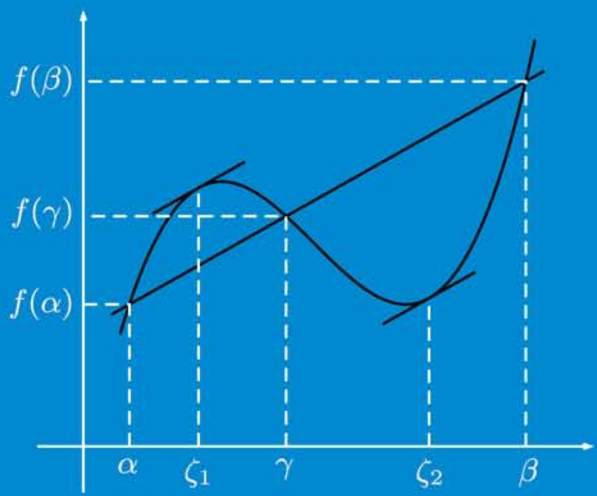
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Problèmes d'analyse II

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

EXERCICES CORRIGÉS



Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak

Traduction : Eric Kouris

EDP SCIENCES

PROBLÈMES D'ANALYSE II
Continuité et dérivabilité

Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak
Traduction : Eric Kouris

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

This work was originally published in Polish, as *Zadania z Analizy Matematycznej. Część Druga Funkcje Jednej Zmiennej–Rachunek Różniczowy*, © 1998 Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin. Published in English by the American Mathematical Society under the title "*Problems in Mathematical Analysis II: Continuity and Differentiation*", © 2001 American Mathematical Society. The present translation was created for EDP Sciences under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-86883-0086-5

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Ce livre est le second d'une série de trois recueils d'exercices corrigés traitant des bases de l'analyse réelle. Il s'adresse d'abord aux étudiants, principalement ceux des niveaux L1 à L3, qu'ils soient à l'université ou en CPGE. Il intéressera aussi les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation de mathématiques qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer.

Ce second volume traite principalement des fonctions réelles d'une variable réelle. Le premier chapitre traite en profondeur des fonctions continues (la dernière section, sur les fonctions entre espaces métriques, intéressera plus particulièrement les étudiants de L3 et M1). Le second chapitre aborde les fonctions dérivables (la dernière section traitant de généralisations de la notion de dérivée, thème très rarement abordé dans les ouvrages s'adressant aux étudiants du premier cycle universitaire) et le dernier chapitre se concentre sur les séries de fonctions. Chaque section, centrée sur un thème, commence par des exercices relativement simples et se poursuit par des problèmes plus difficiles, certains étant des théorèmes classiques. Souvent, différents aspects d'un même thème sont traités en une série d'exercices successifs pour permettre d'en approfondir la compréhension.

Tous les exercices sont corrigés, le plus souvent en détail, ce qui permettra aux étudiants de ne pas « sécher » sur un exercice difficile. Nous les invitons cependant à chercher par eux-mêmes les exercices avant de regarder les solutions pour ne pas se priver du plaisir de les résoudre. Nous insistons aussi sur le fait que les auteurs ne donnent pas nécessairement toutes les étapes d'un calcul lorsqu'ils considèrent que celui-ci ne pose pas de problèmes techniques. C'est bien sur aux étudiants de prendre le temps de rédiger entièrement leurs solutions.

Nous avons ajouté dans cette traduction quelques notes pour préciser certaines définitions et éviter ainsi d'avoir à chercher dans d'autres ouvrages. Nous avons aussi ajouter en note les noms de certaines propriétés et relations pour inviter les étudiants à engager des recherches par eux-mêmes. L'index à la fin de l'ouvrage permet de facilement retrouver une définition et la table des renvois permet de voir les liens entre les différents problèmes dans ce volume et dans les deux autres.

Je tiens à remercier Daniel Guin et Xavier Cottrell pour avoir pris le temps de relire cette traduction et pour les remarques qu'ils m'ont faites afin d'améliorer le style et de corriger les erreurs. Je reste responsable de celles qui subsisteraient. Je souhaite aussi remercier pour sa disponibilité Patrick Fradin, l'auteur du logiciel TeXgraph avec lequel toutes les figures de cet ouvrage et l'illustration de la couverture ont été réalisées.

É. Kouris

PRÉFACE À L'ÉDITION ANGLAISE

Cet ouvrage est le second volume d'une série de recueils de problèmes d'analyse. Il traite des fonctions réelles d'une variable réelle, à l'exception de la section I.7 où sont abordées les fonctions définies sur un espace métrique. Comme dans le premier volume, *Problèmes d'Analyse I, Nombres réels, suites et séries*, chaque chapitre est divisé en deux parties. La première partie est composée d'exercices et de problèmes, la seconde des solutions à ces problèmes. Bien que souvent un problème donné admette plusieurs solutions, nous n'en présentons qu'une. De plus, les problèmes sont divisés en sections suivant les méthodes utilisées pour leur résolution. Par exemple, si un problème se trouve dans la section *Fonctions convexes*, cela signifie que l'on utilise des propriétés des fonctions convexes dans la solution. Bien que chaque section commence par des exercices relativement simples, on trouvera aussi des problèmes assez difficiles, dont certains sont, en fait, des théorèmes.

Ce livre s'adresse principalement aux étudiants en mathématiques mais il couvre des thèmes que les enseignants pourront inclure dans leurs cours ou utiliser dans des séances de travaux dirigés. Par exemple, suivant Steven Roman [*Amer. Math. Monthly*, 87 (1980), pp. 805-809], nous présentons une démonstration de la formule bien connue de Faà di Bruno donnant la dérivée n-ième de la composée de deux fonctions. Les applications de cette formule aux fonctions analytiques réelles données au chapitre III sont principalement tirées de *A Primer of Real Analytic Functions* de Steven G. Kranz et Harold R. Parks. En fait, nous avons trouvé cet ouvrage si stimulant que nous n'avons pas résisté à y emprunter quelques théorèmes. Nous souhaitons aussi mentionner ici une généralisation du théorème de Tauber due à Hardy et Littlewood. La démonstration que nous en donnons est basée sur la publication de Karamata [*Math. Zeitschrift*, 2 (1918)].

Nous avons emprunté librement dans plusieurs ouvrages, recueils de problèmes et sections de problèmes de journaux tels que *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Today* (en russe) et *Delta* (en polonais). Nous donnons la liste complète des livres dans la bibliographie. Comme dans le premier volume, donner toutes les sources originales dépassait nos objectifs et nous avons pu oublier certaines contributions. Nous présentons nos excuses si cela s'est produit.

Toutes les notations et définitions utilisées dans ce volume sont standards. Néanmoins, pour éviter toute ambiguïté et dans un souci de cohérence, une liste des notations et définitions est incluse au début de ce livre. Nos conventions pour les renvois s'expliquent le mieux par des exemples : I.2.13 et I.2.13 (vol. I) représentent respectivement le numéro du problème dans ce volume et dans le volume I.

Nous devons beaucoup à de nombreux amis et collègues avec lesquels nous avons eu de nombreuses conversations productives. Une mention particulière doit être faite pour Tadeusz Kuczumow avoir suggéré différents problèmes et solutions et pour Witold Rzymowski qui nous a fourni son manuscrit [28]. Nous remercions aussi sincèrement Armen Grigoryan, Małgorzata Koter-Mórgowska, Stanisław Prus et Jadwiga Zygmunt pour avoir réalisé les figures et pour nous avoir aidés à les incorporer au texte. Nous avons aussi une grande dette envers le professeur Richard J. Libera de l'université du Delaware pour son aide généreuse dans la traduction anglaise et pour toutes ses suggestions et corrections qui ont grandement amélioré autant la forme que le contenu des différents volumes. Nous aimerions aussi remercier l'équipe de l'AMS pour leur assistance (par courriel) pour mener à bien notre travail.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite réelle achevée, autrement dit, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $[a\,,b]$ est l'intervalle fermé d'extrémités a et b.
- $]a\,,b[$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
- $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (on a conservé la notation anglophone).
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x > 0, \\ -1 & \text{pour} \quad x < 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, on pose aussi $0! = 1$,

  $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2) \times 2n$,

  $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-1)$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup \mathbf{A}$ est le plus petit majorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas majoré, on pose alors $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré, alors $\inf \mathbf{A}$ est le plus grand minorant de $\mathbf{A}$. Si l'ensemble non vide $\mathbf{A}$ n'est pas minoré, on pose alors $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Une suite $\{a_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $a_{n+1} \geqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La classe des suites monotones est formée des suites croissantes et des suites décroissantes.

- Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles ($b_n \neq 0$ pour tout n). Si le quotient a_n/b_n tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit alors $a_n = o(b_n)$ (resp., $a_n = O(b_n)$).

- Un réel c est une valeur d'adhérence de la suite $\{a_n\}$ s'il existe une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ convergente vers c.

- Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $\{a_n\}$. La limite inférieure, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, et la limite supérieure, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, sont définies comme suit :

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas majorée,} \\ -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est majorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ n'est pas minorée,} \\ +\infty & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{si } \{a_n\} \text{ est minorée et } \mathbf{S} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- Un produit infini $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dit convergent s'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite $\{a_{n_0}a_{n_0+1} \cdot \cdots \cdot a_{n_0+n}\}$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une limite P_0 non nulle. Le nombre $P = a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n_0-1} \cdot P_0$ est appelée la valeur du produit infini.

- Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ et si f est une fonction définie sur $\mathbf{X}$, $f_{|\mathbf{A}}$ est la restriction de f à $\mathbf{A}$.

Si $(\mathbf{X}, d)$ est un **espace métrique**, $x \in \mathbf{X}$ et $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbf{X}$, alors

- $\mathbf{A}^c = \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ est le complémentaire de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{X}$,

- $\mathbf{B_X}(x,r)$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{X}}(x,r)$ représentent respectivement la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon r. Si $\mathbf{X}$ est fixé, on omet l'indice et on écrit simplement $\mathbf{B}(x,r)$, $\overline{\mathbf{B}}(x,r)$,
- $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ est l'intérieur de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique $(\mathbf{X},d)$,
- $\overline{\mathbf{A}}$ est l'adhérence de $\mathbf{A}$ dans l'espace métrique,
- $\partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$ est la frontière de $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{diam}(\mathbf{A}) = \sup\{d(x,y) : x, y \in \mathbf{A}\}$ est le diamètre de l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\operatorname{dist}(x,\mathbf{A}) = \inf\{d(x,y) : y \in \mathbf{A}\}$ est la distance de x à l'ensemble $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}$ est un ensemble de type $\mathcal{F}_\sigma$ si c'est une union dénombrable d'ensembles fermés dans $(\mathbf{X},d)$,
- $\mathbf{A}$ est un ensemble de type $\mathcal{G}_\delta$ si c'est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans $(\mathbf{X},d)$,
- $\mathbf{X}$ est dit connexe s'il n'existe pas de sous-ensembles ouverts disjoints $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{X}$ tels que $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.
- $$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$

  est la fonction caractéristique de $\mathbf{A}$.

Continuité, dérivabilité.

- $\mathscr{C}_{\mathbf{A}}$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{C}^n_{]a,b[}$ est l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{C}^1_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, en considérant aux extrémités respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche. L'ensemble $\mathscr{C}^n_{[a,b]}$ des fonctions n fois continûment dérivables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est définie récursivement.
- $\mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$, $\mathscr{C}^\infty_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables respectivement sur $]a\,,b[$ et $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle, alors

- $f(a^+)$ et $f(a^-)$ représentent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de f en a,
- si le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 0 (resp. reste borné) lorsque x tend vers x_0, on écrit alors $f(x) = o(g(x))$ (resp. $f(x) = O(g(x))$),
- $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f,
- $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ représentent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de f en a.

I

LIMITES ET CONTINUITÉ

Énoncés

I.1. Limite d'une fonction

On adopte les définitions suivantes.

Définition 1. Une fonction réelle f est dite *croissante* (resp. *strictement croissante*, *décroissante*, *strictement décroissante*) sur un ensemble non vide $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$, implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Une fonction croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante) est dite *monotone* (resp. *strictement monotone*).

Définition 2. L'ensemble $]a - \varepsilon\, , a + \varepsilon[\setminus \{a\}$, où $\varepsilon > 0$, est un *voisinage épointé* du point $a \in \mathbb{R}$.

I.1.1. Trouver les limites suivantes ou dire si elles n'existent pas.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$, $a, b > 0$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$.

I.1.2. Soit $f\colon\,]-a\,,a[\,\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$,

(b) si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = l$. L'implication réciproque est-elle exacte ?

I.1.3. Soit $f\colon\,]-a\,,a[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

I.1.4. Soit f une fonction définie sur un voisinage épointé de a telle que $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$. Déterminer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

I.1.5. Prouver que si f est une fonction bornée sur $[0\,,1]$ vérifiant $f(ax) = bf(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}$ et $a, b > 1$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

I.1.6. Calculer

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\dfrac{1}{|x|}\right]\right)\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right]+\left[\dfrac{2}{x}\right]+\ldots+\left[\dfrac{k}{x}\right]\right)\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

I.1.7. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{[P(x)]}{P([x])}$, où P est un polynôme à coefficients strictement positifs.

I.1.8. Montrer sur un exemple que la condition

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+f(2x))=0 \tag{$*$}$$

n'implique pas que f admet une limite en 0. Prouver que s'il existe une fonction φ telle que, dans un voisinage épointé de 0, l'inégalité $f(x)\geqslant\varphi(x)$ est vérifiée et $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, alors $(*)$ implique $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

I.1.9.

(a) Donner un exemple de fonction f vérifiant la condition

$$\lim_{x\to 0}(f(x)f(2x))=0$$

et telle que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ n'existe pas.

(b) Montrer que si les inégalités $f(x)\geqslant|x|^\alpha$ $(\frac{1}{2}<\alpha<1)$ et $f(x)f(2x)\leqslant|x|$ sont vérifiées dans un voisinage épointé de 0, alors $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

I.1.10. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{x^\alpha}=g(a)$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$. Prouver qu'il existe c tel que $g(a)=ca^\alpha$.

I.1.11. Soit $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$ pour tout $c>0$.

I.1.12. Prouver que si $a>1$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty.$

I.1.13. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$ si $\alpha>0$.

I.1.14. Pour $a>0$, prouver que $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. Utiliser cette égalité pour prouver la continuité de la fonction exponentielle.

I.1.15. Montrer que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

I.1.16. Prouver que $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$. En déduire que la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.1.17. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{a}$, $\quad a > 0$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

I.1.18. Trouver

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

I.1.19. Déterminer les limite suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{Arctan} 3x + 3x^2}{\ln\left(1 + 3x + \sin^2 x\right) + xe^x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\tan x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{\operatorname{cotan} x}$.

I.1.20. Calculer

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln \frac{x}{2}\right)$.

I.1.21. On suppose que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et m, M strictement positifs tels que $m \leqslant \frac{f(x)}{x^\alpha} \leqslant M$ pour $x > 0$ dans un voisinage de 0. Prouver que si $\alpha \lim_{x\to 0^+} g(x) \ln x = \gamma$, alors $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$. Dans le cas où $\gamma = +\infty$ ou $\gamma = -\infty$, on prend les conventions $e^{+\infty} = +\infty$ et $e^{-\infty} = 0$.

I.1.22. On suppose que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Prouver que si $\lim_{x\to 0} g(x)(f(x) - 1) = \gamma$, alors $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$.

I.1.23. Calculer

(a) $$\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x,$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)},$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\left(1+e^{-\frac{1}{x^2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x^2}+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

I.1.24. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(a+n)\}$ converge vers 0 pour tout $a \geqslant 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

I.1.25. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(an)\}$ converge vers 0 pour tout $a > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

I.1.26. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\{f(a+bn)\}$ converge vers 0 pour tout $a \geqslant 0$ et tout $b > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe-t-elle ?

I.1.27. Prouver que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

I.1.28. Soit f une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1)-f(x)) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

I.1.29. Soit f une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et minorée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1)-f(x)) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

I.1.30. Soit f une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$ et bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$, $a < b$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}$ existe pour un entier $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}.$$

I.1.31. Soit f une fonction définie sur $]a\,,+\infty[$, bornée sur tout intervalle borné $]a\,,b[$ $(a < b)$ et telle que $f(x) \geqslant c > 0$ pour tout $x \in \,]a\,,+\infty[$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ existe, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ existe aussi et

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} .$$

I.1.32. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Ceci implique-t-il que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe ?

I.1.33. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la suite $\left\{f\left(\frac{a}{n}\right)\right\}$ converge vers 0 pour tout $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

I.1.34. Prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$.

I.1.35. Prouver que si f est croissante (resp. décroissante) sur $]a\,,b[$, on a alors, pour tout $x_0 \in \,]a\,,b[$,

(a) $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^+) = \sup\limits_{x>x_0} f(x)$),

(b) $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$ (resp. $f(x_0^-) = \inf\limits_{x<x_0} f(x)$),

(c) $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$ (resp. $f(x_0^-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0^+)$).

I.1.36. Prouver que si f est croissante sur $]a\,,b[$, on a alors, pour tout $x_0 \in \,]a\,,b[$,

(a) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+)$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x^+) = f(x_0^-)$.

I.1.37. Prouver le *théorème de Cauchy* suivant. Pour que f ait une limite lorsque x tend vers a, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ dès que $0 < |x - a| < \delta$ et $0 < |x' - a| < \delta$. Formuler et prouver une condition nécessaire et suffisante analogue pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe.

I.1.38. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ et $\lim\limits_{\substack{y\to A\\ y\neq A}} g(y) = B$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$, pour autant que $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ soit bien définie et que f n'atteigne pas la valeur A dans un voisinage épointé de a.

I.1.39. Trouver des fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ et $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, mais $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

I.1.40. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1. On note f^n la n-ième *itérée* de f, autrement dit, $f^1 = f$ et $f^n = f\circ f^{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

I.1.41. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1 et $f(0) > 0$. On note f^n la n-ième itérée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver que si m_p est le plus petit entier strictement positif tel que $f^{m_p}(0) > p$, alors

$$\frac{p}{m_p} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} \leqslant \frac{p}{m_p} + \frac{1+f(0)}{m_p}\,.$$

I.1.42. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x) - x$ soit périodique de période 1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n}$ existe et que sa valeur est la même pour tout $x \in \mathbb{R}$, f^n représentant la n-ième itérée de f.

I.2. Propriétés des fonctions continues

I.2.1. Trouver tous les points où la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \sin|x| & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

est continue.

I.2.2. Trouver tous les points où la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

est continue.

I.2.3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(a) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ étant premiers entre eux,} \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \dfrac{qx}{q+1} & \text{si } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ étant premiers entre eux.} \end{cases}$$

(La fonction définie en (a) est appelée *fonction de Riemann*.)

I.2.4. Prouver que si $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, alors $|f| \in \mathscr{C}_{[a,b]}$. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

I.2.5. Déterminer toutes les valeurs de a_n et b_n pour lesquelles la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x & \text{si } x \in [2n\,, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z}, \\ b_n + \cos \pi x & \text{si } x \in \,]2n-1\,, 2n[,\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.6. On pose $f(x) = \left[x^2\right] \sin \pi x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de f.

