République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
Licence 2 à Recrutement National

MODULE :

Analyse Mathématiques 3

Année universitaire 2020-2021

TD_2- **Analyse Mathématique 3**

Exercice 1. *Soit f une fonction de plusieurs variables. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f dans les cas suivants.*

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{1+y^2}}$;
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$;
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & sinon. \end{cases}$
4. $f(x,y) = (\dfrac{xy}{x-y}, \dfrac{1}{x^2+y^2-1})$.

Exercice 2.
1. *Donner le domaine de définition de la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, et calculer sa limite au point $(0,0)$.*
2. *Donner le domaine de définition de la fonction $g(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Montrer que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, la limite de g au point $(x_0, 0)$ n'existe pas.*

Exercice 3.
1. *Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction f :*

   1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$ 2. $f(x,y) = ln(x+y)$ 3. $f(x,y) = ln(x^2-y)$

2. *Calculer la limite si elle existe ou montrer qu'elle n'existe pas :*

   a) $lim_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{x^2+y^2}{(x-1)(y+2)}$ b) $lim_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{y}{x-2}$

Exercice 4. *Soit la fonction F définie par :*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si\ non \end{cases}$$

1. *Donner le domaine de définition de F ;*
2. *La fonction F est-elle continue sur son domaine ?*

Exercice 5. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|xy|+(x+y)^2} & si (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. *Etudier la limite de f à l'origine.*
2. *Vérifier que $lim_{x\longrightarrow 0}(lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = lim_{y\longrightarrow 0}(lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = 0$.*
3. *conclure.*

Solution

exo1

1. $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{1+y^2}}$;
   Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1+y^2 > 0$ *donc* $D_f = \mathbb{R}^2$;
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$;
   f est définie ssi $x^2+y^2-1 \neq 0$. *Donc f est définie au point (x,y) ssi le point $(x;y)$ n'appartient pas au cercle de centre* 0 *et de rayon 1. D'où* $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/x^2+y^2-1 \neq 0\}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0); \\ 0 & sinon. \end{cases}$
   $D_f = \mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y) = (\dfrac{xy}{x-y}, \dfrac{1}{x^2+y^2-1})$.
   On a $f = (f_1; f_2)$; $D_{f_1} = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/x = y\}$ *et* $D_{f_2} = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/x^2+y^2-1 \neq 0\}$. *Ainsi f est définie ssi f_1 et f_2 sont définies donc* $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \mathbb{R}^2 - \{(x,y), x \neq y$ $etx^2+y^2-1 = 1\}$.

exo2

1. *Le domaine de définition de la fonction* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *est* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. *Pour la limite on utilise les coordonnées polaires : on pose* $x = rcos\theta$ *et* $y = rsin\theta$. *Quand* $(x;y) \longrightarrow (0,0)$ *on* $r \longrightarrow 0$. *Il en résulte que* $lim f(x,y) = lim f_{r\longrightarrow 0}(rcos\theta, rsin\theta) = lim_{r\longrightarrow 0}\dfrac{r^2cos\theta sin\theta}{r^2} = cos\theta sin\theta$. *La valeur trouvee depond de θ donc f n'admet pas de limite au point* $(0,0)$.
2. *Donner le domaine de définition de la fonction* $g(x,y) = \dfrac{x}{y}$. *Montrer que,* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, *la limite de g au point* $(x_0,0)$ *n'existe pas.*
   La fonction g est définie si et seulement si $y \neq 0$. *Ainsi le domaine de définition est* $D_g = \mathbb{R}^2 - \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$, *c'est à dire D_g est tout le plan excepté l'axe des abscisses. Quant à la limite au point* $(x_0,0)$, *on utilise les coordonnées polaires : on pose* $x = x_0 + r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$. *Ainsi*
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{x}{y} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta + x_0}{r\sin\theta} = +\infty \tag{1}$$
   Il en résulte que g n'admet pas de limite au point $(x_0,0)$.

exo 3 *plus tard*

exo 4

1. *Le domaine de définition de F est* $D_F = \mathbb{R}^2$.
2. *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$, *la fonction F est un rapport de deux fonctions continues donc elle est continue.*
   Pour $(x,y) = (0,0)$, *et en utilisant les coordonnées polaires, on a*
   $$\lim_{x,y\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r(|\cos\theta| + |\sin\theta|)} = +\infty.$$
   la limite au point $(0,0)$ *n'existe pas donc la fonction F n'est pas continue au point* $(0,0)$ *et par conséquent elle n'est pas continue sur son domaine* D_F.

exo 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|xy| + (x+y)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0); \\ 0\ sinon. \end{cases}$$

1. *L'étude de la limite de f à l'origine.*
   Sur la droite de l'équation $x = y$,
   $lim_{(x,y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{|xy| + (x+y)^2} = lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+(2x)^2} = \dfrac{1}{5}.$
   Sur la droite de l'équation $x = -y$,
   $lim_{(x,y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{|xy| + (x+y)^2} = lim_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x^2 + (x-x)^2} = -1.$
   $-1 \neq \frac{1}{5}$ *implique que la fonction f n'admet pas une limite au point $(0,0)$.*
2. *Vérifier que $lim_{x\to 0}(lim_{y\to 0} f(x,y) = lim_{y\to 0}(lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$.*
   $lim_{x\to 0}(lim_{y\to 0} f(x,y)) = lim_{y\to 0} 0 = 0$ *et* $lim_{y\to 0}(lim_{x\to 0} f(x,y)) = lim_{y\to 0} 0 = 0$. *Il en résulte que $lim_{x\to 0}(lim_{y\to 0} f(x,y) = lim_{y\to 0}(lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$.*
3. *conclure.*
   On déduit que l'égalité des limites doubles $lim_{x\to 0}(lim_{y\to 0} f(x,y)$ et $lim_{y\to 0}(lim_{x\to 0} f(x,y)$.ne garanti pas l'existence de la limite de f au point $(0,0)$.