Les solutions des

EXO non fait en T.D.

Serie N° 1.

EXO1 : Ω étant ouvert, à tout point $(t_0, x_0) \in \Omega$ on peut faire correspondre une boule fermée bornée centrée en ce point et contenue dans Ω. Sur cette boule, les dérivées premières de f, par rapport à x, étant continues, sont bornées. Soit M un majorant de $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|$ sur cette boule. Le théorème des accroissement finis fournit pour tout couple $(t, x_1), (t, x_2)$ de points de la boule, l'inégalité

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\| ,$$

ce qui montre que f est lipschitzienne dans la boule et donc localement lipschitzienne dans Ω.

EXO2 : Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. f étant localement lipschitzienne et Ω étant ouvert, il existe $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ et $k > 0$ tels que $\left( ]t_0 - \eta_1, t_0 + \eta_1[\times B(x_0, \eta_2) \right) \subset \Omega$ et

$$(\forall (t,x) \in \Omega) . \left[(|t - t_0| < \eta_1 \text{ et } \|x - x_0\| < \eta_2) \Rightarrow \|f(t, x_0) - f(t, x)\| < k\eta_2 \right.$$

$(\|x - x_0\| < \eta_2)$

$\times$ f étant continue par rapport à t, il existe $\eta_3 > 0$ tel que

$$(\forall t \in]t_0 - \eta_3, t_0 + \eta_3[) \quad \|f(t_0, x_0) - f(t, x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

En posant $\eta = \inf(\eta_1, \eta_3)$ et $\eta' = \inf(\eta_2, \frac{\varepsilon}{2k})$, on a :

$$(\forall (t,x) \in \Omega) \left[(|t - t_0| < \eta \text{ et } \|x - x_0\| < \eta') \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \|f(t,x) - f(t_0, x_0)\| \leq \|f(t,x) - f(t, x_0)\| + \|f(t, x_0) - f(t_0, x_0)\| < \varepsilon .$$

ce qui montre que f est continue en (t_0, x_0).

EX04 :

$$\dot{x} = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

f' est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : x \mapsto x|x|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc continue et localement lipschitzienne. D'où par tout point (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$, il passe une et une seule solution maximale de cette équation différentielle.

EX05 :

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \lambda x_2 + e^{\lambda t} \cos \lambda x_1 . \end{cases} \qquad \dot{X} = f(t, X). \ ; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrons que f est localement lipschitzienne.

On a : $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1.$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 - \lambda e^{\lambda t} \sin \lambda x_1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \lambda$

Les fonctions $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ sont continues donc (d'après l'exo 1) f est localement lipschitzienne.

b) Montrons que f est continue par rapport à t.

On a

$$\|f(t_0,x)-f(t,x)\| = |x_2-x_2| + |-x_1+\lambda x_2+e^{\lambda t_0}\cos\lambda x_1 + x_1 - \lambda x_2 - e^{\lambda t}\cos\lambda x_1|$$

$$= |\cos\lambda x_1|\cdot|e^{\lambda t_0}-e^{\lambda t}|$$

$$\leq |e^{\lambda t_0}-e^{\lambda t}|.$$

La fonction exponentielle étant continue, on a

$\lim\limits_{t\to t_0}|e^{\lambda t_0}-e^{\lambda t}| = 0$ et par suite $\lim\limits_{t\to t_0}\|f(t_0,x)-f(t,x)\| = 0$

De a) et b) on déduit que f est continue (Exo 2).

On a donc finalement, les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées.

Par conséquent, par tout point (t_0,x_0) de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2$, il passe une et une seule solution maximale de (I) et ceci pour tout λ fixé.

Exo 6 : $\dot{x} = A(t)x + b(t) = f(t,x)$

$A(t)$ et $b(t)$ définies et continues sur $\mathbb{R}$.

* Continuité de f :
les applications $(t,x) \mapsto A(t)$; $(t,x) \mapsto x$; $(t,x) \mapsto b(t)$ sont continues, donc f qui est somme et produit de fonctions continues est continue.

* Condition locale de Lipshitz

$$\|A(t)x_1 + b(t) - A(t)x_2 - b(t)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\|$$

$$\leq \|A(t)\| \, \|x_1 - x_2\|. \quad (*)$$

comme $A(t)$ est continue, elle est bornée sur tout compact. Donc sur toute ~~compact~~ partie $J \times O$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (J intervalle fermé borné) il existe $k = \sup_{t \in J} \|A(t)\|$ tel que : $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$.
d'où f est localement lipschitzienne.

* Les hypothèses du théorème global d'existence et d'unicité sont donc vérifiées, pour cette équation.