I.2.7. Pour $x \geqslant \frac{1}{2}$, on pose

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}.$$

Prouver que f est continue et qu'elle est strictement croissante sur $[1\,, +\infty[$.

I.2.8. Étudier la continuité des fonctions suivantes et tracer leur graphe :

(a) $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(c) $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

(d) $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x \in \mathbb{R}^*,$$

(e) $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

I.2.9. Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et périodique, elle atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

I.2.10. Pour $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, prouver qu'il existe $x_\star \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_\star) = \inf\{P(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Prouver aussi que la valeur absolue de tout polynôme P atteint sa borne inférieure, autrement dit qu'il existe $x_\star \in \mathbb{R}$ tel que $|P(x_\star)| = \inf\{|P(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

I.2.11.

(a) Donner un exemple de fonction bornée sur $[0\,,1]$ qui n'atteint ni sa borne supérieure ni sa borne inférieure.

(b) Donner un exemple de fonction bornée sur $[0\,,1]$ qui n'atteint sa borne inférieure sur aucun intervalle $[a\,,b] \subset [0\,,1]$, $a < b$.

I.2.12. Pour $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on pose

$$\omega_f(x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta\}$$

et $\omega_f(x_0) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(x_0, \delta)$. Démontrer que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

I.2.13.

(a) Soit $f, g \in \mathscr{C}_{[a,b]}$. Pour $x \in [a\,,b]$, on pose $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ et

$$H(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Prouver que $h, H \in \mathscr{C}_{[a,b]}$.

(b) Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathscr{C}_{[a,b]}$. Pour $x \in [a\,,b]$, on note $f(x)$ la valeur parmi $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ se trouvant entre les deux autres. Prouver que $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$.

I.2.14. Prouver que si $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, alors les fonctions définies par

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x]\} \quad \text{et} \quad M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x]\}$$

sont aussi continues sur $[a\,,b]$.

I.2.15. Soit f une fonction bornée sur $[a\,,b]$. Prouver que les fonctions définies par

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x[\} \quad \text{et} \quad M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x[\}$$

sont continues à gauche sur $]a\,,b[$.

I.2.16. Vérifier si, sous les hypothèses du problème précédent, les fonctions

$$m^\star(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x]\} \quad \text{et} \quad M^\star(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a\,,x]\}$$

sont continues à gauche sur $]a\,,b[$.

I.2.17. Soit f une fonction continue sur $[a\,,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ soit finie. Prouver que f est bornée sur $[a\,,+\infty[$.

I.2.18. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\{x_n\}$ une suite bornée. Les égalités

$$\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right) \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\right)$$

sont-elles vraies ?

I.2.19. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue et soit $\{x_n\}$ une suite bornée. Montrer que

$$\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right), \tag{1}$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\right). \tag{2}$$

I.2.20. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue et soit $\{x_n\}$ une suite bornée. Montrer que

$$\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\right), \tag{1}$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right). \tag{2}$$

I.2.21. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On définit g en posant

$$g(x) = \sup\{t : f(t) < x\} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Prouver que la fonction g est continue à gauche.

(b) La fonction g est-elle continue ?

I.2.22. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue périodique ayant deux périodes *incommensurables* T_1 et T_2, c'est-à-dire telles que $\frac{T_1}{T_2}$ soit irrationnel. Prouver que f est une fonction constante. Donner un exemple de fonction périodique non constante ayant deux périodes incommensurables.

I.2.23.

(a) Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, périodique et non constante, elle admet alors une plus petite période strictement positive appelée *période fondamentale*.

(b) Donner un exemple de fonction périodique et non constante n'admettant pas de période fondamentale.

(c) Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique sans période fondamentale, alors l'ensemble de ses périodes est dense dans $\mathbb{R}$.

I.2.24.

(a) Prouver que le théorème énoncé dans la partie (a) du problème précédent reste vrai lorsque la continuité de f sur $\mathbb{R}$ est remplacée par la continuité en un point.

(b) Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique sans période fondamentale et continue en un point, elle est constante.

I.2.25. Démontrer que si $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, périodiques et telles que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, alors $f = g$.

I.2.26. Donner un exemple de deux fonctions périodiques f et g telles que toute période de f est incommensurable avec toute période de g et telles que $f + g$

(a) n'est pas périodique,

(b) est périodique.

I.2.27. Soit $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et périodiques de périodes fondamentales respectives T_1 et T_2 strictement positives. Prouver que $h = f + g$ n'est pas périodique si $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$.

I.2.28. Soit $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions périodiques telles que f soit continue et qu'aucune période de g ne soit commensurable avec la période fondamentale de f. Prouver que $f + g$ n'est pas une fonction périodique.

I.2.29. Prouver que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

I.2.30. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

I.2.31. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

I.2.32. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \leqslant f(nx)$ pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ existe (finie ou infinie).

I.2.33. Une fonction f définie sur un intervalle $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ est *convexe* sur $\mathbf{I}$ si

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ et $\lambda \in \,]0\,,1[$. Prouver que si f est convexe sur un intervalle ouvert, elle est continue. Une fonction convexe sur un intervalle quelconque est-elle continue ?

I.2.34. Prouver que si une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues sur $\mathbf{A}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ vers une limite f, la fonction f est alors continue sur $\mathbf{A}$.

I.3. Propriété des valeurs intermédiaires

On rappelle la définition suivante :

Définition. Une fonction réelle vérifie la *propriété des valeurs intermédiaires*[1] sur un intervalle $\mathbf{I}$ contenant $[a\,,b]$ si pour tout v tel que $f(a) < v < f(b)$ ou $f(b) < v < f(a)$ (dit autrement, v se trouve entre $f(a)$ et $f(b)$), il existe c entre a et b tel que $f(c) = v$.

I.3.1. Donner des exemples de fonctions vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur un intervalle $\mathbf{I}$ mais qui ne sont pas continues sur cet intervalle.

I.3.2. Prouver qu'une fonction strictement croissante $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est continue sur $[a\,,b]$.

I.3.3. Soit $f\colon [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ une fonction continue. Prouver que f a un *point fixe* dans $[0\,,1]$, autrement dit, qu'il existe $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

I.3.4. Soit $f, g\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

I.3.5. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Prouver qu'il existe x_0 tel que

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

I.3.6. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que, étant donné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $]a\,,b[$, il existe $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

[1] Cette propriété est aussi appelée la *propriété de Darboux* et une fonction la vérifiant, une *fonction de Darboux*. (N.d.T.)

I.3.7.

(a) Prouver que l'équation $(1-x)\cos x = \sin x$ admet au moins une solution dans $]0\,,1[$.

(b) P étant un polynôme non nul, l'équation $|P(x)| = e^x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

I.3.8. Soit $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$. Prouver que toutes les racines du polynôme

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x+a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x+b_k), \quad x \in \mathbb{R},$$

sont réelles.

I.3.9. Soit f et g deux fonctions vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur $[a\,,b]$. La fonction $f+g$ doit-elle vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sur cet intervalle ?

I.3.10. Soit $f \in \mathscr{C}_{[0,2]}$ telle que $f(0) = f(2)$. Prouver qu'il existe $x_1, x_2 \in [0\,,2]$ tels que

$$x_2 - x_1 = 1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = f(x_1).$$

Donner une interprétation géométrique de ceci.

I.3.11. Soit $f \in \mathscr{C}_{[0,2]}$. Prouver qu'il existe $x_1, x_2 \in [0\,,2]$ tels que

$$x_2 - x_1 = 1 \quad \text{et} \quad f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}\left(f(2) - f(0)\right).$$

I.3.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{C}_{[0,n]}$ telles que $f(0) = f(n)$. Prouver qu'il existe $x_1, x_2 \in [0\,,n]$ tels que

$$x_2 - x_1 = 1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = f(x_1).$$

I.3.13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{C}_{[0,n]}$ telles que $f(0) = f(n)$. Prouver que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, il existe x_k et x'_k tels que $f(x_k) = f(x'_k)$ et $x_k - x'_k = k$ ou $x_k - x'_k = n-k$. Est-il exact que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, il existe x_k et x'_k tels que $f(x_k) = f(x'_k)$ et $x_k - x'_k = k$?

I.3.14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{C}_{[0,n]}$ telle que $f(0) = f(n)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(y)$ admet au moins n solutions telles que $x - y \in \mathbb{N}^*$.

I.3.15. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continues et qui commutent, autrement dit, $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver que si l'équation $f^2(x) = g^2(x)$ admet une solution, alors l'équation $f(x) = g(x)$ en admet aussi une (ici, $f^2(x) = f(f(x))$ et $g^2(x) = g(g(x))$).

Montrer sur un exemple qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse de continuité sur f et g dans ce problème.

I.3.16. Prouver qu'une injection continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone.

I.3.17. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une injection continue. Prouver que s'il existe un entier n tel que la n-ième itération de f soit l'identité, autrement dit, tel que $f^n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

(a) $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si f est strictement croissante,

(b) $f^2(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si f est strictement décroissante.

I.3.18. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la condition $f(f(x)) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que f n'est pas continue.

I.3.19. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et telles qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, f^n désignant la n-ième itérée de f.

I.3.20. Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et $f^{-1}(\{q\})$ est fermé pour tout rationnel q, alors f est continue.

I.3.21. Soit $f\colon\ ]a\,,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Prouver que, étant donné T, il existe une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

I.3.22. Donner un exemple de fonction continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui atteint chacune de ses valeurs exactement trois fois. Existe-t-il une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ atteignant chacune de ses valeurs exactement deux fois ?

I.3.23. Soit $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et *strictement monotone par morceaux* (une fonction f est strictement monotone par morceaux sur $[0\,,1]$ s'il existe une partition de $[0\,,1]$ en un nombre fini de sous-intervalles $[t_{i-1}\,,t_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, telle que f soit strictement monotone sur chacun de ces intervalles). Prouver que f atteint au moins une de ses valeurs un nombre impair de fois.

I.3.24. Une fonction continue $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ atteint chacune de ses valeurs un nombre fini de fois et $f(0) \neq f(1)$. Prouver que f atteint au moins une de ses valeurs un nombre impair de fois.

I.3.25. Soit $f\colon \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue sur un ensemble compact $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $x_0 \in \mathbf{K}$ tel que toute valeur d'adhérence de la suite des itérés $\{f^n(x_0)\}$ soit un point fixe de f. Prouver que la suite $\{f^n(x_0)\}$ est convergente.

I.3.26. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue et telle que la fonction F définie par $F(x) = f(x) - x$ soit périodique de période 1. Prouver que si $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$, il existe $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $F(x_0) = \alpha(f)$. Prouver aussi que f admet un point fixe dans $[0\,,1]$ si et seulement si $\alpha(f) = 0$. (Voir les **problèmes I.1.40-I.1.42**.)

I.3.27. Soit $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ telle qu'il existe une fonction g continue sur $[0\,,1]$ pour laquelle $f + g$ est décroissante. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle ouvert $]0\,,1[$.

I.3.28. Démontrer que toute bijection $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a une infinité de points de discontinuité.

I.3.29. On rappelle que tout $x \in \,]0\,,1[$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction binaire $0,a_1a_2a_3\ldots$, où $a_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas où x admet deux développements binaires distincts, on choisit celui ayant une infinité de chiffres égaux à 1. Soit $f\colon \,]0\,,1[\longrightarrow [0\,,1]$ la fonction définie par

$$f(x) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Prouver que f est discontinue en tout point $x \in \,]0\,,1[$ mais vérifie néanmoins la propriété des valeurs intermédiaires.

I.4. Fonctions semi-continues

Définition 1. La *droite réelle achevée* $\overline{\mathbb{R}}$ est formée de l'ensemble des nombres réels auquel on adjoint deux symboles, $+\infty$ et $-\infty$, avec les propriétés suivantes :

(i) Si x est un réel, alors $-\infty < x < +\infty$, $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

(ii) Si $x > 0$, alors $x \times (+\infty) = +\infty$, $x \times (-\infty) = -\infty$.

(iii) Si $x < 0$, alors $x \times (+\infty) = -\infty$, $x \times (-\infty) = +\infty$.

Définition 2. Si $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble non vide, alors $\sup \mathbf{A}$ (resp. $\inf \mathbf{A}$) est le plus petit (resp. grand) élément de $\overline{\mathbb{R}}$ supérieur (resp. inférieur) ou égal à tout élément de $\mathbf{A}$.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble non vide $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$.

Définition 3. Si x_0 est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$, alors la *limite inférieure* (resp. la *limite supérieure*) de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est définie comme la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble des $y \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe une suite $\{x_n\}$ de points de $\mathbf{A}$ convergente vers x_0 dont les termes sont différents de x_0 et tels que $y = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$. La limite inférieure et la limite supérieure de f lorsque x tend vers x_0 sont notées respectivement $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Définition 4. Une fonction à valeurs réelles est dite *semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) en $x_0 \in \mathbf{A}$ qui est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ si $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$ (resp. $\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$). Si x_0 est un point isolé de $\mathbf{A}$, f est alors semi-continue inférieurement et supérieurement en ce point.

I.4.1. Prouver que si x_0 est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ et $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

(a) $$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

(b) $$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

I.4.2. Prouver que si x_0 est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ et $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

(a) $$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

(b) $$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

I.4.3. Prouver que $y_0 \in \mathbb{R}$ est la limite inférieure de $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ au point d'accumulation x_0 de $\mathbf{A}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$:

(i) il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > y_0 - \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$,

(ii) pour tout $\delta > 0$, il existe $x' \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $f(x') < y_0 + \varepsilon$.

Établir une proposition semblable pour la limite supérieure de f en x_0.

I.4.4. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Démontrer que

(a) $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout réel y et tout $\delta > 0$ il existe $x' \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $f(x') < y$;

(b) $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout réel y et tout $\delta > 0$ il existe $x' \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $f(x') > y$.

I.4.5. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Prouver que si $l = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ (resp. $L = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$), il existe alors une suite $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbf{A}$, $x_n \neq x_0$, convergente vers x_0 et telle que $l = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ (resp. $L = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$).

I.4.6. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Prouver que

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} (-f(x)) = -\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{x\to x_0} (-f(x)) = -\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x).$$

I.4.7. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Prouver que

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)} \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)}.$$

(On pose $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0^+} = +\infty$.)

I.4.8. Soit $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Prouver que (en excluant les formes indéterminées du type $+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$) l'on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) &\leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \\ &\leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Donner des exemples de fonctions pour lesquelles les inégalités précédentes sont strictes.

I.4.9. Soit $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$. Prouver que (en excluant les formes indéterminées du type $0 \times (+\infty)$ et $+\infty \times 0$) l'on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \times \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) &\leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)\times g(x)) \leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \times \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \\ &\leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)\times g(x)) \leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \times \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Donner des exemples de fonctions pour lesquelles les inégalités précédentes sont strictes.

I.4.10. Prouver que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, on a alors (en excluant les formes indéterminées du type $+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$)

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x), \\ \overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

De plus si f et g sont positives, on a alors (en excluant les formes indéterminées du type $0 \times (+\infty)$ et $+\infty \times 0$)

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)\times g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \times \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x), \\ \overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)\times g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \times \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

I.4.11. Prouver que si f est continue sur $]a\,,b[$, $l = \varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ et $L = \varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, pour tout $\lambda \in [l\,,L]$, il existe alors une suite $\{x_n\}$ de points de $]a\,,b[$ convergente vers a telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda$.

I.4.12. Trouver les points où $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \sin x & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

est semi-continue.

I.4.13. Trouver les points où $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

est semi-continue.

I.4.14. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \frac{1}{p} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \end{cases}$$

est semi-continue supérieurement.

I.4.15. Trouver les points où la fonction définie par

(a) $$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ \frac{qx}{q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux,} \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^q p}{q+1} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap\,]0\,,1],\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*, \\ & p \text{ et } q \text{ premiers entre eux,} \\ 0 & \text{si } x \in\,]0\,,1[\text{ est irrationnel} \end{cases}$$

n'est ni semi-continue supérieurement, ni semi-continue inférieurement.

I.4.16. Soit $f, g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) en $x_0 \in \mathbf{A}$. Démontrer que

(a) si $a > 0$, alors af est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en x_0. Si $a < 0$, alors af est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) en x_0.

(b) $f + g$ est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en x_0.

I.4.17. Soit $f_n\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) en $x_0 \in \mathbf{A}$. Démontrer que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en x_0.

I.4.18. Démontrer que la limite simple d'une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

I.4.19. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x un point adhérent à $\mathbf{A}$. On définit l'*oscillation de f en x* par

$$o_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup\left\{|f(z) - f(u)| : z, u \in \mathbf{A}, |z - x| < \delta, |u - x| < \delta\right\}.$$

Prouver que $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où

$$f_1(x) = \max\left\{f(x), \varlimsup_{z\to x} f(z)\right\} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \min\left\{f(x), \varliminf_{z\to x} f(z)\right\}.$$

I.4.20. Soit f_1, f_2 et o_f définies comme dans le problème précédent. Prouver que f_1 et o_f sont semi-continues supérieurement et f_2 est semi-continue inférieurement.

I.4.21. Prouver que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en $x_0 \in \mathbf{A}$ si et seulement si, pour tout $a < f(x_0)$ (resp. $a > f(x_0)$), il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > a$ (resp. $a < f(x)$) pour tout $x \in \mathbf{A}$ tel que $|x - x_0| < \delta$.

I.4.22. Prouver que $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur $\mathbf{A}$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$ (resp. $\{x \in \mathbf{A} : f(x) < a\}$) est ouvert dans $\mathbf{A}$.

I.4.23. Prouver que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement si et seulement si l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant f(x)\right\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Formuler et démontrer une condition nécessaire et suffisante analogue pour une fonction f semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.

I.4.24. Démontrer le *théorème de Baire* suivant. Toute fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la limite simple d'une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions continues sur $\mathbf{A}$.

I.4.25. Prouver que si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement, $g\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement et $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}$, il existe alors une fonction h continue sur $\mathbf{A}$ telle que

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{A}.$$

I.5. Continuité uniforme

Définition. Une fonction f définie sur $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est *uniformément continue* sur $\mathbf{A}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x et tout y dans $\mathbf{A}$ vérifiant $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

I.5.1. Vérifier si les fonctions suivantes sont uniformément continues sur $]0\,,1[$:

(a) $f(x) = e^x$,

(b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$,

(c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$,

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

(e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$,

(f) $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$,

(g) $f(x) = \ln x$,

(h) $f(x) = \cos x \cos \dfrac{\pi}{x}$,

(i) $f(x) = \operatorname{cotan} x$.

I.5.2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = x \sin x$,

(c) $f(x) = \sin^2 x$,

(d) $f(x) = \sin(x^2)$,

(e) $f(x) = e^x$,

(f) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$,

(g) $f(x) = \sin(\sin x)$,

(h) $f(x) = \sin(x \sin x)$,

(i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

I.5.3. Démontrer que si f est uniformément continue sur $]a\,,b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors les limites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent et sont finies.

