Solution de la série 1 :

Exo 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) =$$

- Montrons que f est une fonction convexe :

$\forall x \in \mathbb{R}$, On a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} ;$$

et $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ (Semi-définie-positive)

D'où : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exo 3 :

- Trouvons les minima et les maxima sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

a). $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{6} y^3$

Il y a 02 points critiques : $(0,0)$ et $(\frac{1}{2}, 1)$

[$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \frac{1}{2} y^2 + x = 0 \end{cases}$, En suite, on résout ce système et on trouve ces points]

La matrice Hessienne : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$

Pour $y = 0 \Rightarrow$ La matrice a deux valeurs positives de signes différents. Le point $(0,0)$ n'est ni un minimum, ni un maximum.

Pour $y = 1$, La matrice est définie positive. Donc le point $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est un minimum.

b). $g(x,y) = x^2 - 2xy + 1$.

Le point $(0,0)$ est un point critique, mais : ce n'est ni un minimum, ni un maximum.

c) $h(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

On a deux points critiques $(0,0)$ et $(3,3)$.

· $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum, car la matrice Hessienne n'est ni semi-positive ni semi-négative.

· $(3,3)$ est un minimum.

Exo5:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1). Trouvons les points critiques de f.

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 & \ldots (1) \\ 4y^3 - 4x = 0 & \ldots (2) \end{cases}$$

De (1) $\Longrightarrow 4x^3 = 4y \Longleftrightarrow y = x^3 \quad \ldots (*)$

On remplace $(*)$ dans (2), on trouve :

$$4(x^3)^3 - 4x = 0 \Longleftrightarrow 4x(x^8 - 1) = 0$$

$$4x = 0 \quad \vee \quad x^8 - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x^8 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 1.$$

Ainsi : $y = 0 \quad \vee \quad y = -1 \quad \vee \quad y = 1$.

Donc : les points critiques de f sont :

$(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$.

- Déterminons la nature de ces points critiques :

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est ni maximum, ni un minimu

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un minimum de f.

$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un maximum de f.

2). Montrons qu'il est d'appliqué la méthode de Newton aux points $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^t$.

càd : Montrons que $\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est inversible.

et $\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est inversible (càd : det $\neq 0$)

On a : $\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\det\left[\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right] = \det\left[\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = -7 \neq 0$

Donc :

$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ sont inversibles.

D'où : On peut appliquer la méthode de Newton aux points $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3)- Appliquons la méthode de Newton au point $x^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

Itération 1 :

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^0)$$

On a : $\left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1} = \dfrac{1}{\det\left(\nabla^2 f(x^0)\right)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

pour une matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{-1}{7}\right) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$X^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui un maximum de f (d'après la réponse de la 1ère question).

Exo6:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy.$$

- Ecrire f sous la forme:

$f(x,y) = \frac{1}{2} X^t . A . X - b^t X + C$.

où A est une matrice carré d'ordre 2 symétrique définie positive, b vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, $C = C^{ste}$. $X = (x,y)^t$.

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy.$$

$$= \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2,2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{2}(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C$$

Où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $b^t = (2,2)^t$, et $C = 0$.

1). Montrons l'existence et l'unicité de f:

- f est propre (car: $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$)
- f est continue (car: f est une fonction polynomiale).
- f est coercive (car: A symétrique définie positive)

$\Rightarrow$ f admet au moins un minimum.

- On a: f est strictement convexe (car: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est définie positive) $\Rightarrow$ f admet au plus un minimum.

D'où: f admet un unique minimum.

2). Déterminer le minimum de f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 4y + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Suite Exo6).

2) $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 4y+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 & \dots(1) \\ 4y+2x=0 & \dots(2) \end{cases}$$

De (1) $\Rightarrow$ $x=-y$, On remplace ceci dans (2), nous trouvons :

$$4y-2y=0 \Rightarrow y=0$$
$$\Rightarrow x=0.$$

D'où : $(0,0)$ est un minimum de f.

3) - En partant du point $x^0=(1,1)$, appliquant la méthode de relaxation : Itération 1 :

- Calculons $X^1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

On pose : $g(x_1)=f(x_1,1)=x_1^2+2+2x_1$.

min $g(x_1)$:

$g'(x_1)=2x_1+2=0 \Rightarrow x_1=-1$.

$g''(x_1)=2 \geqslant 0 \Rightarrow x_1=-1$ est le minimum de $g(x_1)$.

. Calculons y_1 :

On pose : $h(y_1)=f(-1,y_1)=1+2y_1^2-2y_1$

min $h(y_1)$:

$h'(y_1)=4y_1-2=0 \Rightarrow y_1=\frac{1}{2}$.

$h''(y_1)=4 \geqslant 0 \Rightarrow y_1=\frac{1}{2}$ est le minimum de h.

Donc : $X^1=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Itération 2 : - Calculons $X^2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$X^1=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$g(x_2) = f(x_2, \frac{1}{2}) = x_2^2 + 1 + x_2$

$g'(x_2) = 2x_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{2}$

$g''(x_2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{2}$ est un minimum de g

$h(y_2) = f(-\frac{1}{2}, y_2) = \frac{1}{4} + 2y_2^2 - y_2$

$h'(y_2) = 4y_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}$

$h''(y_2) = 4 > 0 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}$ est un minimum de h.

Donc : $\quad X^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Itération 3 : Calculons $X^3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$X^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$g(x_3) = f(x_3, \frac{1}{4}) = x_3^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}x_3$

$g'(x_3) = 2x_3 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{4}$

$g''(x_3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{-1}{4}$ est un minimum de g.

- Calculons y_3 :

$h(y_3) = f(\frac{-1}{4}, y_3) = \frac{1}{16} + 2y_3^2 - \frac{1}{2}y_3$

$h'(y_3) = 4y_3 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow y_3 = \frac{1}{8}$

$h''(y_3) = 4 > 0 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{8}$ est un minimum de h.

Donc : $\quad X^3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

- Itération k : La forme générale de X^k :

$X^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^0} \\ \frac{1}{2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{1-1}} \\ \frac{1}{2^1} \end{pmatrix}$

$$X^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^1} \\ \frac{1}{2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{2-1}} \\ \frac{1}{2^2} \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^2} \\ \frac{1}{2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{3-1}} \\ \frac{1}{2^3} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$X^k = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$$

Conclusion : On remarque que lorsque $k \to +\infty$:

$X^k \longrightarrow X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est le minimum de f.