* $f(t,x)$ est lipschitzienne, par rapport à x, si $A(t)$ est bornée. (par exemple si $f(t,x)$ est définie sur $\Omega = J \times O$ avec J compact.

* D'après $(*)$ il existe $k(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ~~tel que~~ $k(t) = \|A(t)\|$ tel que pour tout t fixé, $t \in J = \mathbb{R}$ l'application $(t,x) \mapsto f(t,x)$ est lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur O, de plus on voit bien que $O = \mathbb{R}^n$,
Donc d'après le th 2.10, toute solution maximale de cette équation, est globale.

EXO7 : $\dot{x} = t\sqrt{t^2+x^2}$; $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$\dot{x} = f(t,x)$.

a)* <u>continuité de f</u>

f est continue, comme somme, produit et composées de fonctions continue.

b)* D'autre part on a :

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |t\sqrt{t^2+x_1^2} - t\sqrt{t^2+x_2^2}|$$
$$= |t|\,|\sqrt{t^2+x_1^2} - \sqrt{t^2+x_2^2}|$$
$$= |t|\,|t^2+x_1^2+t^2+x_2^2 - 2(t^2+x_1^2)^{\frac12}(t^2+x_2^2)^{\frac12}|^{\frac12}$$
$$= |t|\,|2t^2+x_1^2+x_2^2 - 2(t^4+x_1^2t^2+x_2^2t^2+x_1^2x_2^2)^{\frac12}|^{\frac12}$$
$$= |t|\,|2t^2+x_1^2+x_2^2 - 2[(x_1x_2+t^2)^2+t^2(x_1-x_2)^2]^{\frac12}|^{\frac12}$$
$$\leq |t|\,|2t^2+x_1^2+x_2^2 - 2[(x_1x_2+t^2)^2]^{\frac12}|^{\frac12}$$
$$= |t|\,|2t^2+x_1^2+x_2^2 - 2x_1x_2 - 2t^2|^{\frac12}$$
$$= |t|\,|x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2|^{\frac12}$$
$$= |t|\,|x_1-x_2|$$

Donc pour $k(t) = |t|$, nous avons pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq k(t)\,|x_1-x_2|$.

* De a) et b) on déduit que toute solution maximale de l'équation différentielle $\dot{x} = t\sqrt{t^2+x^2}$ est globale.

<u>Autre solution pour b)</u> On a toujours $|\,\|X\| - \|Y\|\,| \leq \|X-Y\|$.

Donc $|t\sqrt{t^2+x_1^2} - t\sqrt{t^2+x_2^2}| = |t|\,|\sqrt{t^2+x_1^2} - \sqrt{t^2+x_2^2}| \leq |t|\,\|(t,x_1)-(t,x_2)\| =$

$$= |t|\,\|(0,(x_1-x_2))\| = |t|\cdot|x_1-x_2|.$$

EXO 12 :

Soit k la constante de Lipschitz associée à f.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution $z_\varepsilon(t)$ de l'équation $\dot{x}(t) = f(t,x)$, telle que

$$0 < \|x(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2e^{k|t_2-t_1|}}$$

(car les condition d'existence sont vérifiées pour l'équation $\dot{x}(t) = f(t,x)$).

On a

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

$$z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t_0) + \int_0^t f(s, z_\varepsilon(s))\,ds$$

d'où

$$\|x(t) - z_\varepsilon(t)\| \leq \|x(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| + k\left|\int_{t_0}^{t} \|x(s) - z_\varepsilon(s)\|\,ds\right|$$

En posant $\|x(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| = a > 0$; $k = b > 0$

$f(t) = \|x(t) - z_\varepsilon(t)\| \geq 0$; $\mu(t) \equiv 1 > 0$,

on peut appliquer le lemme de Gronwall et on obtient

$$\|x(t) - z_\varepsilon(t)\| \leq \|x(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| e^{k|t-t_0|}$$

$$\leq \|x(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| e^{k|t_2-t_1|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et ceci pour tout $t \in [t_1, t_2]$.

.../...

Suite exo 12

De la même manière on obtient, $\forall t \in [t_1, t_2]$

$$\|y(t) - z_\varepsilon(t)\| \leq \|y(t_0) - z_\varepsilon(t_0)\| \, e^{k|t_2 - t_1|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

d'où

$$\|x(t) - y(t)\| = \|x(t) - z_\varepsilon(t) + z_\varepsilon(t) - y(t)\|$$

$$\leq \|x(t) - z_\varepsilon(t)\| + \|y(t) - z_\varepsilon(t)\| < \varepsilon.$$

On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t \in [t_1, t_2], \ \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

d'où $\forall t \in [t_1, t_2]$, $x(t) = y(t)$.

⌝