I.5.4. Soit f et g deux fonctions uniformément continues sur $]a\,,b[$ (resp. $[a\,,+\infty[$). Ceci implique-t-il la continuité uniforme sur $]a\,,b[$ (resp. $[a\,,+\infty[$) des fonctions

(a) $f+g$, (b) fg, (c) $x \mapsto f(x)\sin x$?

I.5.5.

(a) Prouver que si f est uniformément continue sur $]a\,,b]$ et sur $[b\,,c[$, elle est alors aussi uniformément continue sur $]a\,,c[$.

(b) Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$ et $f\colon \mathbf{A}\cup\mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbf{A}$ et sur $\mathbf{B}$. La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$?

I.5.6. Prouver que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.5.7.

(a) Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ soient finies. Prouver que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $f\colon\ [a\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ soit finie. Prouver que f est uniformément continue sur $[a\,,+\infty[$.

I.5.8. Étudier la continuité uniforme de

(a) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ sur $\mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.5.9. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Les limites $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existent-elles nécessairement ?

I.5.10. Prouver que toute fonction bornée, monotone et continue sur un intervalle $\mathbf{I}\subset\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbf{I}$.

I.5.11. Soit f une fonction uniformément continue et non bornée sur $\mathbb{R}_+$. Est-il exact que l'on a soit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, soit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$?

I.5.12. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x \geqslant 0$, la suite $\{f(x+n)\}$ tend vers 0. Prouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

I.5.13. Soit $f\colon [1\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Prouver qu'il existe $M > 0$ tel que $\frac{|f(x)|}{x} \leqslant M$ pour $x \geqslant 1$.

I.5.14. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Prouver qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{u>0} \{|f(x+u) - f(x)|\} \leqslant M(x+1) \quad \text{pour tout} \quad x \geqslant 0.$$

I.5.15. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue. Prouver que si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbf{A}$, alors $\{f(x_n)\}$ est aussi une suite de Cauchy.

I.5.16. Soit $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné. Prouver que si $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ transforme toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbf{A}$ en une suite de Cauchy, alors f est uniformément continue sur $\mathbf{A}$. Le fait que $\mathbf{A}$ soit borné est-il une condition essentielle ?

I.5.17. Prouver que f est uniformément continue sur $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ si et seulement si pour toutes suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ d'éléments de $\mathbf{A}$,

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{implique} \quad \lim_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

I.5.18. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction uniformément continue. A-t-on

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{x}\right)}{f(x)} = 1\,?$$

I.5.19. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et vérifiant les conditions suivantes :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2) \quad \text{pour tout} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Prouver que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.5.20. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. On pose

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in \mathbf{A}, |x_1 - x_2| < \delta\}$$

et on appelle ω_f le *module de continuité* de f. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{A}$ si et seulement si $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

I.5.21. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Prouver que les propositions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour toute fonction uniformément continue $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, fg est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto |x|\, f(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.5.22. Prouver que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que f soit uniformément continue sur un intervalle $\mathbf{I}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$, $x_1 \neq x_2$,

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > N \quad \text{implique} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

I.6. Équations fonctionnelles

I.6.1. Prouver que les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'*équation fonctionnelle de Cauchy*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires $f(x) = ax$.

I.6.2. Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et une des conditions

(a) f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$,

(b) f est majorée sur un intervalle $]a\,, b[$,

(c) f est monotone sur $\mathbb{R}$,

alors $f(x) = ax$.

I.6.3. Déterminer toutes les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(1) > 0$ et

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

I.6.4. Montrer que les seules solutions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

qui ne sont pas identiquement nulles sont les fonctions logarithmiques.

I.6.5. Montrer que les seules solutions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

qui ne sont pas identiquement nulles sont les fonctions puissances de la forme $f(x) = x^a$.

I.6.6. Trouver toutes les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) - f(y)$ est rationnel pour $x - y$ rationnel.

I.6.7. Pour $|q| < 1$, trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x) + f(qx) = 0.$$

I.6.8. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant l'équation

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x.$$

I.6.9. Déterminer toutes les solutions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle

$$2f(2x) = f(x) + x$$

continues en 0.

I.6.10. Trouver toutes les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'*équation fonctionnelle de Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

I.6.11. Trouver toutes les fonctions continues sur $]a\,,b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, vérifiant l'équation fonctionnelle de Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

I.6.12. Déterminer toutes les solutions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en -1 de l'équation fonctionnelle

$$f(2x+1) = f(x).$$

I.6.13. Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution continue de l'équation

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + axy,$$

alors $f(x) = \frac{a}{2}\,x^2 + bx$ où $b = f(1) - \frac{a}{2}$.

I.6.14. Déterminer toutes les solutions continues en -1 de l'équation fonctionnelle

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \neq 1.$$

I.6.15. Soit $f\colon [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ une fonction continue, décroissante et telle que $f(f(x)) = x$ pour tout $x \in [0\,,1]$. La fonction $f(x) = 1 - x$ est-elle la seule à vérifier ces conditions ?

I.6.16. Soit f et g deux fonctions vérifiant l'équation

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que si f n'est pas identiquement nulle et si $|f(x)| \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a alors aussi $|g(x)| \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

I.6.17. Trouver toutes les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x.$$

I.6.18. Déterminer toutes les solutions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 de

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

I.6.19. Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \quad \text{pour} \quad x\neq 0,1.$$

I.6.20. Une suite *converge au sens de Cesàro* si

$$C\text{-}\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

existe et est finie. Trouver toutes les *fonctions continues au sens de Cesàro*, c'est-à-dire, telles que

$$f\left(C\text{-}\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = C\text{-}\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

pour toute suite $\{x_n\}$ convergente au sens de Cesàro.

I.6.21. Soit $f\colon [0\,,1]\longrightarrow[0\,,1]$ une injection telle que $f(2x-f(x))=x$ pour tout $x\in[0\,,1]$. Prouver que $f(x)=x$ pour tout $x\in[0\,,1]$.

I.6.22. Pour $m\neq 0$, prouver que si une fonction continue $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifie l'équation

$$f\left(2x-\frac{f(x)}{m}\right)=mx,$$

alors $f(x)=m(x-c)$.

I.6.23. Montrer que les seules solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)+f(y-x)=2f(x)f(y)$$

continues sur $\mathbb{R}$ et non-identiquement nulles sont $f(x)=\cos(ax)$ et $f(x)=\operatorname{ch}(ax)$, a étant réel.

I.6.24. Déterminer toutes les solutions continues sur $]-1\,,1[$ de

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=f(x)+f(y).$$

I.6.25. Trouver tous les polynômes P tels que

$$P\left(2x-x^2\right)=\left(P(x)\right)^2.$$

I.6.26. Soit $m, n \geqslant 2$ des entiers. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en au moins un point de $\mathbb{R}_+$ telles que

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^m \quad \text{pour} \quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

I.6.27. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non-identiquement nulles vérifiant les équations

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f(x+z) = f(x) + f(z)$$

pour un certain $z \neq 0$.

I.6.28. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right).$$

I.6.29. Trouver toutes les solutions $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle

$$f(x) + f\left(x^2\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

I.6.30. Prouver que les fonctions $f, g, \varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifient l'équation

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x \neq y,$$

si et seulement s'il existe a, b et c tels que

$$f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c, \quad \varphi(x) = 2ax + b.$$

I.6.31. Prouver qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant les trois conditions :

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$,

(c) f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

I.7. Fonctions continues sur un espace métrique

Dans cette section, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ représentent respectivement des espaces métriques $(\mathbf{X}, d_1)$ et $(\mathbf{Y}, d_2)$. Pour alléger les notations, on écrira « $\mathbf{X}$ est un espace métrique » au lieu d'écrire « $(\mathbf{X}, d_1)$ est un espace métrique ». Sauf précision contraire, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont toujours supposés munis de leur structure euclidienne.

I.7.1. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ et $(\mathbf{Y}, d_2)$ des espaces métriques et $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une fonction. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) La fonction f est continue.

(b) Pour tout ensemble fermé $\mathbf{F} \subset \mathbf{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathbf{F})$ est fermé dans $\mathbf{X}$.

(c) Pour tout ensemble ouvert $\mathbf{G} \subset \mathbf{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathbf{G})$ est ouvert dans $\mathbf{X}$.

(d) Pour tout sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$, $f\left(\overline{\mathbf{A}}\right) \subset \overline{f(\mathbf{A})}$.

(e) Pour tout sous-ensemble $\mathbf{B}$ de $\mathbf{Y}$, $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}}\right)$.

I.7.2. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ et $(\mathbf{Y}, d_2)$ des espaces métriques et $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une fonction continue. Prouver que l'image réciproque $f^{-1}(\mathbf{B})$ d'un ensemble de Borel[2] $\mathbf{B}$ de $(\mathbf{Y}, d_2)$ est un ensemble de Borel de $(\mathbf{X}, d_1)$.

I.7.3. Donner un exemple de fonction continue $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ telle que l'image $f(\mathbf{F})$ (resp. $f(\mathbf{G})$) n'est pas fermée (resp. ouverte) dans $\mathbf{Y}$ pour un fermé $\mathbf{F}$ (resp. ouvert $\mathbf{G}$) de $\mathbf{X}$.

I.7.4. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ et $(\mathbf{Y}, d_2)$ des espaces métriques et $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une fonction continue. Prouver que l'image de tout ensemble compact $\mathbf{F}$ de $\mathbf{X}$ est un compact de $\mathbf{Y}$.

I.7.5. Soit f une fonction définie sur l'union des ensembles fermés $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_m$. Prouver que si la restriction de f à chacun des $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ est continue, f est alors continue sur $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_m$.

Montrer sur un exemple que cette proposition est fausse dans le cas d'une infinité d'ensembles $\mathbf{F}_i$.

[2] Un ensemble est appelé *ensemble de Borel* ou *borélien* s'il peut s'obtenir comme le résultat d'un nombre d'opérations au plus dénombrable d'union et intersection d'ensembles fermés ou ouverts. (N.d.T.)

I.7.6. Soit f une fonction définie sur l'union des ensembles ouverts $\mathbf{G}_t$, $t \in \mathbf{T}$. Prouver que si la restriction $f_{|\mathbf{G}_t}$ est continue pour tout $t \in \mathbf{T}$, f est alors continue sur $\bigcup\limits_{t\in\mathbf{T}} \mathbf{G}_t$.

I.7.7. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ et $(\mathbf{Y}, d_2)$ des espaces métriques. Prouver que $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est continue si et seulement si la fonction $f_{|\mathbf{A}}$ est continue pour tout compact $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$.

I.7.8. Soit f une bijection continue d'un espace métrique compact $\mathbf{X}$ dans un espace métrique $\mathbf{Y}$. Prouver que la fonction réciproque f^{-1} est continue sur $\mathbf{Y}$. Prouver aussi qu'on ne peut pas omettre la compacité des hypothèses.

I.7.9. Soit f une application continue d'un espace métrique compact $\mathbf{X}$ dans un espace métrique $\mathbf{Y}$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{X}$.

I.7.10. Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique et $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbf{X}$. Prouver que la fonction $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathbf{A}\}$$

est uniformément continue sur $\mathbf{X}$.

I.7.11. Soit f une application continue d'un espace métrique connexe $\mathbf{X}$ dans un espace métrique $\mathbf{Y}$. Prouver que $f(\mathbf{X})$ est connexe dans $\mathbf{Y}$.

I.7.12. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $\varnothing \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Pour $x \in \overline{\mathbf{A}}$, on pose

$$o_f(x, \delta) = \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x, \delta))).$$

L'*oscillation de f en x* est définie par

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} o_f(x, \delta).$$

Prouver que f est continue en $x_0 \in \mathbf{A}$ si et seulement si $o_f(x_0) = 0$ (comparer avec **I.4.19** et **I.4.20**).

I.7.13. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $\varnothing \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Pour $x \in \overline{\mathbf{A}}$, on note $o_f(x)$ l'oscillation de f en x définie au problème précédent. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\left\{x \in \overline{\mathbf{A}} : o_f(x) \geqslant \varepsilon\right\}$ est fermé dans $\mathbf{X}$.

I.7.14. Montrer que l'ensemble des points de continuité de $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts, autrement dit, un ensemble de type $\mathcal{G}_\delta$ de $(\mathbf{X}, d_1)$. Montrer aussi que l'ensemble des points de discontinuité de $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une union dénombrable d'ensembles fermés, autrement dit, un ensemble de type $\mathcal{F}_\sigma$ de $(\mathbf{X}, d_1)$.

I.7.15. Donner un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

I.7.16. Prouver que tout sous-ensemble de type $\mathcal{F}_\sigma$ de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

I.7.17. Soit $\mathbf{A}$ un sous-ensemble de type $\mathcal{F}_\sigma$ d'un espace métrique $\mathbf{X}$. Existe-t-il nécessairement une fonction $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbf{A}$?

I.7.18. Soit $\chi_{\mathbf{A}}$ la fonction caractéristique de $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Montrer que

$$\{x \in \mathbf{X} : o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x) > 0\} = \partial \mathbf{A},$$

$o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x)$ étant l'oscillation de $\chi_{\mathbf{A}}$ en x définie en **I.7.12**. En conclure que $\chi_{\mathbf{A}}$ est continue sur $\mathbf{X}$ si et seulement si $\mathbf{A}$ est à la fois ouvert et fermé.

I.7.19. Soit g_1 et g_2 des fonctions continues d'un espace métrique $(\mathbf{X}, d_1)$ dans un espace métrique $(\mathbf{Y}, d_2)$ et $\mathbf{A}$ un ensemble d'intérieur vide, dense dans $\mathbf{X}$. Prouver que si

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{pour } x \in \mathbf{A}, \\ g_2(x) & \text{pour } x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}, \end{cases}$$

alors

$$o_f(x) = d_2(g_1(x), g_2(x)), \quad x \in \mathbf{X},$$

où $o_f(x)$ est l'oscillation de f en x définie en **I.7.12**.

I.7.20. On dit qu'une fonction à valeurs réelles f définie sur un espace métrique $\mathbf{X}$ appartient à la *première classe de Baire* si f est la limite simple d'une suite de fonctions continues sur $\mathbf{X}$. Prouver que si f appartient à la première classe de Baire, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est un *ensemble de première catégorie*, c'est-à-dire une union dénombrable d'ensembles nulle part denses[3].

[3] Un sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ est *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence dans $\mathbf{X}$ est vide. (N.d.T.)

I.7.21. Prouver que si $\mathbf{X}$ est un espace métrique complet et si f appartient à la première classe de Baire de $\mathbf{X}$, alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans $\mathbf{X}$.

I.7.22. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout x strictement positif, la suite $\left\{f\left(\frac{x}{n}\right)\right\}$ converge vers 0. A-t-on $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$? (Comparer avec **I.1.33**.)

I.7.23. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions à valeurs réelles continues sur un espace métrique complet $\mathbf{X}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{X}$, il existe M_x vérifiant

$$|f(x)| \leqslant M_x \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Prouver qu'il existe une constante strictement positive M et un ensemble ouvert non vide $\mathbf{G} \subset \mathbf{X}$ tels que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ et tout } x \in \mathbf{G}.$$

I.7.24. Soit $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2 \supset \mathbf{F}_3 \supset \ldots$ une collection d'ensembles fermés, emboîtés et non vides dans un espace métrique complet $\mathbf{X}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{diam} \mathbf{F}_n = 0$. Prouver que si f est continue sur $\mathbf{X}$, alors

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(\mathbf{F}_n).$$

I.7.25. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ un espace métrique et p un point de $\mathbf{X}$. Pour $u \in \mathbf{X}$, on définit la fonction f_u par $f_u(x) = d_1(u, x) - d_1(p, x)$, pour $x \in \mathbf{X}$. Prouver que $u \mapsto f_u$ est une application conservant les distances, autrement dit, une isométrie de $(\mathbf{X}, d_1)$ dans l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{X}$ à valeurs réelles muni de la distance $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbf{X}\}$.

I.7.26. Prouver qu'un espace métrique $\mathbf{X}$ est compact si et seulement si toute fonction continue $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

I.7.27. Soit $(\mathbf{X}, d_1)$ un espace métrique. On définit $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{X} \setminus \{x\})$ pour $x \in \mathbf{X}$. Prouver que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Toute fonction continue $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.

(b) Toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{X}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x_n) = 0$$

contient une sous-suite convergente.

I.7.28. Prouver qu'un espace métrique $\mathbf{X}$ est compact si et seulement si toute fonction à valeurs réelles continue sur $\mathbf{X}$ est uniformément continue et si l'ensemble $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$, où ρ est définie en **I.7.27**, est fini pour tout $\varepsilon > 0$.

I.7.29. Donner un exemple d'espace métrique $\mathbf{X}$ non compact tel que toute fonction continue $f \colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbf{X}$.

Solutions

I.1. Limite d'une fonction

I.1.1.

(a) Puisque $\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$, la limite est égale à 0.

(b) Pour $x > 0$, $1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$ et pour $x < 0$, $1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x$. Donc, $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

(c) Comme en (b), on peut prouver que la limite est égale à $\frac{b}{a}$.

(d) La limite n'existe pas car les limites à gauche et à droite sont différentes.

(e) La limite est égale à $\frac{1}{2}$ (comparez avec la solution de **III.2.1(a) (vol. I)**).

(f) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + \cos x)\right)}{\sin(\sin x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\pi \cos^2 \frac{x}{2}\right)}{\sin(\sin x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\pi \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\sin(\sin x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \pi \frac{\sin \frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} \times \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

I.1.2.

(a) On suppose que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tel que

$$|f(y) - l| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |y| < \delta. \tag{1}$$

On note aussi que $0 < |y| = |\sin x| < |x| < \delta$ si $0 < |x| < \delta$. Donc d'après (1), $|f(\sin x) - l| < \varepsilon$, ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = l$.

On suppose maintenant que $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = l$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tel que

$$|f(\sin x) - l| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x| < \delta. \tag{2}$$

Si maintenant $0 < |y| < \sin\delta$, alors $0 < |x| = |\operatorname{Arcsin} y| < \delta$ et, d'après (2), on a $|f(y) - l| = |f(\sin x) - l| < \varepsilon$. Ceci signifie que $\lim_{x\to 0} f(x) = l$.

(b) L'implication se déduit immédiatement de la définition de la limite. Pour prouver que l'autre implication est fausse, on remarque par exemple que $\lim_{x\to 0} [|x|] = 0$ mais $\lim_{x\to 0} [x] = 0$ n'existe pas.

I.1.3. Clairement, $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geqslant 2$. Donc, par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \leqslant f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < |x| < \delta.$$

Cette condition peut s'écrire de façon équivalente

$$0 \leqslant (f(x) - 1) + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) < \varepsilon \tag{1}$$

ou

$$0 \leqslant (f(x) - 1)\left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon. \tag{2}$$

En élevant au carré chacun des membres de (1) et (2), on obtient

$$(f(x) - 1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right)^2 \leqslant \varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

En conséquence, $(f(x) - 1)^2 \leqslant \varepsilon^2 + 2\varepsilon$.

