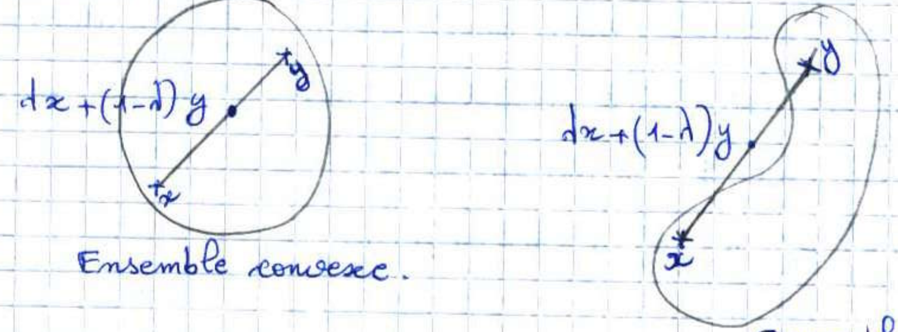
La notion de convexité est très importante dans les problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes.

1- Ensembles convexes :

Définition : Un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in]0,1[$ on a : $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$

En d'autre terme, un objet géométrique S est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux points x et y de S, le segment $[x, y]$ qui les joints est entièrement contenu dans S.



Ensemble convexe.

Ensemble non convexe

Exemples :

1- Tout disque ainsi un cube plein sont convexes.

2- Un intervalle $[a, b]$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}$.

3- Toute partie affine est convexe, car un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si : $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:
$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$.

4- On considère l'ensemble Ω, définit ci-dessous, et montrons que c'est un convexe.

$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1 \}$

Soient $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in]0,1[$:

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqslant \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\|$$

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqslant |\lambda| \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leqslant 1} + |1-\lambda| \cdot \underbrace{\|y\|}_{\leqslant 1} .$$

(Car : $x \in \Omega \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1$

$y \in \Omega \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leqslant 1$)

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqslant \lambda + 1 - \lambda$$

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqslant 1$$

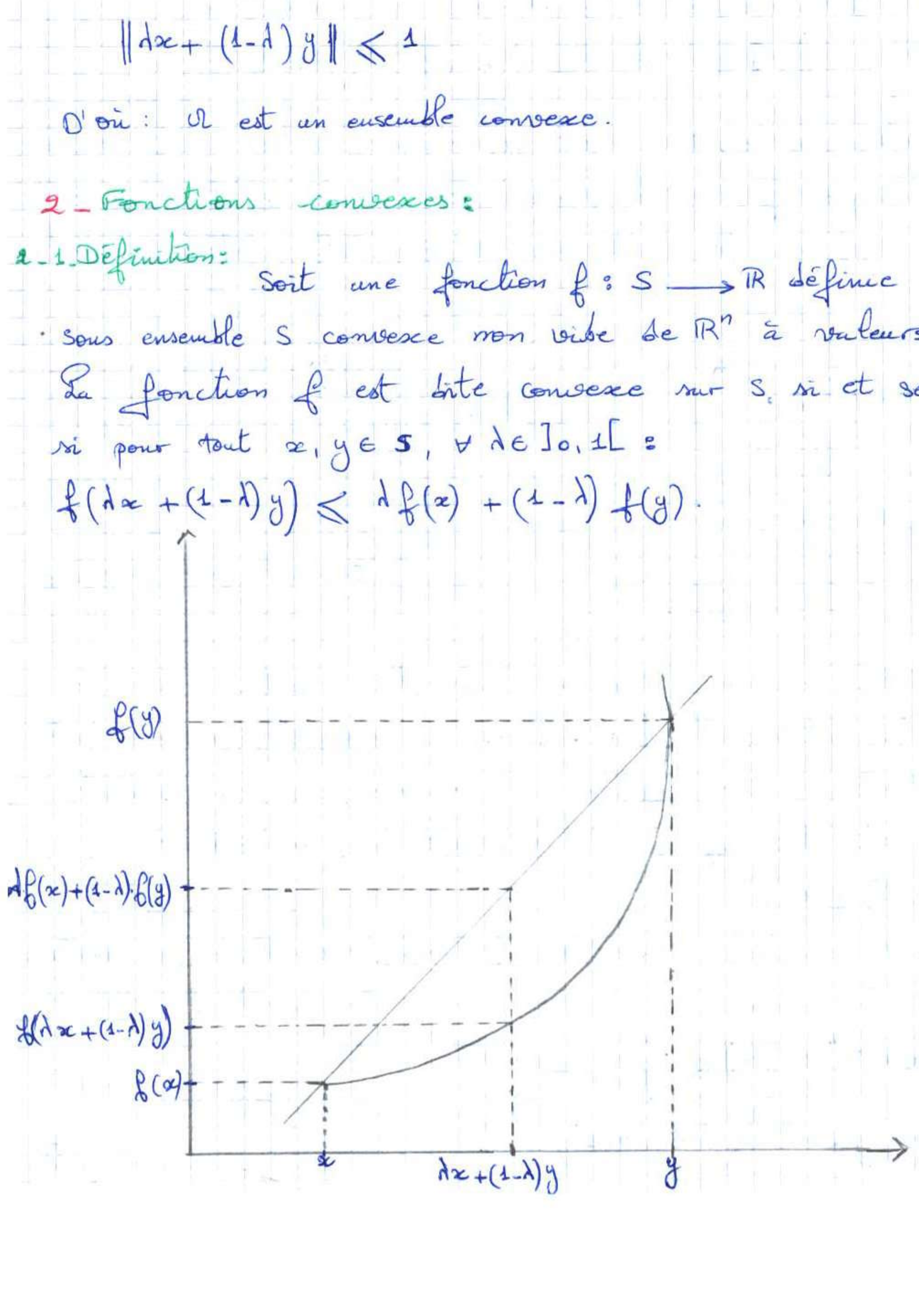
D'où : Ω est un ensemble convexe.

