République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

MODULE :

Analyse Mathématiques 3

Année universitaire 2020-2021

TD_1**- Analyse Mathématique 3**
Corrigé

Exercice 1. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn.*
Montrer que, $\forall x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.
Pour tout $x, y \in E$,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \dots (1)$$
$$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| > -\|x-y\| \dots (2).$$

De (1) *et* (2)*, on déduit*

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|.$$

d'où

$$\forall x, y \in E,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Exercice 2. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, on définit trois applications de la manière suivante :*
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$||(x,y)||_1 = |x| + |y|$, $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, *et* $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

1. *Montrer que chacune des applications définit une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
   Montrons que $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
   Remarquons tout d'abord que $\|(x,y)\|_1$ *est positive pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *Pour tout* $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in R$,
   1. $||(x,y)||_1 = 0$ *ssi* $|x| + |y| = 0$ *ssi* $|x| = |y| = 0$ *ssi* $(x,y) = (0,0)$.
   2. $||\lambda(x,y)||_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda|||(x,y)||_1$.
   3. $||(x,y) + (x',y')||_1 = ||(x+x', y+y')||_1 = |x+x'| + |y+y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = (|x| + |y|) + (|x'| + |y'|) = ||(x,y)\|_1 + \|(x',y')||_1$.
   On voit que les conditions d'une norme sont vérifiées, par conséquent, $\|.\|_1$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
   Pour les deux autres normes, on reprend un même raisonnement.

2. *Montrer que toutes ces normes sont équivalentes.*
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, alors*
   1.

   $$\max(|x|, |y|) \leq |x| + |y| \leq 2\max(|x| + |y|)$$

   c'est à dire

   $$\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\|(x,y)\|_\infty.$$

   2. on a

   $$(\max(|x|, |y|))^2 = \begin{cases} x^2 \ si \ |x| > |y|; \\ y^2 \ si \ |y| > |x|. \end{cases}$$

   donc

   $$(\max(|x|, |y|))^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2(\max(|x| + |y|))^2$$

   Ceci implique

   $$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}\max(|x| + |y|)$$

   c'est à dire

$$\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_\infty$$

3. On a $\|(x,y)\|_1 \leq 2\|(x,y)\|_\infty$ et $\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2$, donc

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2.$$

D'autre part, $\|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_\infty$ et $\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1$, donc

$$\|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_1.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_1$$

3. *Montrer que toute boule pour $||.||_1$ contient une boule pour $||.||_\infty$, et vice versa.*
   Pour $a=(a_1,a_2)$, notons $B_1(a,r)$ (resp. $B_\infty(a,r)$) une boule de centre a et de rayon r pour la norme $||.||_1$ (resp. $||.||_\infty$).
   Soit $x \in B_1(a,r)$, alors $||x-a||_1 < r$. Puisque pour tout x, $||x||_\infty \leq ||x||_1$, alors $||x-a||_\infty < r$ et donc $x \in B_\infty(a,r)$. Par conséquent $B_1 \subset B_\infty$.
   Soit $x \in B_\infty(a,r)$, alors $||x-a||_\infty < r$, c'est à dire $2||x-a||_\infty < 2r$. Puisque pour tout x, $||x||_1 \leq 2||x||_\infty$, alors $||x-a||_1 < 2r$ et donc $x \in B_1(a,2r)$. Par conséquent $B_\infty(a,r) \subset B_1(a,2r)$.

Exercice 3. *Soit $C([a,b])$, l'ensemble des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé. Pour toute fonction $f \in C[a,b]$, on pose $||f|| = Sup_{[a,b]}|f(x)|$.*
Montrer que $(C([a,b]), ||.||)$ est un espace vectoriel normé.

Puisque f est une fonction continue sur un intervalle fermé et borné, alors $sup_{[a,b]}|f(x)|$ existe et fini, donc $\|.\|$ est une application sur $C[a,b]$ et de plus elle est positive. Vérifions maintenant les conditions de la norme.
1. Soit $f \in C[a,b]$, $||f|| = 0 \Leftrightarrow sup_{[a,b]}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est une fonction nulle. D'où la séparation de $||.||$.
2. Pour tout scalaire λ et pour toute fonction $f \in C[a,b]$, $\|\lambda f\| = sup_{[a,b]}|\lambda f(x)| = |\lambda| sup_{[a,b]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|$. Ceci implique l'homogénéité de $||.||$.
3. Enfin pour $f,g \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x|$, ceci implique $sup_{[a,b]}|f(x)+g(x)| \leq sup_{[a,b]}(|f(x)|+|g(x)|) = sup_{[a,b]}|f(x)| + sup_{[a,b]}|g(x)|$, c'est à dire $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. D'où l'inégalité triangulaire

Exercice 4. *Soit $(E, ||.||)$ un evn. Montrer que :*

1. *Toute boule ouverte est un ouvert.*
   Soit $B(a,r)$ une boule ouverte. il s'agit de montrer que B est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in B$, alors $||x-a|| < r$. Posons $r' = min(||x-a||, r - ||x-a||)$. Il en résulte que $B(x,r') \subset B(a,r)$. Par conséquent $B(a,r)$ est un ouvert.
2. *Toute boule fermé est un fermé.*
   Soit $\overline{B}(a,r)$ une boule fermée. il s'agit de montrer que $\overline{B}^c$ est un ouvert. Soit $x \in \overline{B}^c$, alors $||x-a|| > r$. Posons $r' = ||x-a|| - r$. Il en résulte que $B(x,r') \subset \overline{B}^c(a,r)$. Par conséquent $\overline{B}^c(a,r)$ est un ouvert et donc $B(a,r)$ est un fermé.
3. *L'intersection de deux boules ouvertes est un ouvert.*
   Soient $B_1(a_1,r_1)$ et $B_2(a_2,r_2)$ deux boules ouvertes. Soit $x \in B_1 \cap B_2$,alors $||x-a_1|| < r_1$ et $||x-a_2|| < r_2$. Posons $r = min(r_1 - ||x-a_1||, r_2 - ||x-a_2||)$. Il en résulte que $B(x,r) \subset B_1 \cap B_2$. Par conséquent $B_1 \cap B_2$ est un ouvert.