I.1.4. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est égale à l. D'après les hypothèses, on a $l + \frac{1}{|l|} = 0$ ce qui implique $l = -1$. On montre alors que $\lim_{x\to a} f(x) = -1$. Pour cela, on observe qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < 0$ pour $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$. En effet, si dans tout voisinage épointé de a existe un x_0 tel que $f(x_0) > 0$, on a alors $f(x_0) + \frac{1}{f(x_0)} \geqslant 2$, en contradiction avec les hypothèses. Puisque $f(x) < 0$, on a l'inégalité suivante :

$$|f(x) + 1| \leqslant \left|f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\right|.$$

I.1.5. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [0,1]$. Puisque $f(ax) = bf(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{a}\right]$, $f\left(a^2x\right) = b^2 f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{a^2}\right]$. On peut montrer par récurrence que

$$f\left(a^n x\right) = b^n f(x) \quad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc,

$$|f(x)| \leqslant M\frac{1}{b^n} \quad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{$*$}$$

D'autre part, l'égalité $f(ax) = bf(x)$ implique $f(0) = 0$, ce qui, combiné à $(*)$, donne le résultat cherché.

I.1.6.

(a) On a

$$x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right) = x^2\frac{1+\left[\frac{1}{|x|}\right]}{2}\left[\frac{1}{|x|}\right].$$

La définition de la fonction partie entière implique

$$\frac{1}{2}(1-|x|) < x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right) \leqslant \frac{1}{2}(1+|x|)$$

si $0 < |x| < 1$. La limite cherchée est donc égale à $\frac{1}{2}$.

(b) Comme en (a), on peut montrer que la limite est égale à $\frac{k(k+1)}{2}$.

I.1.7. Puisque P est un polynôme à coefficients strictement positifs, on obtient, pour $x > 1$,

$$\frac{P(x)-1}{P(x)} \leqslant \frac{[P(x)]}{P([x])} \leqslant \frac{P(x)}{P(x-1)}.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[P(x)]}{P([x])} = 1$.

I.1.8. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si maintenant $f(x) \geqslant \varphi(x)$, alors

$$\varphi(x) \leqslant f(x) = (f(x)+f(2x)) - f(2x) \leqslant (f(x)+f(2x)) - \varphi(2x),$$

ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

I.1.9.

(a) Considérez par exemple $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } x = \frac{1}{2^{2^n}},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Si $f(x) \geqslant |x|^\alpha$ et $f(x)f(2x) \leqslant |x|$, alors

$$|x|^\alpha \leqslant f(x) \leqslant \frac{|x|}{f(2x)} \leqslant \frac{|x|}{|2x|^\alpha}\,.$$

Puisque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on voit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

I.1.10. On a $\frac{g(a)}{a^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{a^\alpha x^\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = g(1)$.

I.1.11. On déduit de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)} \frac{f\left(2^{n-1}x\right)}{f(2^{n-2}x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Supposons que f soit croissante et $c \geqslant 1$. Clairement, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \leqslant c < 2^{n+1}$. La monotonie de f implique donc $f(2^n x) \leqslant f(cx) \leqslant f\left(2^{n+1}x\right)$, ce qui donne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1 \quad \text{pour} \quad c \geqslant 1.$$

De ce qui précède, si $0 < c < 1$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{f\left(\frac{t}{c}\right)} = 1.$$

I.1.12.

(a) On remarque d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$. En effet, étant donné $M > 0$, $a^x > M$ si et seulement si $x > \frac{\ln M}{\ln a}$. Pour voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty$, on écrit $\frac{a^n}{n+1} = \frac{(1+(a-1))^n}{n+1}$ et on observe que, d'après la formule du binôme, on a $(1+(a-1))^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$. Donc, étant donné N, il existe n_0 tel que $\frac{a^n}{n+1} > N$ pour $n > n_0$. Pour $x > n_0 + 1$, on pose $n = [x]$. On a alors $\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > N$, ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.

(b) Clairement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha \leqslant 0$. Dans le cas où $\alpha > 0$, on a

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha,$$

où $b = a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$. D'après (a), $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty$. Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = +\infty$$

pour tout $\alpha > 0$.

I.1.13. Le problème précédent implique $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\alpha y}{e^{\alpha y}} = 0$. La substitution $y = \ln x$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

I.1.14. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. On suppose d'abord que $a > 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n > n_0$ implique

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| < \frac{1}{n}.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ pour $a > 1$. Si $0 < a < 1$, on déduit de ce qui précède que

$$\lim_{x\to 0} a^x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1/a)^x} = 1.$$

Le cas $a = 1$ est évident. Pour prouver la continuité de la fonction $x \mapsto a^x$, on choisit arbitrairement $x_0 \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{y\to 0} a^y = a^{x_0}.$$

I.1.15.

(a) Puisque (voir, par exemple, **II.1.38 (vol. I)**) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $x > n_0 + 1$ et si $n = [x]$, alors

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon.$$

(b) On a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

L'égalité demandée se déduit donc de (a).

(c) En utilisant (a) et (b), on obtient $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$ et $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$.

I.1.16. On sait que (voir, par exemple, **II.1.38 (vol. I)**) $0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0-1} < \varepsilon$. Donc, si $|x| < \frac{1}{n_0}$, alors

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n_0-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln(1+x) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

D'où, $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x) = 0$. Pour prouver la continuité de la fonction logarithme, on prend $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\lim_{x\to x_0}\ln x = \lim_{x\to x_0}\left(\ln x_0 + \ln\frac{x}{x_0}\right) = \ln x_0 + \lim_{y\to1}\ln y$$
$$= \ln x_0 + \lim_{t\to0}\ln(1+t) = \ln x_0.$$

I.1.17.

(a) D'après le résultat de **I.1.15(c)** et la continuité de la fonction logarithme (voir **I.1.16**), on a

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

(b) On note d'abord que la continuité de la fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) se déduit de celle de la fonction logarithme naturel et de l'égalité $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Donc, d'après (a),

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

On pose $y = a^x - 1$. On a alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

(c) On pose $y = (1+x)^\alpha - 1$. Clairement, x tend vers 0 si et seulement si y tend aussi vers 0. De plus,

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+y)}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x}.$$

Ceci et (a) donnent $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

I.1.18.

(a) On pose $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$. On a alors $\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \times \frac{\ln x}{x}$. Donc, d'après **I.1.13** et avec la continuité de la fonction exponentielle, on obtient $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(b) On pose $y = x^{\sin x}$. On a $\ln y = \frac{\sin x}{x} x \ln x$. D'après **I.1.13**,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{t\to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0.$$

De nouveau, avec la continuité de la fonction exponentielle, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 1$.

(c) On voit, en posant $y = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, que

$$\ln y = \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}.$$

On a alors, d'après **I.1.17(a)**, $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Pour x suffisamment grand, on a

$$\frac{e}{2^{\frac{1}{x}}} \leqslant (e^x - 1)^{\frac{1}{x}} \leqslant e.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ (voir **I.1.14**), la limite cherchée est égale à e.

(e) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^a$, où

$$a = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x} + \ln x}{\ln x} = 1,$$

la dernière égalité se déduisant de la continuité de la fonction logarithme (voir **I.1.16**).

I.1.19.

(a) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{Arctan} 3x + 3x^2}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x + 2\operatorname{Arctan} 3x + 3x^2}{x}}{\frac{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)}{x} + e^x} = 2$$

car, d'après **I.1.17(a)**, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)}{x} = 3$.

(b) D'après **I.1.17(a)**, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ln\cos x}{-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-x^2} = 1.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\tan x^2} = -\frac{1}{2}$.

(c) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} = 1.$$

(d) On a $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\cot x} = e^a$, où

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

car, d'après **I.1.17(a)**, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 1$.

I.1.20.

(a) On observe d'abord que

$$\frac{2\ln\tan\frac{\pi x}{2x+1}}{x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}} - 1\right)}{x}. \qquad (1)$$

D'après **I.1.16** et **I.1.18(d)**,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \ln (x-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{y\to+\infty} \ln (e^y - 1)^{\frac{1}{y}} = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}} - 1\right)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\ln\cos\frac{\pi x}{2x+1}}{x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Puis, d'après **I.1.18(e)**,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2\ln\cos\frac{\pi x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\ln\sin\frac{\pi}{2(2x+1)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\frac{2(2x+1)}{\pi}}{x}.$$

La dernière limite est égale à 0 (voir **I.1.13**). Ceci, combiné à (1) et (2), implique que la limite cherchée est égale à 1.

(b) On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{2}y} = 2, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence de **I.1.17(a)**.

I.1.21. On pose $b(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (\alpha g(x)\ln x + g(x)\ln b(x)) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \alpha g(x)\ln x = \gamma. \end{aligned}$$

I.1.22. D'après **I.1.17(a)**, on a

$$\lim_{x\to 0} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)\frac{\ln(f(x)-1+1)}{f(x)-1}(f(x)-1) = \gamma.$$

I.1.23.

(a) On applique le résultat de **I.1.21** en prenant

$$g(x) = x, \quad \alpha = 1/2 \quad \text{et} \quad f(x) = 2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$$

et on utilise l'égalité $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\sqrt{x} = 0$ (voir **I.1.13**). La limite cherchée est égale à 1.

(b) On pose

$$f(x) = 1 + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

et on remarque que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)(f(x)-1) = 0$. Donc, d'après **I.1.22**, la limite cherchée est égale à 1.

(c) Comme en (b), on peut montrer que la limite cherchée est égale à $e^{\frac{\pi}{2}}$.

I.1.24. Non. Pour $\alpha > 0$ et irrationnel, on considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n\alpha,\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction vérifie les hypothèses. En effet, si $a \geqslant 0$ et $a + k = n\alpha$ pour certains k et $n \in \mathbb{N}^*$, il n'existe alors pas d'autres $k', n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a + k' = n'\alpha$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $k - k' = (n - n')\alpha$, contradiction. Clairement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.

I.1.25. Non. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n\sqrt[n]{2},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas bien que la fonction vérifie les hypothèses du problème. En fait, si $a > 0$ et si on a $ak = n\sqrt[n]{2}$, pour certains k et $n \in \mathbb{N}^*$, alors ces k et n sont uniques. S'il existe k', n' tels que $ak' = n'\sqrt[n']{2}$, on a alors

$$\frac{k}{k'} = \frac{n}{n'} 2^{\frac{n'-n}{nn'}},$$

contradiction.

I.1.26. Non. On considère la fonction définie au problème précédent. Pour voir qu'elle vérifie les hypothèses du problème, on suppose que a et b sont strictement positifs et qu'il existe $n, m, k, l \in \mathbb{N}^*$, $n \neq k$, $m \neq l$, tels que $a + bn = m\sqrt[m]{2}$ et $a + bk = l\sqrt[l]{2}$. On a alors

$$a = \frac{nl\sqrt[l]{2} - km\sqrt[m]{2}}{n-k}, \quad b = \frac{m\sqrt[m]{2} - l\sqrt[l]{2}}{n-k}. \qquad (*)$$

S'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \neq n$, $p \neq k$, $q \neq m$, $q \neq l$ et $a + bp = q\sqrt[q]{2}$, les relations $(*)$ impliquent

$$m(p-k)\sqrt[m]{2} + l(n-p)\sqrt[l]{2} = q(n-k)\sqrt[q]{2},$$

contradiction.

I.1.27. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{|x|} < \varepsilon \quad \text{pour } 0 < |x| < \delta.$$

Donc, pour $0 < |x| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{x}\right| \\
&\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\frac{1}{2^{k-1}}\left|f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|}{\frac{1}{2^{k-1}}|x|} \\
&\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^{k-1}}\varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

I.1.28. On pose $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = l$,

$$M_n = \sup_{x\in[n,n+1[} f(x) \quad \text{et} \quad m_n = \inf_{x\in[n,n+1[} f(x).$$

Les suites $\{M_n\}$ et $\{m_n\}$ sont bien définies pour $n \geqslant [a] + 1$. Par définition des bornes supérieures et inférieures, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \in [n\,, n+1[$ et $f(x_n) > M_n - \varepsilon$. On a

$$f(x_n + 1) - f(x_n) - \varepsilon < M_{n+1} - M_n < f(x_{n+1}) - f(x_{n+1} - 1) + \varepsilon$$

et

$$l - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}(M_{n+1} - M_n) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}(M_{n+1} - M_n) \leqslant l + \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(M_{n+1}-M_n)=l$ car on peut choisir arbitrairement $\varepsilon>0$. On prouve de la même façon que $\lim\limits_{n\to+\infty}(m_{n+1}-m_n)=l$. Le théorème de Stolz (voir, par exemple, **II.3.11 (vol. I)**) implique alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{m_n}{n+1}=l.$$

Donc, étant donné $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que pour $n>n_0$, on a

$$-\varepsilon<\frac{m_n}{n+1}-l<\varepsilon \quad\text{et}\quad -\varepsilon<\frac{M_n}{n}-l<\varepsilon. \tag{$*$}$$

Il s'ensuit que $f(x)>0$ pour x suffisamment grand si $l>0$. Donc, si $n_x=[x]$, alors

$$\frac{m_{n_x}}{n_x+1}\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{M_{n_x}}{n_x}.$$

On voit alors avec $(*)$ que pour $x>n_0+1$,

$$-\varepsilon<\frac{m_{n_x}}{n_x+1}-l\leqslant\frac{f(x)}{x}-l\leqslant\frac{M_{n_x}}{n_x}-l<\varepsilon.$$

Pour $l<0$, on peut montrer que

$$\frac{m_{n_x}}{n_x}\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{M_{n_x}}{n_x+1}$$

et procéder de même. De cette façon, la proposition est démontrée pour $l\neq0$. Pour prouver que la proposition est aussi vérifiée pour $l=0$, on pose $M_n=\sup\limits_{x\in[n,n+1[}|f(x)|$. Comme ci-dessus, on peut trouver une suite $\{x_n\}$ telle que

$$|f(x_n+1)|-|f(x_n)|-\varepsilon<M_{n+1}-M_n<|f(x_{n+1})|-|f(x_{n+1}-1)|+\varepsilon$$

et prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_n}{n}=0$. Puisque $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{M_n}{n}$ pour $x\in[n,n+1[$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

I.1.29. Pour $n\geqslant[a]+1$, on pose $m_n=\inf\limits_{x\in[n,n+1[}f(x)$. Par définition de la borne inférieure, étant donné $\varepsilon>0$, il existe une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n\in[n\,,n+1[$ et $m_n\leqslant f(x_n)<m_n+\varepsilon$. On a alors

$$f(x_{n+1})-f(x_{n+1}-1)<m_{n+1}-m_n+\varepsilon.$$

Ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty}(m_{n+1}-m_n)=+\infty$. D'après le théorème de Stolz (voir, par exemple, **II.3.11 (vol. I)**), $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{m_n}{n}=+\infty$. Si $x\in[n\,,n+1[$, alors $\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{m_n}{n+1}$, ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

I.1.30. En utilisant la notation introduite dans la solution du **problème I.1.28**, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{n+1}-M_n}{n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}-m_n}{n^k} = l.$$

Le théorème de Stolz (voir, par exemple, **II.3.11 (vol. I)**) donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{n\to+\infty} \frac{M_{n+1}-M_n}{n^k}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}-m_n}{n^k}.$$

Il suffit d'appliquer le même raisonnement que dans la solution des deux problèmes précédents pour prouver la proposition.

I.1.31. On pose $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l$ et on note que la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ vérifie les hypothèses du **problème I.1.28**. On obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \ln l$. D'où

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\ln l} = l.$$

I.1.32. Non. Considérez la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.1.33. Non. On considère la fonction définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n\sqrt[n]{2}},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on procède comme dans la solution du **problème I.1.25**.

I.1.34. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe δ $(0 < \delta < 1)$ tel que

$$\left| f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) \right) \right| < \varepsilon$$

si $0 < |x| < \delta$. On prend alors $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{n} < \delta$. Pour $0 < s < \frac{1}{n+1}$, on pose $x = \frac{1-s}{n}$. On a

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n+1}}{n} < \frac{1-s}{n} = x < \frac{1}{n}.$$

Donc, $n < \frac{1}{x} < n+1$ et $\left[\frac{1}{x}\right] = n$. En conséquence,

$$x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = x\left(\frac{1}{x} - n\right) = 1 - \frac{1-s}{n}n = s.$$

Finalement, si $0 < s < \frac{1}{n+1}$, alors $|f(s)| = \left|f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)\right| < \varepsilon$. On peut procéder de la même façon pour $s < 0$.

I.1.35.

(a) On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$. Si $\{x_n\}$ est une suite décroissante convergente vers x_0, alors $\{f(x_n)\}$ est aussi décroissante et minorée par $f(x_0)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f(x_n)$ (voir, par exemple, **II.1.1 (vol. I)**). Clairement,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} f(x_n) \geqslant \inf_{x>x_0} f(x).$$

De plus, étant donné $x > x_0$, il existe n tel que $x_n < x$, d'où $f(x_n) \leqslant f(x)$. Donc,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} f(x_n) \leqslant \inf_{x>x_0} f(x).$$

On a prouvé de cette façon que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{x>x_0} f(x)$$

si $\{x_n\}$ décroît vers x_0. On suppose maintenant que $\{x_n\}$ est une suite convergente vers x_0 telle que $x_n > x_0$. La suite x_n contient alors (voir, par exemple, **II.4.29 (vol. I)**) une sous-suite décroissante x_{n_k} et, de ce qui précède,

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

Si la suite $\{x_n\}$ contient une sous-suite $\{z_{n_k}\}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} f(z_{n_k}) \neq \inf_{x>x_0} f(x),$$

on peut alors aussi en extraire une sous-suite monotone ne convergeant pas vers $\inf\limits_{x>x_0} f(x)$, contradiction. Ceci implique

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

On remarquera ici qu'il suffit de considérer des suites monotones pour déterminer une limite à gauche ou à droite.

Le même raisonnement s'applique aux autres égalités de (a) et (b).

(c) On suppose que f est croissante. Puisque $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour $x \geqslant x_0$, $f(x_0^+) = \inf_{x>x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$. De même, on peut prouver que $f(x_0^-) = \sup_{x<x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$.

I.1.36.

(a) La solution du problème précédent implique

$$f(t) \leqslant f(x^-) \leqslant f(x) \qquad \text{pour } a < x_0 < t < x.$$

Si x tend vers x_0^+, alors t tend vers x_0^+, d'où

$$f(x_0^+) = \lim_{t \to x_0^+} f(t) \leqslant \underline{\lim}_{x \to x_0^+} f(x^-)$$

et

$$\overline{\lim}_{x \to x_0^+} f(x^-) \leqslant f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

En conséquence, $\lim_{x \to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+)$.

(b) Ceci s'obtient par le même raisonnement qu'en (a).

I.1.37. La nécessité de la condition se déduit immédiatement de la définition de la limite. En effet, si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x - a| < \delta$. Donc,

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |f(x) - l| + \left|f(x') - l\right| < \varepsilon.$$

On prouve maintenant que la condition est suffisante. Supposons qu'elle est vérifiée et que f n'admet pas de limite en a. On considère une suite $\{x_n\}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ et $\{f(x_n)\}$ ne converge pas. La suite $\{f(x_n)\}$ n'est donc pas une suite de Cauchy. D'autre part, puisque $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, il existe n_0 tel que $0 < |x_n - a| < \delta$ et $0 < |x_k - a| < \delta$ si $n, k \geqslant n_0$. Les hypothèses impliquent $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$, contradiction.

