Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence
Module : Analyse 1

Année universitaire 2020/2021

Série de TD N°3

Exercice N°1

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que $a)$ $\lim_{x\to 1}(8x+2) = 10$; (b) la fonction $x \longmapsto 2x+5$ est continue au point $x_0 = 4$.
2. Calculer les limites suivantes :(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$, (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$, (c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3}\right)$,
   (d) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\right)$, (e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x}\right)$, (f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)$, (g) $\lim_{x\to 0}\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)$.
3. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & si\ x < -2 \\ a, & si\ x = -2 \\ (2x+b)^2, & si\ x > -2 \end{cases} \quad soit\ continue\ sur\ \mathbb{R}.$$

Exercice N°2

Montrer que les équations suivantes admettent au moins une solution réelle sur $[a, b]$ (préciser si la solution est unique).

1. $\tan x + \frac{x}{3} = 0,\ [a, b] = [\frac{3\pi}{4}, \pi]$,
2. $\ln x - \frac{1}{x} = 0,\ [a, b] = [1, 2]$,
3. $f(x) = x$ où $f : [a, b] \longmapsto [a, b]$ est une fonction continue.

Exercice N°3

1. Les fonctions suivantes définies pour $x \in \mathbb{R}^*$ par :
   i) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, ii) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?
2. Soit la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & si\ x \geq 0 \\ \sin x, & si\ x < 0 \end{cases}$
   (a) Étudier la continuité, la dérivabilité et la continuité éventuelle de la dérivée de la fonction f sur son domaine de définition D_f,
   (b) f est-elle de classe C^1 sur D_f ?

Exercice N°4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & si\ x \geq 1, \\ ax^3+bx+2, & si\ x < 1 \end{cases}$$

i) est continue sur $\mathbb{R}$,
ii) est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°5

1. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto (x^2+1)\sin x$,
2. Montrer de deux manières différentes que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$,
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, démontrer qu'il existe $x \in]0, 1[$, tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

4. En utilisant le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \longmapsto \ln x$, démontrer que
   $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.