Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

2020/2021

<u>*Corréction Devoire* **1**</u>

Exercice 1. *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

1. *On montre que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.*

   i) R est réflixive ?

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R}, x^2 = x^2 \\ 0 &= 0 \textit{ vrais} \\ &\Longleftrightarrow xRx. \end{aligned}$$

   ii) R est symétrique?

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in \mathbb{R}, xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longrightarrow y^2 = x^2 \\ &\Longrightarrow yRx. \end{aligned}$$

   iii) R est transitive?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \begin{cases} xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2 .... (1) \\ yRz \Longleftrightarrow y^2 = z^2 .... (2) \end{cases}$$

   $(1) + (2) \Longleftrightarrow x^2 = z^2 \Longrightarrow xRz.$

   R est réflixive, est symétrique et est transitive donc R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. *On détermine la classe d'équivalence de a et on déduire la classe d'équivalence de $1, 2$.*

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \{x \in \mathbb{R}/xRy\} \\
\dot{a} &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 = a^2\right\} \\
\dot{a} &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - a^2 = 0\right\} \\
\dot{a} &= \{x \in \mathbb{R}/(x-a)(x+a) = 0\} \\
\dot{a} &= \{x \in \mathbb{R}/x = -a \ ou \ x = a\} \\
\dot{a} &= \{-a, a\}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\dot{1} &= \{-1, 1\} \\
\dot{2} &= \{-2, 2\}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit

$$\begin{aligned}
f \ : \ \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x \quad &\longrightarrow \quad f(x) = x^2 + x
\end{aligned}$$

1. *Les images directes $f([-\frac{1}{2}, 1]), f([-1, 0])$ et $f([-2, -1])$.*

   on étudie le signe de f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + x \\
f^{`}(x) &= 2x + 1 \\
f^{`}(x) &= 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dans $[-\frac{1}{2}, 1]$ la fonction f est croissante $(f) \nearrow$:

$$f([-\frac{1}{2}, 1]) = [f(-\frac{1}{2}), f(1)] = [-\frac{1}{4}, 2].$$

Dans $[-1, -\frac{1}{2}]$ la fonction f décroissante $(f) \swarrow$ et dans $[-\frac{1}{2}, 0]$ la fonction f est croissante $(f) \nearrow$:

$$f([-1, 0]) = f([-1, -\frac{1}{2}]) \cup f([-\frac{1}{2}, 0]) = [-\frac{1}{4}, 0]$$

Dans $[-2,-1]$ *la fonction* f *est décroissante* $(f)\swarrow$:

$$f([-2,-1]]) = [f(-1), f(-2)] = [0,2]$$

2. *Les images récéproques* $f^{-1}([0,2])$, $f^{-1}(\{3\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{3\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 3\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 + x - 3 = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,2]) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [0,2]\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/0 \leq x^2 + x \leq 2\right\} \\ &= \begin{cases} x^2 + x \leq 2.....(1) \\ \qquad et \\ x^2 + x \geq 0.....(2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Longleftrightarrow x^2 + x \leq 2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x+2) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [-2,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\Longleftrightarrow x^2 + x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x(x+1) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \,]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,2]) &= ([-2,1]) \cap (]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[) \\ f^{-1}([0,2]) &= [-2,-1] \cup [0,1] \end{aligned}$$

♣*after all patience beautiful things await*♣

♣*Soit* $A =$ *un succès dans la vie. Alors* $A = X + Y + Z$ *où* $X =$ *travailler.* $Y =$ *s'amuser.* $Z =$ *se taire.*♣