De la même façon, on peut prouver que, pour que la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $x, x' > M$ implique $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

I.1.38. Soit $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, une suite convergente vers a. La définition de la limite d'une fonction en a implique $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. On pose $y_n = f(x_n)$. Puisque $f(x) \neq A$ dans un voisinage épointé de a, $f(x_n) \neq A$ pour n suffisamment grand. Donc, $\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = B$ ou, de façon équivalente, $\lim_{n\to+\infty} g(f(x_n)) = B$. Ceci signifie que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = B$.

I.1.39. Considérez les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \sin x & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0, \\ \frac{\sin y}{y} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ou } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, mais $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ n'existe pas.

I.1.40. La périodicité de $x \mapsto f(x) - x$ implique $f(x+1) = f(x) + 1$. Donc, pour tout entier n, $f(x+n) = f(x) + n$, $x \in \mathbb{R}$. Puisque l'on peut écrire tout réel x comme la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire ($x = [x] + r$, où $0 \leqslant r < 1$), on a

$$f(x) = f(r) + [x]\,. \tag{$*$}$$

La monotonie de f donne

$$f(0) \leqslant f(r) \leqslant f(1) = f(0) + 1 \quad \text{pour } 0 \leqslant r < 1.$$

On montre par récurrence que

$$f^n(0) \leqslant f^n(r) \leqslant f^n(0) + 1 \quad \text{pour } 0 \leqslant r < 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc,

$$\frac{f^n(0)}{n} \leqslant \frac{f^n(r)}{n} \leqslant \frac{f^n(0)}{n} + \frac{1}{n}\,.$$

Ces inégalités prouvent la proposition dans le cas où $0 \leqslant x < 1$. De plus, d'après ($*$), $f^n(x) = f^n(r) + [x]$, ce qui implique que la proposition est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.1.41. [6, page 47]. On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} x+f(0)-1 \leqslant [x]+f(0) = f([x]) \leqslant f(x) \\ \leqslant f(1+[x]) = f(0)+[x]+1 \\ \leqslant x+f(0)+1. \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que

$$x+n(f(0)-1) \leqslant f^n(x) \leqslant x+n(f(0)+1) \tag{1}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n et on suppose que (1) est vérifiée. On a alors, comme dans la solution de **I.1.40**,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) = f([f^n(x)]+r) \\ &= [f^n(x)]+f(r) \leqslant f^n(x)+f(1) \\ &\leqslant x+n(f(0)+1)+f(0)+1 \\ &= x+(n+1)(f(0)+1), \end{aligned}$$

où $r = f^n(x)-[f^n(x)]$. Ceci prouve la seconde inégalité dans (1). On prouve la première inégalité de la même façon. De nouveau par récurrence, on montre que

$$f^{n(m_p-1)}(0) \leqslant np \leqslant f^{nm_p}(0), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Pour $n=1$, les inégalités se déduisent de la définition de m_p. On suppose qu'elles sont vérifiées pour un n donné. On a alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)m_p}(0) &= f^{m_p}(f^{nm_p}(0)) \\ &\geqslant f^{m_p}(0+np) = f^{m_p}(0)+np \\ &\geqslant p+np. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)(m_p-1)}(0) &= f^{m_p-1}(f^{n(m_p-1)}(0)) \leqslant f^{m_p-1}(0+np) \\ &= np+f^{m_p-1}(0) \\ &\leqslant np+p. \end{aligned}$$

Les inégalités (2) sont donc démontrées.

On peut écrire tout $n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $n = km_p+q$ où $0 \leqslant q < m_p$. Les inégalités (1) et (2) donnent alors

$$\begin{aligned} kp+q(f(0)-1) &\leqslant f^q(kp) \leqslant f^q(f^{km_p}(0)) \\ &= f^n(0) = f^{q+k}(f^{k(m_p-1)}(0)) \\ &\leqslant f^{q+k}(kp) \leqslant kp+(q+k)(1+f(0)), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{kp}{n} + \frac{q(f(0)-1)}{n} \leqslant \frac{f^n(0)}{n} \leqslant \frac{kp}{n} + \frac{k+q}{n}(1+f(0))\,. \qquad (3)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{n} = \frac{1}{m_p}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q}{n} = 0$, l'inégalité cherchée est donc une conséquence de (3).

I.1.42. [6, page 47]. On note que d'après **I.1.40**, il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ existe. Si $f(0)=0$, la limite est alors égale à 0. On suppose maintenant que $f(0)>0$. Alors soit il existe un entier m tel que $f^m(0) > p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit il existe un entier p strictement positif tel que $f^m(0) \leqslant p$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Dans le second cas, la suite $\{f^n(0)\}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} = 0$. Dans le premier cas, $\lim\limits_{p\to+\infty} m_p = +\infty$, m_p étant défini comme en **I.1.41**. Un passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans les inégalités données en **I.1.41** montre que $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{p}{m_p}$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ existe aussi.

Dans le cas où $f(0) < 0$, on peut montrer une inégalité semblable à (2) dans la solution du problème précédent et procéder de façon analogue.

I.2. Propriétés des fonctions continues

I.2.1. La fonction est discontinue en tout point $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En effet, si $\{x_n\}$ est une suite d'irrationnels convergente vers x_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$. D'autre part, si $\{z_n\}$ est une suite de rationnels convergente vers x_0, alors par continuité de la fonction sinus, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin|z_n| = \sin|x_0| \neq 0$. On peut prouver de même que f est continue en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

I.2.2. Comme dans la solution du problème précédent, on peut prouver que f n'est continue qu'en -1 et 1.

I.2.3.

(a) On observe d'abord que si $\{x_n\}$ converge vers x avec $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$ étant premiers entre eux et $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$. Donc, si x est irrationnel et $\{x_n\}$ définie comme précédemment, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x)$. Si $\{z_n\}$ est une suite d'irrationnels convergente vers x, alors $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = 0 = f(x)$. Ceci signifie que f est continue en tout irrationnel. On peut montrer que f est continue en 0. On suppose maintenant que $x \neq 0$ et $x = \frac{p}{q}$, où p et q sont premiers entre eux. Si $\{x_n\}$ est une suite d'irrationnels convergente vers x, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x)$. La fonction f est donc discontinue en tout rationnel différent de 0.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\{z_n\}$ une suite d'irrationnels convergente vers x, $z_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |x|$. Si $\{x_n\}$ est une suite de rationnels convergente vers x, d'après la remarque au début de la solution de (a),

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n q_n}{q_n + 1} = x.$$

Ceci signifie que f est continue en tout irrationnel positif et discontinue en tout irrationnel négatif. On montre de même que f est continue en 0. On considère maintenant $x = \frac{p}{q} \neq 0$ (p et q étant premiers entre eux). Alors,

$$x_n = \frac{p}{q} \times \frac{(np+1)q+1}{(np+1)q}$$

converge vers $\frac{p}{q}$ et on note que le numérateur et le dénominateur de x_n sont premiers entre eux. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(np+1)pq+p}{(np+1)q^2+1} = \frac{p}{q} \neq \frac{p}{q+1}.$$

La fonction est donc discontinue en tout rationnel différent de 0.

I.2.4. Soit $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ et x_0 un point de $[a\,,b]$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $x \in [a\,,b]$ et $0 < |x - x_0| < \delta$. La continuité de $|f|$ se déduit alors de l'inégalité évidente $||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant |f(x) - f(x_0)|$.

La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a\,,b], \\ -1 & \text{si } x \in [a\,,b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $[a\,,b]$ bien que $|f|$ soit constante et donc continue sur $[a\,,b]$.

I.2.5. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que

$$\lim_{x\to 2n^-} f(x) = \lim_{x\to 2n^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to (2n-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (2n-1)^+} f(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci donne

$$b_n + 1 = a_n \quad \text{et} \quad a_{n-1} = b_n - 1.$$

On trouve donc, par récurrence, $a_n = 2n + a_0$ et $b_n = 2n - 1 + a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

I.2.6. Puisque la fonction est impaire, on n'étudie sa continuité que sur $\mathbb{R}_+$. Clairement, f est continue en tout point $x \neq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose maintenant que $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = n \lim_{x\to k^+} \sin \pi x = 0$$

et

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = (n-1) \lim_{x\to k^-} \sin \pi x = 0.$$

La fonction est donc continue pour tout $n = k^2$. Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré, alors

$$\lim_{x\to \sqrt{n}^+} f(x) = n \lim_{x\to \sqrt{n}^+} \sin \pi x = n \sin\left(\pi\sqrt{n}\right)$$

et

$$\lim_{x\to \sqrt{n}^-} f(x) = (n-1) \sin\left(\pi\sqrt{n}\right).$$

On conclut donc que f est discontinue en tout $x = \pm\sqrt{n}$ où $n \neq k^2$.

I.2.7. On obtient

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \\ n + (x-n)^n & \text{si } x \in [n, n+1[,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

La fonction est donc continue en tout $x \neq n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. De plus,

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^-} f(x) = n = f(n).$$

La fonction f est donc continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

On prouve maintenant que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Clairement, f est strictement croissante sur chaque intervalle $[n, n+1[$. Si $x_1 \in [n-1, n[$ et $x_2 \in [n, n+1[$, alors

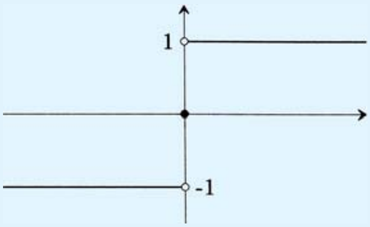
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - n)^n + 1 - (x_1 - n + 1)^{n-1} > (x_2 - n)^n \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ pour $x_2 \in [m, m+1[$ et $x_1 \in [n, n+1[$ si $m > n+1$.

I.2.8.

(a) On a

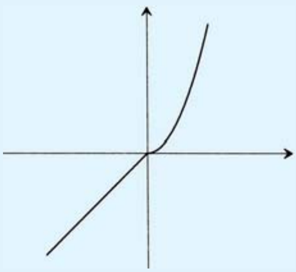
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



La fonction n'est discontinue qu'en 0.

(b) Par définition de f,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



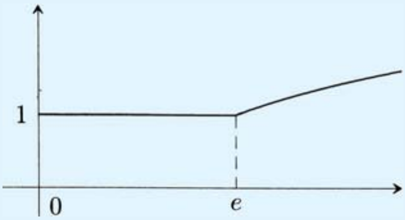
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) On obtient

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n + \ln(1 + (x/e)^n)}{n}.$$

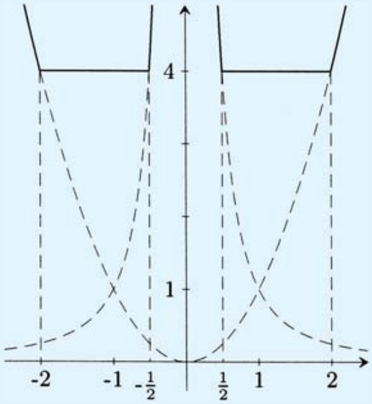
Donc,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant e, \\ \ln x & \text{si } x > e. \end{cases}$$

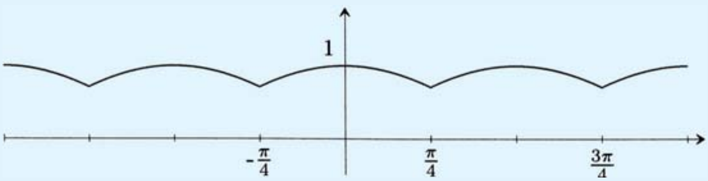


La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(d) $f(x) = \max\left\{4, x^2, \frac{1}{x^2}\right\}$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$.



(e) $f(x) = \max\{|\cos x|, |\sin x|\}$. Clairement, f est continue sur $\mathbb{R}$.



I.2.9. Soit $T > 0$ une période de f. Par continuité de f sur $[0, T]$, il existe $x_\star \in [0, T]$ et $x^\star \in [0, T]$ tels que $f(x_\star) = \inf_{x\in[0,T]} f(x)$ et $f(x^\star) = \sup_{x\in[0,T]} f(x)$. Le résultat cherché se déduit de la périodicité de f.

I.2.10. On a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ car P est un polynôme de degré pair. Donc pour tout $M > 0$, il existe $a > 0$ tel que $P(x) > M$ si $|x| > a$. Soit $x_0 \in [-a, a]$ tel que

$$P(x_0) = \inf_{x\in[-a,a]} P(x).$$

Si $P(x_0) \leqslant M$, on peut alors poser $x_\star = x_0$. Si $P(x_0) > M$, on prend $b > 0$ tel que $P(x) > P(x_0)$ dès que $|x| > b$. Par continuité de P, il existe $x_\star \in [-b\,,b]$ tel que $P(x_\star) = \inf\limits_{x\in[-b,b]} P(x)$.

Pour prouver la seconde proposition, on remarque que

$$\lim_{x\to+\infty} |P(x)| = \lim_{x\to-\infty} |P(x)| = +\infty$$

et on procède comme précédemment.

I.2.11.

(a) Considérez

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in]0\,,1[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathbf{A}_n = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$$

et $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}_{n-1}$. Clairement,

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{B}_k.$$

On définit f comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,,1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}_k, \\ \frac{1}{2^n} - 1 & \text{si } x \in \mathbf{B}_n,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour tout a et b, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = -1$ et f n'atteint pas la valeur -1 sur $[a\,,b]$.

I.2.12. On observe d'abord que

$$\omega_f(x_0, \delta_1) \leqslant \omega_f(x_0, \delta_2) \quad \text{pour} \quad 0 < \delta_1 < \delta_2. \tag{$*$}$$

On suppose que $\lim\limits_{\delta\to0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_0 > 0$ tel que $\omega_f(x_0, \delta) < \varepsilon$ si $\delta < \delta_0$. Donc, si $|x - x_0| < \delta < \delta_0$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en x_0.

On suppose maintenant que f est continue en x_0. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_0 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_0$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, d'après $(*)$, si $0 < \delta < \delta_0$, alors

$$\omega_f(x_0, \delta) \leqslant \omega_f(x_0, \delta_0) < \varepsilon$$

et $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0$.

I.2.13.

(a) Soit $x_0 \in [a\,,b]$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f et g, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{et} \quad g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$$

si $x \in [a\,,b]$ et $|x - x_0| < \delta$. Donc,

$$\begin{aligned} h(x) &< \min\{f(x_0) + \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon\} \\ &= \min\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon = h(x_0) + \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon > h(x_0) - \varepsilon \quad \text{et} \quad g(x) > g(x_0) - \varepsilon > h(x_0) - \varepsilon.$$

D'où,

$$h(x) > h(x_0) - \varepsilon. \tag{2}$$

La continuité de h en x_0 se déduit de (1) et (2). On prouve de la même façon que H est continue sur $[a\,,b]$.

(b) Comme en (a), on peut prouver que $\max\{f_1, f_2, f_3\}$ et $\min\{f_1, f_2, f_3\}$ sont continues sur $[a\,,b]$. La continuité de f se déduit de

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} \\ - \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}. \end{aligned}$$

I.2.14. Puisque f est continue, les fonctions m et M sont bien définies. Soit $x_0 \in [a\,,b]$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{|h|<\delta} |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La définition de m implique

$$m(x_0 + h) - m(x_0) = \inf_{\zeta \in [a, x_0+h]} f(\zeta) - \inf_{\zeta \in [a, x_0]} f(\zeta) \leqslant 0. \tag{$*$}$$

On remarque que l'égalité est vérifiée dans $(*)$ si la première borne inférieure est atteinte en un point de $[a, x_0]$. On suppose donc que $x_h \in [x_0\,, x_0 + h]$ et

$$m(x_0 + h) = \inf_{\zeta \in [a, x_0 + h]} f(\zeta) = f(x_h).$$

On a alors, pour $|h| < \delta$,

$$m(x_0 + h) - m(x_0) = f(x_h) - \inf_{\zeta \in [a, x_0]} f(\zeta) \geqslant f(x_h) - f(x_0) > -\varepsilon$$

car $|x_h - x_0| \leqslant |h| < \delta$. On a donc prouvé que m est continue en tout $x_0 \in [a\,, b]$. On peut appliquer le même argument pour prouver que M est continue sur $[a\,, b]$.

I.2.15. Puisque f est bornée, les fonctions m et M sont bien définies et bornées. De plus, m est décroissante sur $]a\,, b]$ et M est croissante sur $[a\,, b[$. Pour $x_0 \in\,]a\,, b[$, d'après **I.1.35**, on a

$$\lim_{x \to x_0^-} m(x) = \inf_{\zeta \in]a, x_0[} m(\zeta) \geqslant m(x_0).$$

Si $\inf\limits_{\zeta \in]a, x_0[} m(\zeta) > m(x_0)$, il existe alors $d > 0$ tel que

$$\inf_{\zeta \in]a, x_0[} m(\zeta) = m(x_0) + d.$$

Donc, pour tout $\zeta \in\,]a\,, x_0[$,

$$m(\zeta) = \inf_{a \leqslant x < \zeta} f(x) \geqslant m(x_0) + d$$

et, en conséquence, $f(x) \geqslant m(x_0) + d$ pour tout $x \in [a\,, x_0[$, contradiction. On a donc prouvé que $\lim\limits_{x \to x_0^-} m(x) = m(x_0)$. On peut prouver la continuité à gauche de M de la même manière.

I.2.16. Non. Considérez la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0\,, 1[, \\ 1 & \text{si } x \in [1\,, 2[, \\ 3 & \text{si } x \in [2\,, 3]. \end{cases}$$

La fonction $m^\star$ n'est pas continue à gauche en $x_0 = 1$ et la fonction $M^\star$ n'est pas continue à gauche en $x_1 = 2$.

I.2.17. On pose $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ pour $x > M$. Donc, si $x > M$, alors $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Évidemment, puisque f est continue, elle est bornée sur $[a\,, M]$.

I.2.18. On suppose que $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Par continuité de f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - a| < \delta. \tag{$*$}$$

La définition de la limite inférieure implique qu'il existe une suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $|x_{n_k} - a| < \delta$ à partir d'une certaine valeur k_0 de l'indice k. Avec $(*)$, on obtient alors $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \varepsilon$ pour $k > k_0$. On a donc prouvé que

$$\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right).$$

On montre maintenant sur un exemple que cette inégalité peut être stricte. On prend $f(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ et $x_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On a alors

$$-1 = \varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) < f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right) = 1.$$

De façon complètement semblable, on prouve que

$$\varlimsup_{n\to+\infty} f(x_n) \geqslant f\left(\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\right)$$

et le même exemple que précédemment montre que cette inégalité peut aussi être stricte.

I.2.19.

