<u>Serie de TD N°2</u>

<u>Exo 1:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ e^B \cdot e^A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \to e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A.$$

b) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C$.

$|\lambda I - C| = \lambda^2 - 1 \to \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

vecteurs propres associés : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$e^{A+B} = P e^{D} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^2+1}{2e} & \frac{e^2-1}{2e} \\ \frac{e^2-1}{2e} & \frac{e^2+1}{2e} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{pmatrix}}.$$

$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$

et $e^{A+B} \neq e^B \cdot e^A$.

EXO2 : A et B commutent. Dans le sous anneau de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par A et B on peut utiliser la formule du binome : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$.

$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et $e^B = \sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!}$

sont deux séries absolument convergentes, le produit de Cauchy des deux séries nous donne :

$$\left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{p\geq 0} \frac{B^p}{p!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k+p=n} \frac{A^k B^p}{k!\,p!}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{A^{n-m}B^m}{(n-m)!\,m!}\right)$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} \frac{n!\,A^{n-m}B^m}{(n-m)!\,m!}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} C_n^m A^{n-m}B^m\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B} = e^{B+A} \underset{\uparrow}{=\!=} e^B \cdot e^A$$

(par le même procédé).

EXO3 : calculer e^A

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

a) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$.

On a une valeur propre double $\lambda = 1$.

. $(A-I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

$E_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$; A n'est pas diagonalisable.

La matrice semblable à A dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Dans cette nouvelle base on a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D' + N'$.

avec D' diagonale, N' nilpotente ($N'^2 = 0$) et $D'N' = N'D'$.

Dans la base canonique D' devient $D = PD'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et N' devient $N = PN'P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $N^2 = 0$ et $DN = ND$.

et $A = D + N$. Ce qui nous donne

$e^A = e^{D+N} = e^D \cdot e^N = eI(I+N) = e(I+N) = eA = \begin{pmatrix} 3e & -e \\ 4e & -e \end{pmatrix}$.

b) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$.

$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$.

* Si $\sin\theta \neq 0$ on a : $\lambda_1 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

$\lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

.../...

Espace propre associé à λ_1

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\forall\theta}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to y = ix$$

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\rangle .$$

Espace propre associé à λ_2

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\forall\theta}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to y = \cancel{ix}\ \underline{\underline{=-ix}}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\rangle .$$

A est donc diagonalisable ; $A = P\Delta P^{-1}$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix}\cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta\end{pmatrix} ; \ P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} ; \ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i \\ 1 & i\end{pmatrix}$$

$$e^A = P\cdot e^\Delta \cdot P^{-1} \quad ; \ e^\Delta = \begin{pmatrix} e^{\cos\theta - i\sin\theta} & 0 \\ 0 & e^{\cos\theta + i\sin\theta}\end{pmatrix}$$

On trouve $$e^A = e^{\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos(\sin\theta) & -\sin(\sin\theta) \\ \sin(\sin\theta) & \cos(\sin\theta)\end{pmatrix}.$$

- Si $\sin\theta = 0$ alors $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

et $e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix}$ ou $e^A = \begin{pmatrix}\frac{1}{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e}\end{pmatrix}$.

EXO4 :

a) En calculant les puissance de A, on remarque que $A^m = \mathrm{diag}(A_1^m, \dots, A_k^m)$.

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathrm{diag}(A_1^p, \dots, A_k^p)}{p!}$$

$$= \mathrm{diag}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_1^p}{p!}, \dots, \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_k^p}{p!}\right)$$

$$= \mathrm{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_k}).$$

b) La décomposition de la matrice A de Jordan d'ordre k est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \; ; \; A = D + N \; ; \; DN = ND.$$

$$e^A = e^D \cdot e^N = e^\lambda I_k \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

$$= e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(k-2)!} \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Application au calcul de e^A avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = 1$. La matrice de Jordan associée à A est

…/…

Suite exo4

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

calulons la matrice de passage P qui transforme A en J et son inverse P^{-1}.

On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$e^J = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \text{et } e^A = P e^J P^{-1} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2-e & e^2 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Comment on a trouvé P et P^{-1} ?

Décomposition de $E = E_1 \oplus E_2$

avec $E_i = \ker (f - \lambda_i I_d)^{\alpha_i}$

$E_1 : (A - 2I_3)^2 X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow y = 0$

$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$E_2 : (A - I_3) X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x = -y$ et $z = 0$

$E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXO 5 :

Il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1} A P$ soit triangulaire superieure.

Soit a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ les éléments diagonaux de T, e^T est aussi une matrice triangulaire superieure d'élément diagonaux $e^{a_{ii}}$ $(i = 1, \dots, n)$;

d'où on déduit :

$$\det e^A = \det(\exp(P T P^{-1}) = \det\{P e^T P^{-1}\} =$$

$$= \det e^T = \prod_{i=1}^{n} e^{a_{ii}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) = e^{\operatorname{tr} T} = e^{\operatorname{tr} A}.$$

EXO 6 :

La matrice fondamentale principale en $t = t_0$ de l'éq. dif. linéaire à coefficients constants

$\dot{x} = A x$ est $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{A (t-t_0)^m A^m}{m!} = \frac{(t-t_0)^m A^m \cdot A}{m!}$

d'où on obtient

$$A\, e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)A} \cdot A.$$

EX07:

On a $P(t) \cdot \int_0^t P(s)\,ds = \left(\int_0^t P(s)\,ds\right) \cdot P(t)$.

Si $X(t)$ est la matrice fondamentale principale en $t=0$, de l'éq. dif. $\dot{x} = P(t)x$, alors on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t) = P(t) X(t) \\ \text{et } X(0) = I \end{cases}$$

. Il est évident que $\exp\left(\int_0^0 P(s)\,ds\right) = e^0 = I$.