2 - Fonctions convexes :

2-1 Définition :

Soit une fonction $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous ensemble S convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. La fonction f est dite convexe sur S, si et seulement si pour tout $x, y \in S$, $\forall \lambda \in]0, 1[$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) .$$



- Si l'inégalité ci-dessus est stricte quelque soient $x \neq y$ et $0 < \lambda < 1$, la fonction f s'appelle strictement convexe, càd :
$\forall x, y \in S$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in]0,1[$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y).$$

Exemples :

1- Les fonctions linéaires sont convexes.

2- Toute fonction affine est convexe.

3- $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, $a \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

- Montrons que f est une fonction convexe :
Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, et $\lambda \in]0,1[$
Montrons que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda . f(x) + (1-\lambda) f(y)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \langle a, \lambda x + (1-\lambda)y \rangle + b \\ &= \langle a, \lambda x \rangle + \langle a, (1-\lambda)y \rangle + b \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + (1-\lambda) \langle a, y \rangle + b - \lambda b + \lambda b. \\ &= \lambda (\langle a, x \rangle + b) + (1-\lambda)(\langle a, y \rangle + b). \\ &= \lambda . f(x) + (1-\lambda). f(y). \end{aligned}$$

D'où : f est une fonction convexe.

I-2- Cas d'une fonction à une variable :

Proposition :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, On dit que f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I, càd :

La fonction f est convexe $\Longleftrightarrow$ f est une fonction croissante sur I.

Corollaire :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 02 fois dérivable sur I. Alors :

- f est convexe $\iff f'' \geq 0$ sur I.
- f est concave $\iff f'' \leq 0$ sur I.

Exemples :

1) $f(x) = x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, car : $f''(x) = 2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = e^x$ est une fonction convexe, car : $g''(x) = e^x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $h(x) = \ln x$ est une fonction concave, car : $h''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

3- Gradient et matrice Hessienne :

3-1. Définition : (Gradient).

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en $x_0 \in D$ existent alors le gradient de f au point x_0, noté $\nabla f(x_0)$, est défini par :

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$.

Le gradient de f est donné par :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2y + 2x \end{pmatrix}$$

3-2- Définition : (Matrice hessienne)

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est deux fois dérivables en $x_0 \in D$, alors la matrice hessienne de f au point x_0, noté $\nabla^2 f(x_0)$ [où $H(x_0)$] est définie par :

$$H(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple :

soit $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- si f est une fonction de classe C^2 (admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues), donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \quad , \ \forall i,j = 1,\dots,n.$$

et le hessien de f est une matrice symétrique.

3-3- Définition :

Soit $H(x_0)$ la matrice hessienne de la fonction f au point x_0, alors :

1. La matrice $H(x_0)$ est dite semi-définie positive, et on