(a) On a prouvé dans la solution du problème précédent que les inégalités

$$\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant f\left(\varliminf_{n\to+\infty} x_n\right)$$

et

$$\varlimsup_{n\to+\infty} f(x_n) \geqslant f\left(\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\right)$$

sont vérifiées pour toute suite bornée $\{x_n\}$ et pour toute fonction continue f. On pose $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Il existe alors une suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$f(x_{n_k}) \leqslant f(a) + \varepsilon \tag{$*$}$$

(voir la solution du problème précédent). Clairement, pour tout n suffisamment grand, on a $x_n > a - \frac{\delta}{2}$. On obtient donc, par monotonie et continuité de f,

$$f(x_n) \geqslant f\left(a - \frac{\delta}{2}\right) > f(a) - \varepsilon.$$

Combiné à $(*)$, ceci donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)$.

(b) La démonstration de cette égalité se mène comme en (a).

I.2.20. Appliquez **I.2.19** à $-f$.

I.2.21. On note que g est bien définie et est croissante sur $\mathbb{R}$.

(a) D'après le **problème I.1.35**, on a

$$g(x_0^-) = \sup_{x<x_0} g(x) \leqslant g(x_0). \tag{1}$$

On suppose que $g(x_0^-) < g(x_0)$. Il existe alors $d > 0$ tel que

$$g(x_0^-) = g(x_0) - d.$$

Donc, pour tout $x < x_0$,

$$\sup\{t : f(t) < x\} \leqslant g(x_0) - d$$

ou, de façon équivalente, $t \leqslant g(x_0) - d$ si $f(t) < x$. Ceci implique $t \leqslant g(x_0) - d$ si $f(t) < x_0$, ce qui donne

$$g(x_0) = \sup\{t : f(t) < x_0\} \leqslant g(x_0) - d,$$

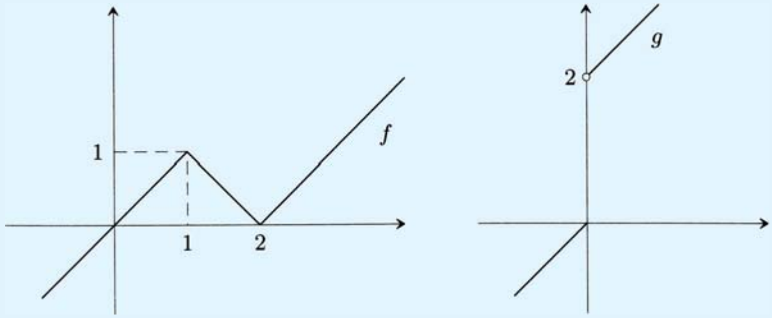
contradiction.

(b) La fonction g peut être discontinue comme le montre l'exemple suivant. Si

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x < 1, \\ -x + 2 & \text{pour } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 2 & \text{pour } x > 2, \end{cases}$$

alors

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \leqslant 0, \\ 2 + x & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$



I.2.22. On sait que l'ensemble $\left\{m + n\frac{T_1}{T_2} : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir, par exemple, **I.1.15 (vol. I)**). Donc, étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $\left\{m_k + n_k\frac{T_1}{T_2}\right\}$ convergente vers $\frac{x}{T_2}$. Par périodicité et continuité de f, on obtient

$$f(0) = \lim_{k\to+\infty} f(m_kT_2 + n_kT_1) = f(x).$$

Soit T_1 et T_2 deux nombres incommensurables. On pose

$$\mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} : x = rT_1 + sT_2,\ s, t \in \mathbb{Q}\}.$$

On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{W}. \end{cases}$$

T_1 et T_2 sont alors des périodes de f.

I.2.23.

(a) On note T_n ($n \in \mathbb{N}$) les périodes de f, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$. Par continuité de f, étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$, il existe n_0 tel que $0 < T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Au moins un des réels kT_{n_0}, $k \in \mathbb{Z}$, appartient à l'intervalle $]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[$. Donc,

$$|f(x_0) - f(0)| = |f(x_0) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon$$

et, $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ pouvant être choisis arbitrairement, il s'ensuit que f est constante, contrairement aux hypothèses.

(b) La *fonction de Dirichlet* définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est périodique. Tout rationnel est une période et cette fonction n'a donc pas de période fondamentale.

(c) On suppose que l'ensemble des périodes de f n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Il existe alors un intervalle $]a\,,b[$ ne contenant aucune période de f. Comme en (a), on peut montrer qu'il existe une période T et un entier k tels que $kT \in \,]a\,,b[$, contradiction.

I.2.24.

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point où f est continue. Puisque f n'est pas constante, il existe $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_1) \neq f(x_0)$. Si f n'admet pas de période minimale strictement positive, il existe alors une suite $\{T_n\}$, de périodes strictement positives de f convergente vers 0. On prend

$$0 < \varepsilon < |f(x_1) - f(x_0)|\,.$$

Par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{$*$}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$, il existe n_0 tel que $0 < T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Au moins un des réels kT_{n_0}, $k \in \mathbb{Z}$, appartient alors à l'intervalle $]x_0 - x_1 - \delta\,, x_0 - x_1 + \delta[$. Donc, $x_1 + kT_{n_0} \in \,]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[$ et, d'après $(*)$, on a

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_1 + kT_{n_0}) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

contradiction.

(b) Il s'agit d'une conséquence immédiate de (a).

I.2.25. Soit T_1 et T_2 des périodes strictement positives respectivement de f et g. On suppose que $f \neq g$. Il existe alors x_0 tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$ ou, dit autrement,

$$|f(x_0) - g(x_0)| = M > 0. \tag{1}$$

Pour $0 < \varepsilon < \frac{M}{2}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad |h| < \delta. \tag{2}$$

D'après l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$, il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$$

si $x\geqslant x_0+kT_2$.

En conséquence, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$,

$$|f(x_0+kmT_2)-g(x_0+kmT_2)|<\varepsilon. \tag{3}$$

D'après (2), (3) et la périodicité de f et g, on a

$$\begin{aligned}
&|f(x_0)-g(x_0)|\\
&\quad=|f(x_0)-f(x_0+kmT_2)+f(x_0+kmT_2)-g(x_0+kmT_2)|\\
&\quad\leqslant|f(x_0)-f(x_0+kmT_2)|+|f(x_0+kmT_2)-g(x_0+kmT_2)| \qquad (4)\\
&\quad=|f(x_0)-f(x_0+kmT_2-nT_1)|+|f(x_0+kmT_2)-g(x_0+kmT_2)|\\
&\quad<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon
\end{aligned}$$

dès que

$$|mkT_2-nT_1|<\delta. \tag{5}$$

Cependant, puisque $2\varepsilon<M$, (4) contredirait (1) s'il existait $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{Z}$ vérifiant (5). D'autre part, si $\frac{T_1}{T_2}$ est rationnel, (5) est évidemment vérifiée pour certains entiers m et n. Si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, alors (5) est aussi vérifiée (voir, par exemple, **I.1.14 (vol. I)**).

I.2.26.

(a) On considère $f(x)=\sin x$ et $g(x)=x-[x]$ pour $x\in\mathbb{R}$. Les fonctions f et g sont périodiques de période fondamentale respective 2π et 1. Aucune période de f n'est commensurable avec une période de g. On pose $h=f+g$. Si h est périodique de période T, on a alors

$$\sin T+T-[T]=0 \quad \text{et} \quad \sin(-T)-T-[-T]=0.$$

Donc, $(T-[T])+(-T-[-T])=0$, ce qui implique $T-[T]=0$. Ceci signifie que T est un entier, en contradiction avec $\sin T=0$.

(b) [A. D. Kudriašov, A. S. Mešeriakov, *Mathematics in School*, 6 (1969), 19-21 (russe)]. Soit α, β et γ des réels tels que l'égalité $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$, soit vérifiée si et seulement si $a=b=c=0$. De tels nombres existent. On peut prendre par exemple $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$ et $\gamma=\sqrt{3}$. On définit

$$\mathbb{W}=\{a\alpha+b\beta+c\gamma : a,b,c\in\mathbb{Q}\}.$$

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} -b - c - b^2 - c^2 & \text{si } x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{W}, \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} a + c + a^2 - c^2 & \text{si } x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{W}, \end{cases}$$

On note que tout nombre de la forme $r\alpha$, $r \in \mathbb{Q}^*$, est une période de f et tout nombre de la forme $s\beta$, $s \in \mathbb{Q}^*$, est une période de g. On prouve que ces fonctions n'ont pas d'autre période. Si T est une période de f, alors $f(\beta + T) = f(\beta)$ et, puisque $f(\beta) = -2$, on obtient $\beta + T \in \mathbb{W}$ et $T \in \mathbb{W}$. D'où, $T = r\alpha + s\beta + t\gamma$ pour certains $r, s, t \in \mathbb{Q}$. Puisque $f(T) = f(0)$, on a $-s - t - s^2 - t^2 = 0$ ou, de façon équivalente, $(s+t)(1+s-t) = 0$. On montre que $1-s+t \neq 0$. En effet, si $1-s+t = 0$, alors $T = r\alpha + s\beta + (1 + s)\gamma$. En utilisant

$$f(x + T) = f(x) \qquad (*)$$

avec $x = -\gamma$, on obtient $-s - s - s^2 + s^2 = 1 + 1$ ou $s = -1$. Donc, $T = r\alpha - \beta$. En prenant alors $x = \beta$ dans $(*)$, on a $f(r\alpha) = f(\beta)$, d'où $0 = -1 - 1$, contradiction. On a donc prouvé que $1 - s + t \neq 0$ et il s'ensuit que $s + t = 0$. En conséquence, $T = r\alpha + s\beta - s\gamma$. Notre but est maintenant de montrer que $s = 0$. On prend pour cela $x = \gamma$ dans $(*)$ pour obtenir

$$-s + s - 1 - s^2 + (s - 1)^2 = -1 + 1,$$

ce qui implique $s = 0$. De la même manière, on montre que les seules périodes de g sont celles mentionnées précédemment. Aucune période de f n'est donc commensurable avec une période de g. On remarque alors que $h = f + g$ est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} a - b + a^2 - b^2 & \text{si } x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{W}. \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut prouver que les seules périodes de h sont les nombres de la forme $t\gamma$, $t \in \mathbb{Q}^*$.

I.2.27. On suppose que $h = f + g$ est périodique de période T. Puisque $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, on voit que $\frac{T}{T_1} \notin \mathbb{Q}$ ou $\frac{T}{T_2} \notin \mathbb{Q}$. On suppose, par exemple, que $\frac{T}{T_1} \notin \mathbb{Q}$. Par périodicité de h, on obtient $f(x + T) + g(x + T) =$

$h(x+T) = h(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction H définie par $H(x) = f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x+T)$ est donc continue et périodique avec deux périodes incommensurables T_1 et T_2. D'après le résultat de **I.2.22**, H est constante. Ceci signifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+T) = f(x) + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $c \neq 0$ et on substitue $x = 0$ puis $x = T$ dans cette dernière égalité pour obtenir

$$f(2T) = f(T) + c = f(0) + 2c.$$

On peut montrer par récurrence que $f(nT) = f(0) + nc$ ce qui contredit le fait que f est bornée (voir **I.2.9**). Donc, $c = 0$ et T est une période de f. En conséquence, $T = nT_1$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, contradiction.

I.2.28. La démonstration est une modification de celle présentée dans la solution du problème précédent. On suppose que T_1 est la période fondamentale de f. Comme dans la solution du problème précédent, on peut montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x+T)$$

est identiquement nulle et T est donc une période commune à f et g, contradiction.

I.2.29. On suppose, par exemple, que f est croissante. Soit x_0 un point de discontinuité de f. D'après le résultat de **I.1.35**, $f(x_0^+) - f(x_0^-) > 0$. Ceci signifie que f a une discontinuité de première espèce en x_0. On peut associer à chacun de ces points un intervalle $\left]f(x_0^-)\,,f(x_0^+)\right[$. La monotonie de f et le résultat de **I.1.35** implique que les intervalles associés aux différents points de discontinuité de f sont disjoints. En prenant un nombre rationnel dans chacun de ces intervalles, on obtient une bijection entre l'ensemble des points de discontinuité de f et un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

I.2.30. Puisque f est uniformément continue sur $[0\,,1]$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $2n > n_0$ et pour $k = 1, 2, \ldots, 2n$, on a

$$\left| f\left(\frac{k}{2n}\right) - f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Donc, si $2n > n_0$, alors

$$|S_{2n}| = \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus,

$$|S_{2n+1}| = \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n+1}\right) \right| \leqslant \frac{n}{2n+1}\,\varepsilon + \frac{1}{2n+1}\,|f(1)|\,.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

I.2.31. Comme dans la solution du problème précédent, on note d'abord que f est uniformément continue sur $[0\,,1]$. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n > n_0$ et pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

En conséquence, pour $n > n_0$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$|S_n| < \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

I.2.32. On pose $M = \lim\limits_{r\to+\infty} \sup\limits_{x\geqslant r} f(x)$ et $m = \lim\limits_{r\to+\infty} \inf\limits_{x\geqslant r} f(x)$ et on suppose que $M > m$. Il existe alors un réel k tel que $M > k > m$ et il existe a vérifiant $f(a) > k$. Par continuité de f, il existe $b > a$ tel que $f(t) > k$ pour tout $t \in [a\,, b]$.

On prend $p = \frac{ab}{b-a}$ et on a alors $\frac{x}{a} \geqslant \frac{x}{b} + 1$ pour $x \geqslant p$. En effet,

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{x}{p} \geqslant 1.$$

Il existe donc un entier $n_0 > 0$ compris entre $\frac{x}{b}$ et $\frac{x}{a}$, c'est-à-dire tel que $\frac{x}{a} \geqslant n_0 \geqslant \frac{x}{b}$ ou, de façon équivalente, tel que $a \leqslant \frac{x}{n_0} \leqslant b$. Par hypothèse,

$$f(x) = f\left(n_0 \frac{x}{n_0}\right) \geqslant f\left(\frac{x}{n_0}\right) > k$$

pour tout $x \geqslant p$, contredisant la définition de m. En conséquence, $m = M$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ existe, finie ou infinie.

I.2.33. Soit f une fonction convexe sur $]a\,,b[$ et $a < s < u < v < t < b$. L'interprétation géométrique de la convexité indique que le point $(u, f(u))$ se trouve sous la corde passant par les points $(s, f(s))$ et $(v, f(v))$. Ceci signifie que

$$f(u) \leqslant f(s) + \frac{f(v) - f(s)}{v - s}\,(u - s)\,. \tag{1}$$

De même, le point $(v, f(v))$ se trouve sous la corde passant par les points $(u, f(u))$ et $(t, f(t))$, ce qui donne

$$f(v) \leqslant f(u) + \frac{f(t) - f(u)}{t - u}\,(v - u)\,. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) donnent

$$f(s) + \frac{f(u) - f(s)}{u - s}\,(v - s) \leqslant f(v) \leqslant f(u) + \frac{f(t) - f(u)}{t - u}\,(v - u)\,.$$

D'après le théorème des gendarmes, si $\{v_n\}$ est une suite convergente vers u par valeurs supérieures, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(u)$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to u^+} f(x) = f(u)$. De même, $\lim\limits_{x\to u^-} f(x) = f(u)$. La continuité de f en tout point de $]a\,,b[$ est donc prouvée.

L'exemple suivant montre que la proposition est fausse si l'intervalle n'est pas ouvert :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0\,,1[, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

I.2.34. La convergence uniforme de $\{f_n\}$ implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\,\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0,\ x \in \mathbf{A}.$$

On fixe $a \in \mathbf{A}$. Par continuité de f_{n_0} en a, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{1}{3}\,\varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - a| < \delta.$$

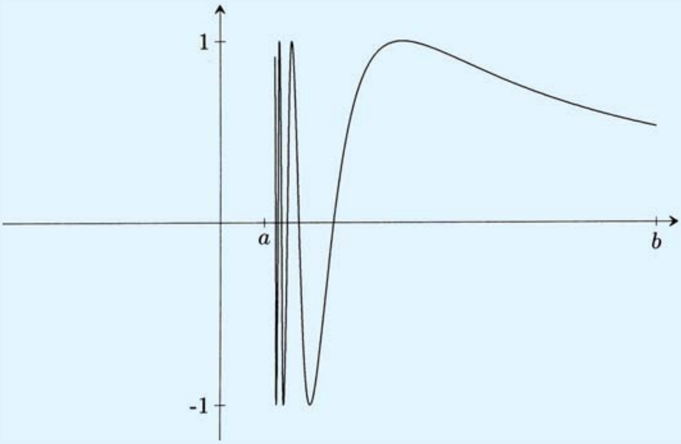
Donc,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

I.3. Propriété des valeurs intermédiaires

I.3.1. Soit f la fonction définie sur $[a\,,b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x-a} & \text{si } < a < x \leqslant b, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$



Clairement, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur $[a\,,b]$ mais est discontinue en a.

On construit maintenant une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et ayant une infinité de points de discontinuité. On note $\mathbf{C}$ l'*ensemble de Cantor*. On rappelle que l'ensemble de Cantor est défini de la façon suivante. On divise l'intervalle $[0\,,1]$ en trois parties égales, on enlève l'intervalle $\left]\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\right[$ et on note $\mathbf{E}_1$ l'union des intervalles $\left[0\,,\frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}\,,1\right]$. À la seconde étape, on enlève l'ouvert formant le second tiers de chacun des intervalles restants et on pose

$$\mathbf{E}_2 = \left[0\,,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}\,,\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}\,,\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}\,,1\right].$$

En procédant comme précédemment, on enlève à la n-ième étape l'union des ouverts formant le second tiers de chacun des 2^{n-1} intervalles restants et on note $\mathbf{E}_n$ l'union des 2^n intervalles fermés, tous de longueur 3^{-n}. On pose

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}_n.$$

On note que si $]a_i\,,b_i[$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ est la suite des intervalles enlevés, alors

$$\mathbf{C} = [0\,,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty}]a_i\,,b_i[\,.$$

On définit la fonction g en posant

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{C}, \\ \frac{2(x-a_i)}{b_i-a_i} - 1 & \text{si } x \in]a_i\,,b_i[,\ i \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

La construction de l'ensemble de Cantor implique que chaque intervalle $[a\,,b] \subset [0\,,1]$ contient un sous-intervalle ouvert disjoint de $\mathbf{C}$. En effet, si $]a\,,b[$ ne contient pas de point de $\mathbf{C}$, alors $]a\,,b[$ est un des intervalles enlevés $]a_i\,,b_i[$ ou un sous-intervalle d'un de ceux-ci. Si $x \in]a\,,b[\cap \mathbf{C}$, il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1\}$ tels que $x \in \left[\frac{k}{3^n}\,,\frac{k+1}{3^n}\right] \subset]a\,,b[$. Le second tiers ouvert de $\left[\frac{k}{3^n}\,,\frac{k+1}{3^n}\right]$, qui est en fait un des intervalles $]a_i\,,b_i[$, est un sous-intervalle ouvert ne contenant pas de point de $\mathbf{C}$.