. Posons $A(t) = \int_0^t P(s)\,ds$; $a_{ij} = \int_0^t P_{ij}(s)\,ds$.

$$\exp\left(\int_0^t P(s)\,ds\right) = \exp A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A(t)]^k}{k!}$$

$$\frac{d}{dt} \exp \int_0^t P(s)\,ds = \frac{d}{dt} \exp A(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A(t)]^k}{k!}\right]$$

Comme $A'(t) = P(t)$ commute avec $A(t)$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A(t)]^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k A'(t) \frac{[A(t)]^{k-1}}{k!}\right] = P(t) \exp \int_0^t P(s)\,ds.$$

ie $\dfrac{d}{dt} X(t) = P(t) X(t)$.

$$\left([A(t)]^k\right)' = [A(t) \cdot A(t) \cdot \ldots \cdot A(t)]'$$
$$= A'(t)(A(t))^{k-1} + A(t) \cdot A'(t) \cdot (A(t))^{k-2} + \ldots + [A(t)]^{k-1} A'(t)$$

comme $A'(t) = P(t)$ commute avec $\int_0^t P(s)\,ds = A(t)$,

on obtient $\dfrac{d}{dt}[A(t)]^k = k\, A'(t)\, [A(t)]^{k-1}$.

Exo 8:

La matrice principale en $t=0$ est e^{tA}. On calcul donc e^{tA} pour a) et b).

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)-3 = \lambda^2-6\lambda+5.$

$\lambda_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1.$; $\lambda_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5.$

A est diagonalisable et on a

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^t+e^{5t} & -e^t+e^{5t} \\ -3e^t+3e^{5t} & e^t+3e^{5t} \end{pmatrix}$

---

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 1 \\ -3 & \lambda+4 & 3 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+5)$

- $(1,0,1)$ et $(0,1,-2)$ forment une base du sous espace propre associé à $\lambda_1 = 2$.
- $(1,3,2)$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = -5$.
- A est diagonalisable, on a $A = P\Delta P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = Pe^{t\Delta}.P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8e^{2t}-e^{-5t} & -2e^{2t}+2e^{-5t} & -e^{2t}+e^{-5t} \\ 3e^{2t}-3e^{-5t} & e^{2t}+6e^{-5t} & -3e^{2t}+3e^{-5t} \\ 2e^{2t}-2e^{-5t} & -4e^{2t}+4e^{-5t} & 5e^{2t}+2e^{-5t} \end{pmatrix}$

__Exo 9 :__ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1) + 4 - 4\lambda = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$

. les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -2$.

. Calculons les espaces propres associés à ces v.p.

$(A - I)X = 0 \longrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \longrightarrow x = y = z.$

$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$(A - 2I)X = 0 \longrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -4x + 4y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = 2x \\ z = 2y = 4x. \end{array}$

$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$(A + 2I)X = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -4x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = -2x \\ z = -2y = 4x \end{array}$

$E_{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$

. A est diagonalisable et s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. D est diagonale $D = P^{-1}AP$.

calculons P^{-1}. ; $\det P = 12$

$$P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 16 & 0 & -4 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

...|...

Suite EX09

b) $A = PDP^{-1}$ donc $e^{tA} = P\, e^{tD} P^{-1}$

$$e^{tA} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 & -4 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 16e^{t} - 6e^{2t} + 2e^{-2t} & 3e^{2t} - 3e^{-2t} & -4e^{t} + 3e^{2t} + e^{-2t} \\ 16e^{t} - 12e^{2t} - 4e^{-2t} & 6e^{2t} + 6e^{-2t} & -4e^{t} + 6e^{2t} - 2e^{-2t} \\ 16e^{t} - 24e^{2t} + 8e^{-2t} & 12e^{2t} - 12e^{-2t} & -4e^{t} + 12e^{2t} + 4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

c) $X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 16e^{t} - 6e^{2t} + 2e^{-2t} & 3e^{2t} - 3e^{-2t} & -4e^{t} + 3e^{2t} + e^{-2t} \\ 16e^{t} - 12e^{2t} - 4e^{-2t} & 6e^{2t} + 6e^{-2t} & -4e^{t} + 6e^{2t} - 2e^{-2t} \\ 16e^{t} - 24e^{2t} + 8e^{-2t} & 12e^{2t} - 12e^{-2t} & -4e^{t} + 12e^{2t} + 4e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}.$$

d) Si on écrit le système $\dfrac{dX}{dt} = AX$ on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 + 4x_2 + x_3 \end{cases}$$

si on pose $x = x_1$ on obtient $x' = x_2$ et $x'' = x_3$

et notre système est équivalent à l'équation

$$x''' = -4x + 4x' + x''$$

ou encore

$$x''' - x'' - 4x' + 4x = 0$$

Exo 10 :

1) $x^{(5)} - 3x^{(4)} + 3x^{(3)} - x'' = 0 \qquad (E)$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

ou $\lambda^2(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$

. $\lambda_1 = 0$ est une racine double.

. $\lambda_2 = 1$ est une racine triple.

La solution générale de (E) est sous la forme

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 t e^t + C_5 t^2 e^t$$
$$= (C_1 + C_2 t) e^{0t} + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2) e^t.$$

solutions complexes si les $C_i \in \mathbb{C}$, réelles si les $C_i \in \mathbb{R}$.

2) $x'' + 2ix' + x = 0 \qquad (E)$

l'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 + 2i\lambda + 1 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = -(1+\sqrt{2})i \quad ; \lambda_2 = -(1-\sqrt{2})i$$

La solution générale de l'éq. (E) est

$$x = C_1 e^{-(1+\sqrt{2})it} + C_2 e^{-(1-\sqrt{2})it}.$$