Exercice 5. *Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout $x,y\in E$, on pose $d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Montrer que d' est une distance sur E.*
Indication : On peut utiliser la fonction $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ pour $t>0$.

Solution :
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$d'(x,y)=0 \Leftrightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0$ et ceci est équivalent à $x=y$ puisque par hypothèse d est une distance d'où la séparation de d'.
Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}$ car d est une distance et donc symétrique. Ceci est équivalent à $d'(x,y)=d'(y,x)$ d'où la symétrie de d'.
Pour vérifier l'inégalité triangulé, on a besoin de la fonction f. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par hypothèse d est une distance, donc $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$. Puisque f est croissante donc $f(d(x,y))\leq f(d(x,z)+d(z,y))\Rightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\dfrac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}=\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\dfrac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}\leq\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\dfrac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$ c'est à dire $d'(x,y)\leq d'(x,z)+d'(z,y)$. D'où l'inégalité triangulé qui est vérifiée. Par conséquent d' est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :*

1. *L'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé contenant A.*
   Il s'agit de montrer que $A\subset\overline{A}$, $\overline{A}$ est un fermé et si F est un fermé tel que $A\subset F$ alors $\overline{A}\subset F$.
   a. Soit $x\in A$, il est claire que $\forall r>0$, $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$, cette intersection contient au moins x. Ceci implique $x\in\overline{A}$ et donc $A\subset\overline{A}$.
   b. Montrer que $\overline{A}$ est un fermé est équivalent à montrer que son complémentaire $\overline{A}^c$ est un ouvert. Soit $x\in\overline{A}^c$, alors $x\notin\overline{A}$, donc $\exists B(x,r)$ telle que $A\cap B=\emptyset$
2. *Montrer que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.*
   Il s'agit de montrer que $\overset{\circ}{A}\subset A$, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et si O est un ouvert tel $O\subset A$, alors $O\subset\overset{\circ}{A}$.
   Soit $x\in\overset{\circ}{A}$, par définition $\exists B(x,r)$ tel que $B(x,r)\subset A$, donc $x\in A$, c'est à dire $\overset{\circ}{A}\subset A$.
   Soit $x\in\overset{\circ}{A}$; alors il existe une boule ouverte $B(x,r)$ telle que $B(x,r)\subset A$. Puisque $B(x,r)$ est ouvert, ceci implique que tous les éléments de $B(x,r)$ sont des points intérieurs de A, ce qui implique que $B(x,r)\subset\overset{\circ}{A}$, donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
   Soit O un ouvert tel que $O\subset A$. Par définition d'un point intérieur, on déduit que tous les point de O sont intérieurs à A, et donc $O\subset\overset{\circ}{A}$.
3. *A est fermé si, et seulement si, il contient la limite de chacune de ses suites convergentes.*
   Soit A un fermé et soit $(x_n)_n$ une suite dans A convergeant vert x. Montrons que $x\in A$. Soit $r>0$. puisque la suite $x_n)_n$ converge vers x, alors $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $x_n\in B(x;r)$. Ceci implique que $A\cap B(x,r)\neq\emptyset$, c'est à dire toute boule contenant x contient un point de A. Par conséquent, $x\in\overline{A}$. Puisque A est fermé, alors $A=\overline{A}$. D'où $x\in A$.
   Réciproquement, supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x, on a $x\in A$. Montrons que A est fermé (c'est à dire $A=\overline{A}$). Soit $x\in\overline{A}$, par définition $\forall n>0, B(x,\dfrac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$. Donc $\forall n>0; \exists x_n\in B(x,\dfrac{1}{n})\cap A$. Puisque quand $n\longrightarrow\infty$,

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, *cela veut dire que la distance entre* x *et* x_n *tend aussi vers* 0 *quand* $n \longrightarrow \infty$, *c'est à dire* $lim_{n\longrightarrow\infty}||x_n - x|| = 0$ *et la suite* $(x_n)_n$ *converge vers* x. *Mais par hypothèse* $x \in A$ *et donc* $\overline{A} \subset A$. *Par conséquent* A *est fermé.*

Exercice 7. *Soient* A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *;*

   $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap \overline{A \cup B} \neq \emptyset \Leftrightarrow B(x,r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ *ou* $B(x,r) \cap \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *;*
   $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap \overline{A \cap B} \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ *et* $B(x,r) \cap \overline{B} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$ *;*
   $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow \exists r > 0, B(x,r) \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \Rightarrow B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$ *ou* $B(x,r) \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow B(x,r) \subset A \overset{\circ}{\cup} B \Rightarrow x \in A \overset{\circ}{\cup} B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$.
   L'autre inclusion peut ne pas avoir lieu. En effet, pour $A = [1,4]$ *et* $B = [4,5]$, *on a* $A \overset{\circ}{\cup} B = [1, \overset{\circ}{5}] =]1,5[$ *n'est pas inclus dans* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = [1, \overset{\circ}{4}] \cup [4, \overset{\circ}{5}] =]1,4[\cup]4,5[=]1,5[- \{4\}$.

4. $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.