La fonction g est discontinue en tout point $x \in \mathbf{C}$ et il découle de ce qui précède que g vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

I.3.2. Soit $x_0 \in]a\,,b[$. La monotonie de f implique

$$\sup_{a\leqslant x<x_0} f(x) = f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+) \leqslant \inf_{x_0<x\leqslant b} f(x)$$

(voir **I.1.35**). On suppose maintenant que

$$f(x_0) < f(x_0^+).$$

Il existe alors une suite strictement décroissante $\{x_n\}$, $x_n \in]x_0\,,b]$, convergente vers x_0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0^+)$. Puisque f est strictement croissante, $f(x_n) > f(x_0^+) > f(x_0)$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $x' \in]x_0\,,x_n[$ tel que $f(x') = f(x_0^+)$. On a alors

$$\inf_{x_0<x<x'} f(x) \geqslant \inf_{x_0<x\leqslant b} f(x) = f(x').$$

D'autre part, la stricte monotonie de f donne $\inf\limits_{x_0<x<x'} f(x) < f(x')$, contradiction. On a donc montré que $f(x_0) = f(x_0^+)$. Les égalités $f(x_0) = f(x_0^-)$, $f(a) = f(a^+)$ et $f(b) = f(b^-)$ se prouvent de la même façon.

I.3.3. La fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0\,,1]$, est continue, $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Puisque g vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $g(x_0) = 0$.

I.3.4. On considère la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ définie sur $[a\,,b]$ et on remarque que $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a\,,b]$ tel que $h(x_0) = 0$.

I.3.5. On définit la fonction g en posant

$$g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x).$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, $g(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{T}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{T}{2}\right)$. Il existe donc $x_0 \in \left[0\,,\frac{T}{2}\right]$ tel que $g(x_0) = 0$.

I.3.6. On pose

$$m = \min\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \quad \text{et} \quad M = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

On a alors

$$m \leqslant \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right) \leqslant M.$$

Il existe donc $x_0 \in \left]a\,,b\right[$ tel que

$$f(x_0) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right).$$

I.3.7.

(a) On pose $f(x) = (1-x)\cos x - \sin x$. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = -\sin 1 < 0$. Il existe donc $x_0 \in \left]0\,,1\right[$ tel que $f(x_0) = 0$.

(b) On sait que (voir **I.1.12**)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\,|P(x)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\,|P(x)| = +\infty.$$

Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-x_0}\,|P(x_0)| = 1$.

I.3.8. On observe que

$$\operatorname{sgn} P(-a_l) = (-1)^l \quad \text{et} \quad \operatorname{sgn} P(-b_l) = (-1)^{l+1}, \quad l = 0, 1, \ldots, n.$$

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, le polynôme P a donc une racine dans chaque intervalle $\left]-b_l\,,-a_l\right[$, $l = 0, 1, \ldots, n$.

I.3.9. Non. Considérez, par exemple, f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a} & \text{si } a < x \leqslant b, \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

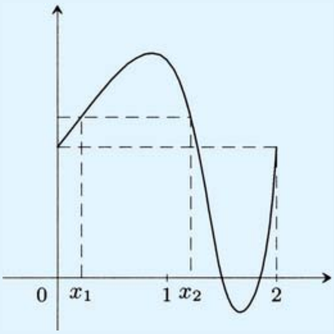
et

$$g(x) = \begin{cases} -\sin \frac{1}{x-a} & \text{si } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

I.3.10. On pose

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in [0\,,1].$$

On a alors $g(1) = f(2) - f(1) = -g(0)$. Il existe donc $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $f(x_0+1) = f(x_0)$. On peut alors prendre $x_2 = x_0 + 1$ et $x_1 = x_0$.



I.3.11. Considérez la fonction

$$g(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}(f(2) - f(0)), \quad x \in [0\,,1],$$

et appliquez un raisonnement semblable à celui utilisé dans la solution du problème précédent.

I.3.12. On définit la fonction g par

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in [0\,,n-1].$$

Si $g(0) = 0$, alors $f(1) = f(0)$. On suppose donc, par exemple, que $g(0) > 0$ et on a $f(1) > f(0)$. Si on a aussi $f(k+1) > f(k)$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on aura alors

$$f(0) < f(1) < f(2) < \ldots < f(n) = f(0),$$

contradiction. Il s'ensuit qu'il existe k_0 tel que $g(k_0) > 0$ et $g(k_0+1) \leqslant 0$. Puisque g est continue, il existe $x_0 \in \,]k_0\,,k_0+1]$ tel que $g(x_0) = 0$, d'où $f(x_0+1) = f(x_0)$. Le même raisonnement s'applique lorsque $g(0) < 0$.

I.3.13. On peut prolonger la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ de façon à obtenir une fonction périodique de période n. Son prolongement est encore noté f. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ donné, on pose

$$g(x) = f(x+k) - f(x), \quad x \geqslant 0.$$

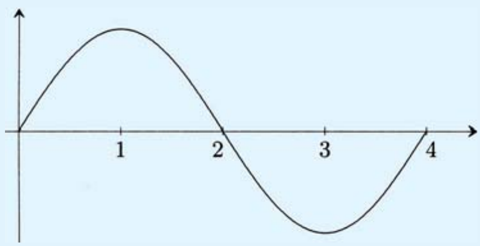
On montre qu'il existe $x_0 \in [0\,, kn]$ tel que $g(x_0) = 0$. Si $g(0) = 0$, on prend alors $x_0 = 0$. On suppose donc, par exemple, que $g(0) > 0$. Si on a aussi $g(j) > 0$ pour tout $j = 0, 1, 2, \ldots, kn - k$, on aura alors

$$f(0) < f(k) < f(2k) < \ldots < f(kn) = f(0),$$

contradiction. Il s'ensuit qu'il existe j_0 tel que $g(j_0) > 0$ et $g(j_0 + 1) \leqslant 0$. Puisque g est continue, il existe $x_0 \in \,]j_0\,, j_0 + 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, d'où $f(x_0 + k) = f(x_0)$. On suppose d'abord que $x_0 \in [(l-1)n\,, ln - k]$ pour un certain $1 \leqslant l \leqslant k$. La périodicité de f implique $f(x_0) = f(x_0 - (l-1)n)$ et $f(x_0 + k) = f(x_0 - (l-1)n + k)$. On peut donc prendre $x_k = x_0 - (l-1)n$ et $x'_k = x_0 - (l-1)n + k$. Si $x_0 \in [ln - k\,, ln]$, alors $x_0 + k \in [ln\,, (l+1)n]$ et on a $f(x_0 - (l-1)n) = f(x_0) = f(x_0 + k) = f(x_0 - ln + k)$. On peut alors prendre $x_k = x_0 - (l-1)n$ et $x'_k = x_0 - ln + k$.

On n'a pas nécessairement pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ l'existence de x_k et x'_k tels que $x_k - x'_k = k$ et $f(x_k) = f(x'_k)$. Il suffit de considérer la fonction

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{pour } x \in [0\,, 4].$$



On voit facilement que $f(x+3) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0\,, 1]$.

I.3.14. La solution suivante est due à notre étudiant Grzegorz Michalak.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $f(0) = f(n) = 0$. Le cas $n = 1$ est évident. On suppose donc que $n > 1$. On considère d'abord le cas où $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $\ldots$, $f(n-1) > 0$. Pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on pose $g_k(x) = f(x+k) - f(x)$. La fonction g_k est continue sur $[0\,, n-k]$ et, par hypothèse, $g_k(0) > 0$ et $g_k(n-k) < 0$. Il existe donc $x_k \in [0\,, n-k]$ tel que $g_k(x_k) = 0$, ou encore, $f(x_k + k) = f(x_k)$. Ceci démontre la proposition dans ce cas. De façon semblable, on peut prouver qu'elle est aussi vraie si $f(1) < 0$, $f(2) < 0, \ldots, f(n-1) < 0$.

On suppose maintenant que $f(1) > 0$ (resp. $f(1) < 0$), les réels $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$ sont distincts et différents de 0 et il existe m tel que $2 \leqslant m \leqslant n-1$, tel que $f(m) < 0$ (resp. $f(m) > 0$). Il existe alors des entiers $k_1, k_2, \dots, k_s$ compris entre 1 et $n-2$ tels que

$$\begin{aligned}
&f(1) > 0, f(2) > 0, \dots, f(k_1) > 0,\\
&f(k_1+1) < 0, f(k_1+2) < 0, \dots, f(k_2) < 0,\\
&\dots\\
&f(k_s+1) < 0, f(k_s+2) < 0, \dots, f(n-1) < 0\\
&(\text{ou } f(k_s+1) > 0, f(k_s+2) > 0, \dots, f(n-1) > 0)
\end{aligned}$$

(resp. $f(1) < 0, f(2) < 0, \dots, f(k_1) < 0, \dots$). En raisonnant alors de la même façon que dans le premier cas, on montre qu'il existe k_1 solutions dans $[0\,, k_1+1]$, $k_2 - k_1$ solutions dans $[k_1\,, k_2+1]$, etc. Clairement, dans ce cas, les solutions doivent toutes être distinctes et la proposition est prouvée.

Finalement, on considère le cas où il existe des entiers k et m tels que $0 \leqslant k < m \leqslant n$, tels que $f(k) = f(m)$. On suppose aussi que les réels $f(k), f(k+1), \dots, f(m-1)$ sont distincts. Il découle de ce qui précède qu'il y a $m-k$ solutions dans l'intervalle $[k\,, m]$. On définit alors

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant k,\\ f(x+m-k) & \text{si } k < x \leqslant n-(m-k). \end{cases}$$

Clairement, f_1 est continue sur $[0\,, n-(m-k)]$ et $f_1(n-(m-k)) = f_1(0) = 0$. Si $f_1(0), f_1(1), \dots, f_1(n-(m-k)-1)$ sont distincts, la première partie de la démonstration donne alors $n-(m-k)$ solutions qui, ajoutées aux $m-k$ solutions obtenues précédemment, donnent le résultat cherché. Si certains des réels $f_1(0), f_1(1), \dots, f_1(n-(m-k)-1)$ sont égaux, on peut répéter la procédure.

I.3.15. On suppose que l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution. La fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ est alors soit strictement positive, soit strictement négative. Donc,

$$\begin{aligned}
0 &\neq h(f(x)) + h(g(x))\\
&= f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x))\\
&= f^2(x) - g^2(x),
\end{aligned}$$

contradiction.

L'exemple suivant montre que l'hypothèse de continuité est essentielle :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \sqrt{2} & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

I.3.16. On suppose qu'il existe x_1, x_2 et x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et, par exemple, $f(x_1) > f(x_2)$ et $f(x_2) < f(x_3)$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, pour tout u tel que $f(x_2) < u < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$, il existe $s \in]x_1, x_2[$ et $t \in]x_2, x_3[$ vérifiant $f(s) = u = f(t)$. Puisque f est injective, $s = t$, en contradiction avec le fait que $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

I.3.17. Le problème précédent implique que f est soit strictement décroissante, soit strictement croissante.

(a) On suppose que f est strictement croissante et qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$. On choisit, par exemple, $f(x_0) > x_0$. On a alors $f^n(x_0) > x_0$, contrairement à l'hypothèse. Le même argument s'applique au cas où $f(x_0) < x_0$.

(b) Si f est strictement décroissante, alors f^2 est strictement croissante. Puisque $f^n(x) = x$, on obtient $f^{2n}(x) = x$, ce qui signifie que la n-ième itérée de f^2 est l'identité. Donc, d'après (a), $f^2(x) = x$.

I.3.18. On remarque que f est injective. En effet, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $-x_1 = f^2(x_1) = f^2(x_2) = -x_2$ et $x_1 = x_2$. Il découle de **I.3.16** que si f est continue, elle est soit strictement décroissante, soit strictement croissante. Dans les deux cas, f^2 est strictement croissante, contradiction.

I.3.19. Comme dans la solution du problème précédent, on peut prouver que f est injective sur $\mathbb{R}$. Une analyse semblable à celle de la solution du **problème I.3.16** montre que f est soit strictement décroissante, soit strictement croissante. Dans les deux cas, f^{2k} ($k \in \mathbb{N}^*$) est strictement croissante. L'entier n dans la condition $f^n(x) = -x$ doit donc être impair. Si f est strictement croissante, f^n l'est aussi, ce qui contredit la condition et f est donc strictement décroissante. De plus, puisque

$$f(-x) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)) = -f(x),$$

on voit que f est une fonction impaire (et donc toute itération de f l'est aussi).

On prouve maintenant que $f(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe x_0 tel que $x_1 = f(x_0) > -x_0$ ou, dit autrement, $-x_1 < x_0$. Il s'ensuit que $x_2 = f(x_1) < f(-x_0) = -f(x_0) = -x_1 < x_0$. On peut montrer par récurrence que $(-1)^n x_n < x_0$ si $x_k = f(x_{k-1})$, ce qui contredit l'hypothèse $x_n = f^n(x_0) = -x_0$. Le même raisonnement s'applique au cas $f(x_0) < -x_0$. Donc, $f(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.3.20. On suppose que f est discontinue en x. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ convergente vers x telle que $\{f(x_n)\}$ ne converge pas vers $f(x)$. Ceci signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k > k$ pour lequel

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Donc, $f(x_{n_k}) \geqslant f(x) + \varepsilon > f(x)$ ou $f(x_{n_k}) \leqslant f(x) - \varepsilon < f(x)$. Supposons, par exemple, que la première inégalité soit vérifiée. Il existe alors un rationnel q tel que $f(x) + \varepsilon > q > f(x)$, d'où $f(x_{n_k}) > q > f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe z_k entre x et x_{n_k} tel que $f(z_k) = q$, ce qui signifie que $z_k \in f^{-1}(\{q\})$. Clairement, $\lim\limits_{k \to +\infty} z_k = x$. Puisque $f^{-1}(\{q\})$ est fermé, $x \in f^{-1}(\{q\})$ et $f(x) = q$, contradiction.

I.3.21. Il suffit de considérer le cas où $T > 0$ pour démontrer ce théorème. On pose $g(x) = f(x + T) - f(x)$. Il y a alors deux possibilités.

(1) Il existe $x_0 > a$ tel que $g(x)$ est strictement positive (ou négative) pour tout $x > x_0$.

(2) Il n'existe pas de tel x_0.

Dans le cas (1), si, par exemple, g est strictement positive sur $]x_0\,, +\infty[$, la suite $\{f(x_0+nT)\}$ est alors croissante. Puisque f est bornée, la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_0 + nT) = \lim_{n \to +\infty} f(x_0 + (n+1)T).$$

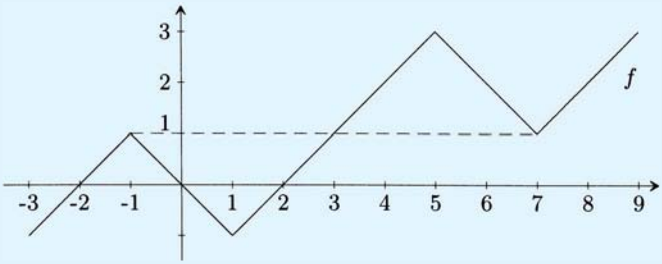
On peut donc prendre $x_n = x_0 + nT$. Dans le cas (b), d'après la propriété des valeurs intermédiaires appliquée à g, pour tout entier strictement positif $n > a$, il existe $x_n > n$ tel que $g(x_n) = 0$.

I.3.22. On pose

$$g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } -3\leqslant x\leqslant -1,\\ -x & \text{si } -1<x\leqslant 1,\\ x-2 & \text{si } 1<x\leqslant 3\end{cases}$$

et on définit f par

$$f(x)=g(x-6n)+2n \quad \text{pour} \quad 6n-3\leqslant x\leqslant 6n+3,\ n\in\mathbb{Z}.$$



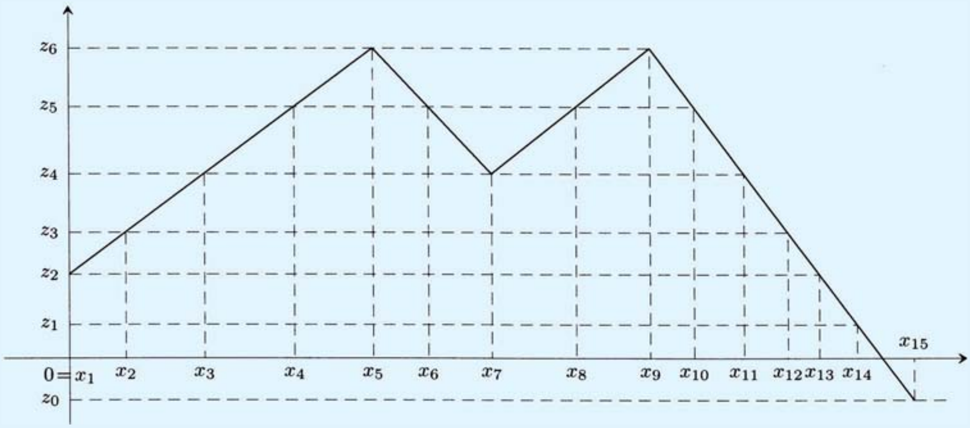
La fonction f a la propriété cherchée.

Il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui atteigne chacune de ses valeurs exactement deux fois. Supposons, au contraire, que f soit une telle fonction. Soit x_1, x_2 tels que $f(x_1)=f(x_2)=b$. Alors $f(x)\neq b$ pour $x\neq x_1,x_2$. Donc, soit $f(x)>b$ pour tout $x\in\,]x_1\,,x_2[$, soit $f(x)<b$ pour tout $x\in\,]x_1\,,x_2[$. Dans le premier cas, il existe un unique $x_0\in\,]x_1\,,x_2[$ tel que $f(x_0)=\max\{f(x):x\in[x_1\,,x_2]\}$. En effet, si f atteint son maximum sur $[x_1\,,x_2]$ en plusieurs points, f prend alors certaines valeurs plus de deux fois sur $[x_1\,,x_2]$. Il existe donc un unique point x_0' (en dehors de l'intervalle $[x_1\,,x_2]$) tel que $c=f(x_0)=f(x_0')>b$. La propriété des valeurs intermédiaires appliquée à f implique alors que toute valeur dans $]b\,,c[$ est atteinte au moins trois fois, contradiction. Le même raisonnement s'applique aussi au cas où $f(x)<b$ pour tout $x\in\,]x_1\,,x_2[$.

I.3.23. On suppose que f est strictement monotone sur chaque intervalle $[t_{i-1}\,,t_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ et que $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$. L'ensemble $\mathbf{Y}=\{f(t_i):0\leqslant i\leqslant n\}$ est formé d'au plus $n+1$ éléments $y_0,y_1,\ldots,y_m$ et on peut supposer que $y_0<y_1<\ldots<y_m$. On pose $z_{2i}=y_i$ $(0\leqslant i\leqslant m)$ et on choisit $z_1,z_3,\ldots,z_{2m-1}$ de sorte que $z_0<z_1<z_2<z_3<\ldots<z_{2m-1}<z_{2m}$. On pose

$$\mathbf{X}_k=\{x\in[0\,,1]\,:\,f(x)=z_k\}\,,$$
$$\mathbf{X}=\mathbf{X}_0\cup\mathbf{X}_1\cup\ldots\cup\mathbf{X}_{2m}=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}\,,$$

où $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 1$. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on note k_j le seul élément de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 2m\}$ pour lequel $f(x_j) = z_{k_j}$. Les entiers k_1 et k_N sont alors pairs et $k_j - k_{j+1} = \pm 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant N$. Il s'ensuit que le nombre N d'éléments de l'ensemble $\mathbf{X}$ est impair. En conséquence, un des ensembles $\mathbf{X}_k = f^{-1}(z_k)$ a un nombre impair d'éléments.



