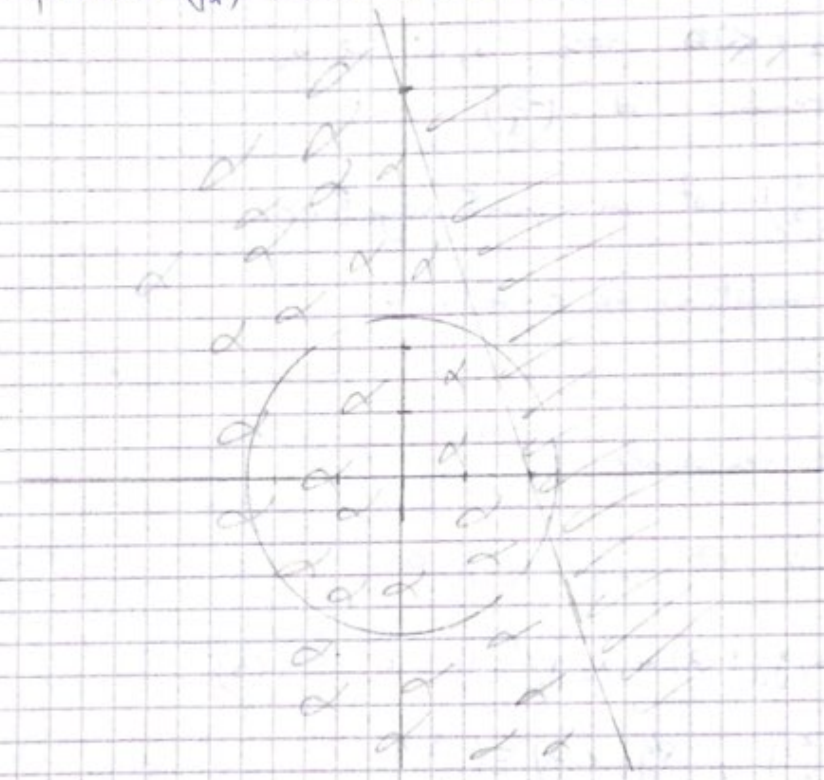
.- Solution de la série 02 :

Exo 1 :

$$(P_1)\begin{cases} \min\ f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10y - 10x \\ \text{s-c :} \\ g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 5 \leq 0 \qquad d_1 : x^2 + y^2 = 5 \\ g_2(x,y) = 3x + y - 6 \leq 0 \qquad (d_2) : y = 6 - 3x \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 . \end{cases}$$

1) Le problème (P_1) admet-il une solution ? Est-elle unique ?



On a : . f propre et continue.

. Le domaine des solutions réalisable est convexe fermé.

. f est coercive et strictement convexe, car sa matrice Hessienne est semi-définie-positive. (S-D-P)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y - 10 \\ 2x + 2y - 10 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 8 - 4 > 0 \end{matrix}\right\} \text{D'où : } \nabla^2 f \text{ est S-D-P.}$$

2) Déterminons les contraintes active et non active en $\binom{1}{2}$

$g_1(1,2) = 1 + 2^2 - 5 = 0$ (active)

$g_2(1,2) = 3 + 2 - 6 = -1 < 0$ (non active)

3) - $X = \binom{1}{2}$

a) x est-il un point régulier?

$\exists ?\ d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$\langle \nabla g_1(x), d \rangle < 0 \Rightarrow \binom{2}{4}(d_1, d_2) < 0$

$2d_1 + 4d_2 < 0 \Rightarrow d_1 < -2d_2$

Il suffit de prendre $d = \binom{-3}{1}$

Donc: $X = \binom{1}{2}$ est un point régulier.

b) Vérifions les conditions de K-K-T :

1). $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$

2) $X = \binom{1}{2}$ est réalisable

3) $\mu_1 g_1(1,2) = 0$ et $\mu_2 g_2(1,2) = 0$

4) $\nabla f(1,2) + \mu_1 g_1(1,2) + \mu_2 g_2(1,2) = 0$ (S)

$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\nabla g_2(x,y) = \nabla g(1,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu_2 g_2(1,2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$ car: $g_2(1,2)$ inactive.

(S) devient : $\mu_1 \cdot \nabla g_1(1,2) = -\nabla f(1,2)$

$\mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\mu_1 = 2 \\ 4\mu_1 = 4 \end{cases}$

$\mu_1 = 1 > 0$, $\mu_2 = 0$ $(\geqslant 0)$

Donc : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vérifier les conditions K-K-T.

Conclusion :

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est la solution du problème (P_2).

Exo 3 :

- Résoudre le problème (P_3) en utilisant la méthode de Lagrange-Newton :

$$(P_3) \begin{cases} \min f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz \\ s\text{-}c : \\ h_1(x,y,z) = 1.x + 0.y - 1.z = 0 \\ h_2(x,y,z) = 0.x + 1.y + 1.z = 1. \end{cases}$$

$f(x,y,z) = \frac{1}{2} X^t Q X - C^t X.$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda_1 = 0 \\ -x + 2y - z + \lambda_2 = 0 \\ -y + 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases} , \quad \lambda_1 = \frac{-1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{-2}{5}.$$