I.3.24. On prouve d'abord que l'ensemble des extrema locaux propres de f est au plus dénombrable. En effet, si $x_0 \in \,]0\,,1[$ et $f(x_0)$ est un maximum (resp. minimum) local propre, il existe alors un intervalle $]p\,,q[\, \subset [0\,,1]$ à extrémités rationnelles tel que $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$) pour tout $x \in \,]p\,,q[$, $x \neq x_0$. La proposition se déduit alors du fait que l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles est dénombrable.

Puisque l'ensemble des extrema locaux propres de f est au plus dénombrable, il existe y compris entre $f(0)$ et $f(1)$ qui n'est pas un extremum local propre de f. On suppose que $f(0) < f(1)$ et $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, où $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. On pose de plus $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. La fonction $x \mapsto f(x) - y$ est soit strictement positive, soit strictement négative, sur chaque intervalle $]x_i\,, x_{i+1}[$ et de signes opposés dans deux intervalles consécutifs. On remarque que la fonction est négative dans le premier intervalle et positive dans le dernier. Le nombre de ces intervalles est donc pair et n est donc impair.

I.3.25. On définit la suite $\{x_n\}$ en posant $x_n = f^n(x_0)$. Si un des termes de cette suite est un point fixe de f, $\{x_n\}$ est alors constante à partir d'une certaine valeur de l'indice n donc convergente. Si un des termes de cette suite est une de ses valeurs d'adhérence, la suite est encore convergente. Il suffit donc de considérer le cas où aucun des termes de la suite $\{x_n\}$ n'est une de ses valeurs d'adhérence. On a alors

$$a = \varliminf_{n\to+\infty} x_n < b = \varlimsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Soit $x_{k_0} \in \,]a\,,b[$. Puisque x_{k_0} n'est pas une valeur d'adhérence de $\{x_n\}$, il existe un intervalle $]c\,,d[\, \subset \,]a\,,b[$ ne contenant aucun autre terme de cette suite. Il y a de plus une infinité de termes de la suite dans chacun des intervalles $]-\infty\,,c[$ et $]d\,,+\infty[$. Si $]a\,,b[$ ne contient pas de termes de la suite, on peut prendre $c = a$ et $d = b$. On définit alors une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ de sorte que $x_{n_k} < c$ et $x_{n_k+1} > d$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si g est une valeur d'adhérence de $\{x_{n_k}\}$, alors $g \leqslant c$ et $f(g) \geqslant d$. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle toute valeur d'adhérence de la suite est un point fixe de f.

I.3.26. [6]. D'après le résultat de **I.1.42**, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(0)}{n} = \alpha(f)$ existe. On montre maintenant qu'il existe $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $f(x_0) = x_0 + \alpha(f)$. Si $f(x) \geqslant x + \alpha(f) + \varepsilon$ pour tout $x \in [0\,,1]$ et pour un certain $\varepsilon > 0$, alors, en particulier, $f(0) \geqslant \alpha(f) + \varepsilon$. On montre par récurrence que $f^n(0) \geqslant n(\alpha(f)+\varepsilon)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, en posant $r = f(0) - [f(0)]$, on obtient

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f(f(0)) = f([f(0)] + r) = [f(0)] + f(r) \\ &\geqslant [f(0)] + r + \alpha(f) + \varepsilon = f(0) + \alpha(f) + \varepsilon \\ &\geqslant 2(\alpha(f) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Les mêmes arguments s'appliquent pour prouver que $f^n(0) \geqslant n(\alpha(f) + \varepsilon)$ implique $f^{n+1}(0) \geqslant (n+1)(\alpha(f) + \varepsilon)$. On remarque que si $f^n(0) \geqslant n(\alpha(f) + \varepsilon)$, alors $\alpha(f) \geqslant \alpha(f) + \varepsilon$, contradiction. On peut prouver de la même manière que si $f(x) \leqslant x + \alpha(f) - \varepsilon$ pour tout $x \in [0\,,1]$ et pour un certain $\varepsilon > 0$, alors $\alpha(f) \leqslant \alpha(f) - \varepsilon$, de nouveau une contradiction. Donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0\,,1]$ tel que $F(x_0) = f(x_0) - x_0 = \alpha(f)$. En particulier, si $\alpha(f) = 0$, x_0 est alors un point fixe de f. D'autre part, si x_0 est un point fixe de f, alors $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n} = 0$.

I.3.27. On pose $\mathbf{A} = \{x \in [0\,,1] : f(x) \geqslant 0\}$, $s = \inf \mathbf{A}$ et $h = f + g$. Puisque h est décroissante, on a $h(s) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in \mathbf{A}$. Puisque g est continue, $h(s) \geqslant g(s)$ et $f(s) \geqslant 0$. Les hypothèses impliquent

$$g(0) > h(0) \geqslant h(s) \geqslant g(s).$$

D'après la propriété des valeurs intermédiaires appliquée à g, il existe $t \in \,]0\,,s]$ tel que $g(t) = h(s)$. Mais alors, $h(t) \geqslant h(s) = g(t)$, ce qui donne $f(t) \geqslant 0$. Par définition de s, on a $t = s$, ce qui implique $g(s) = h(s)$ ou, de façon équivalente, $f(s) = 0$.

I.3.28. On remarque d'abord que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Si elle l'était, d'après le résultat de **I.3.16**, elle serait strictement monotone, par exemple strictement croissante. Dans ce cas, si $f(x_0) = 0$, on obtient $f(x) > 0$ pour $x > x_0$ et $f(x) < 0$ pour $x < x_0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f envoie $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. La même analyse montre que f ne peut pas non plus être strictement décroissante. La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose maintenant, contrairement à la proposition, que f a un nombre fini de points de discontinuité que l'on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. La fonction f est alors strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty\,,x_1[$, $]x_1\,,x_2[$, ..., $]x_n\,,+\infty[$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires appliquée à f,

$$f\left(]-\infty\,,x_1[\right), f\left(]x_1\,,x_2[\right), \ldots, f\left(]x_n\,,+\infty[\right)$$

sont des intervalles deux à deux disjoints. Donc

$$\mathbb{R}_+ \setminus \left(f\left(]-\infty\,,x_1[\right) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} f\left(]x_k\,,x_{k+1}[\right) \cup f\left(]x_n\,,+\infty[\right) \right)$$

contient au moins $n+1$ éléments. D'autre part, les seuls éléments de

$$\mathbb{R} \setminus \left( ]-\infty\,,x_1[\cup \bigcup_{k=1}^{n-1}]x_k\,,x_{k+1}[\cup]x_n\,,+\infty[\right)$$

sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et f ne peut donc pas être bijective, contradiction. On a donc prouvé que f a une infinité de points de discontinuité.

I.3.29. On prouve que si $\mathbf{I}$ est un sous-intervalle de $]0\,,1[$ d'intérieur non vide, alors $f(\mathbf{I}) = [0\,,1]$. Pour cela, on note qu'un tel intervalle $\mathbf{I}$ contient un sous-intervalle $\left]\frac{k}{2^{n_0}}\,,\frac{k+1}{2^{n_0}}\right[$. Il suffit donc de prouver que $f\left(\left]\frac{k}{2^{n_0}}\,,\frac{k+1}{2^{n_0}}\right[\right) = [0\,,1]$. On observe que si $x \in\,]0\,,1[$, alors soit $x = \frac{m}{2^{n_0}}$ pour un certain m et n_0, soit $x \in \left]\frac{j}{2^{n_0}}\,,\frac{j+1}{2^{n_0}}\right[$ pour un certain j, $j = 0, 1, \ldots, 2^{n_0} - 1$. Si $x = \frac{m}{2^{n_0}}$, alors $f(x) = 1$ et la valeur de f au milieu de $\left]\frac{k}{2^{n_0}}\,,\frac{k+1}{2^{n_0}}\right[$ est aussi égale à 1. Si maintenant $x \in \left]\frac{j}{2^{n_0}}\,,\frac{j+1}{2^{n_0}}\right[$ pour un certain j, il existe alors $x' \in \left]\frac{k}{2^{n_0}}\,,\frac{k+1}{2^{n_0}}\right[$ tel que $f(x) = f(x')$. En effet, tous les éléments de $\left]\frac{k}{2^{n_0}}\,,\frac{k+1}{2^{n_0}}\right[$ ont les mêmes n_0 premiers chiffres et on peut trouver x' dans cet intervalle tel que ses chiffres restants se trouvent dans le développement binaire de x. Puisque

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\sum\limits_{i=n_0+1}^{n} a_i}{n - n_0},$$

on obtient $f(x) = f(x')$. Il suffit donc de prouver que $f\left(]0\,,1[\right) = [0\,,1]$ ou, dit autrement, que pour tout $y \in [0\,,1]$, il existe $x \in\,]0\,,1[$ tel que $f(x) = y$. De ce qui précède, on sait que 1 est atteint, par exemple en $x = \frac{1}{2}$. Pour montrer que 0 est aussi atteint, on prend $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, où

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2^k,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Pour obtenir la valeur $y = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, on prend

$$x = 0, \underbrace{00\ldots0}_{q-p}\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{q-p}\ldots,$$

où des blocs de $q-p$ zéros alternent avec des blocs de p uns. On a alors $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{kp}{kq} = \frac{p}{q}$. Notre but est maintenant de prouver que tout irrationnel $y \in [0\,,1]$ est aussi atteint. On sait (voir, par exemple, **I.1.14 (vol. I)**) qu'il existe une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ convergente vers y, les entiers positifs p_n et q_n étant premiers entre eux. On pose

$$x = 0, \underbrace{00\ldots0}_{q_1-p_1}\underbrace{11\ldots1}_{p_1}\underbrace{00\ldots0}_{q_2-p_2}\ldots,$$

où $q_1 - p_1$ zéros sont suivis de p_1 uns, puis $q_2 - p_2$ zéros sont suivis de p_2 uns, etc. On a alors

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = y.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, la seconde égalité se déduit du résultat de **II.3.9 (vol. I)** ou du théorème de Stolz (voir, par exemple, **II.3.11 (vol. I)**).

I.4. Fonctions semi-continues

I.4.1.

(a) On pose $\sup_{\delta>0} \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} = a$. On suppose d'abord que a est un réel et on montre que $a = \varliminf_{x \to x_0} f(x)$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} \leqslant a \tag{i}$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ^* tel que

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta^*\} > a - \varepsilon. \tag{ii}$$

D'après (ii), on a

$$f(x) > a - \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta^*. \tag{iii}$$

Soit $\{x_n\}$ une suite de points de $\mathbf{A}$ différents de x_0. Si la suite converge vers x_0, alors $0 < |x_n - x_0| < \delta^*$ à partir d'une certaine valeur de l'indice n. Donc, $f(x_n) > a - \varepsilon$. Si $\{f(x_n)\}$ converge vers y, on obtient alors $y \geqslant a - \varepsilon$, d'où $\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant a$. Pour prouver que l'on a aussi $\varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant a$, on utilise (i). La définition de la borne inférieure implique que, étant donné $\varepsilon_1 > 0$, il existe $x^* \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x^* - x_0| < \delta$ et $f(x^*) < a + \varepsilon_1$. En prenant $\delta = \frac{1}{n}$, on obtient une suite $\{x_n^*\}$ telle que

$$0 < |x_n^* - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(x_n^*) < a + \varepsilon_1.$$

Combiné à (iii), ceci donne $a - \varepsilon < f(x_n^*) < a + \varepsilon_1$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\{f(x_n^*)\}$ converge. Sa limite est alors inférieure ou égale à $a + \varepsilon_1$ et, $\varepsilon_1 > 0$ pouvant être choisi arbitrairement, il s'ensuit que

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant a.$$

Si $a = +\infty$, étant donné $M > 0$, il existe δ^* tel que

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta^*\} > M.$$

Donc, si $0 < |x - x_0| < \delta^*$, alors $f(x) > M$. D'où, si $\{x_n\}$ converge vers x_0, alors $f(x_n) > M$ à partir d'une certaine valeur de l'indice n, ce qui signifie que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Finalement, si $a = -\infty$, alors

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} = -\infty$$

pour tout $\delta > 0$. Il existe donc une suite $\{x_n^*\}$ convergente vers x_0 telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n^*) = -\infty$, ce qui donne $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(b) La démonstration se mène comme en (a).

I.4.2. Le résultat est une conséquence immédiate de **I.1.35** et du problème précédent.

I.4.3. Le résultat du problème précédent implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \leqslant y_0 - \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} < \varepsilon.$$

Par définition de la borne inférieure, ceci est équivalent aux conditions (i) et (ii).

D'après **I.4.2(b)**, $\widetilde{y} = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < \widetilde{y} + \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ se trouvant dans le voisinage épointé $0 < |x - x_0| < \delta$.

(2) Pour tout $\delta > 0$, il existe $x' \in \mathbf{A}$ se trouvant dans le voisinage épointé $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $f(x') > \widetilde{y} - \varepsilon$.

I.4.4.

(a) D'après **I.4.2(a)**, $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} = -\infty$$

pour tout $\delta > 0$. Ceci signifie que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble

$$\{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

n'est pas minoré, ce qui donne le résultat cherché.

(b) La démonstration se mène comme en (a).

I.4.5. Soit $\{\delta_n\}$ une suite décroissante de réels strictement positifs convergente vers 0. Il découle de **I.4.2(a)** que

$$l = \lim_{n\to+\infty} \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta_n\} .$$

Pour l réel, ceci est équivalent aux deux conditions suivantes :

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta_k$ implique $f(x) > l - \frac{1}{n}$ pour $k > k_n$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ et $x_{k_n} \in \mathbf{A}$ tels que $0 < |x_{k_n} - x_0| < \delta_{k_n}$ et $f(x_{k_n}) < l + \frac{1}{n}$.

Il existe donc une suite x_{k_n} convergente vers x_0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = l$.

Si $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, d'après **I.4.4(a)**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$, il existe alors $x_n \in \mathbf{A}$ tel que $0 < |x_n - x_0| < \delta$ et $f(x_n) < -n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$.

Si $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, l'existence de $\{x_n\}$ se déduit alors immédiatement de la définition.

I.4.6. Le résultat se déduit immédiatement de **I.1.2 (vol. I)** et de **I.4.1**.

I.4.7. Il suffit d'appliquer **I.1.4 (vol. I)** et **I.4.1**.

I.4.8. On note que

$$\inf_{x\in\mathbf{A}} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x), \tag{1}$$

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \sup_{x\in\mathbf{A}} g(x). \tag{2}$$

En effet, pour $x \in \mathbf{A}$,

$$f(x) + g(x) \geqslant \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x),$$

ce qui implique (1). L'inégalité (2) se démontre de la même façon.

On prouve d'abord que

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x) \leqslant \varliminf_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) . \tag{3}$$

D'après (1), on a

$$\inf \{f(x)+g(x) : x \in \mathbf{A}, 0<|x - x_0|<\delta\} \geqslant \inf \{f(x) : x \in \mathbf{A}, 0 < |x - x_0| < \delta\} + \inf \{g(x) : x \in \mathbf{A}, 0<|x - x_0|<\delta\}.$$

Un passage à la limite lorsque δ tend vers 0^+ et le résultat de **I.4.2(a)** donnent (3). L'inégalité

$$\varlimsup_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \leqslant \varlimsup_{x\to x_0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x) \tag{4}$$

se prouve de la même manière. De plus, le **problème I.4.6** et (3) impliquent

$$\begin{aligned}
\varliminf_{x\to x_0} f(x) &= \varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)-g(x)) \\
&\geqslant \varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) + \varliminf_{x\to x_0} (-g(x)) \\
&= \varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) - \varlimsup_{x\to x_0} g(x).
\end{aligned}$$

On peut prouver de la même façon que

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x) \leqslant \varlimsup_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) .$$

Pour montrer que les inégalités peuvent être strictes, on considère les fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour $x_0 = 0$, les inégalités considérées sont de la forme $-2 < -1 < 0 < 1 < 2$.

I.4.9. On remarque d'abord que

$$\inf_{x\in\mathbf{A}} (f(x)\cdot g(x)) \geqslant \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) \cdot \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x), \tag{1}$$

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} (f(x)\cdot g(x)) \leqslant \sup_{x\in\mathbf{A}} f(x) \cdot \sup_{x\in\mathbf{A}} g(x) \tag{2}$$

si f et g sont positives sur $\mathbf{A}$. Le reste de la démonstration se mène comme dans la solution du problème précédent. Pour voir que les inégalités données peuvent être strictes, on considère les fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}+1} & \text{si } x > 0, \\ 2 & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}+1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour $x_0 = 0$, les inégalités considérées sont de la forme $\frac{1}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 3 < 6$.

I.4.10. On a $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Donc, d'après **I.4.8**,

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x)$$

et

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x).$$

Les autres inégalités se prouvent de la même façon.

I.4.11. Si $\lambda = l$ ou $\lambda = L$, la proposition se déduit immédiatement de **I.4.5**. On suppose donc que $\lambda \in \,]l\,,L[$. D'après **I.4.5**, il existe alors des suites $\{x'_n\}$ et $\{x''_n\}$ convergentes toutes deux vers a et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = l \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x''_n) = L.$$

Il s'ensuit que $f(x'_n) < \lambda < f(x''_n)$ à partir d'une certaine valeur de l'indice n. Puisque f est continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Il existe donc x_n dans l'intervalle d'extrémités x'_n et x''_n tel que $f(x_n) = \lambda$. Puisque $\{x'_n\}$ et $\{x''_n\}$ convergent vers a, la suite $\{x_n\}$ converge donc aussi vers a.

I.4.12. La fonction est continue en tout point de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (voir **I.2.1**). Clairement,

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} \sin x_0 & \text{si } \sin x_0 > 0, \\ 0 & \text{si } \sin x_0 \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sin x_0 > 0, \\ \sin x_0 & \text{si } \sin x_0 \leqslant 0. \end{cases}$$

En conséquence, f est semi-continue supérieurement sur l'ensemble

$$\left(\mathbb{Q} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi\,,(2k+1)\pi\right[\right) \cup \left((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(2k-1)\pi\,,2k\pi]\right)$$

et semi-continue inférieurement sur

$$\left(\mathbb{Q} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left](2k-1)\pi\,,2k\pi\right[\right) \cup \left((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi\,,(2k+1)\pi]\right).$$

I.4.13. On a

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x)=\begin{cases} x_0^2-1 & \text{si } x_0<-1 \text{ ou } x_0>1,\\ 0 & \text{si } x_0\in[-1\,,1]\end{cases}$$

et

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x_0<-1 \text{ ou } x_0>1,\\ x_0^2-1 & \text{si } x_0\in[-1\,,1].\end{cases}$$

La fonction f est semi-continue supérieurement en tout irrationnel de $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$ et en tout rationnel de l'intervalle $[-1\,,1]$; f est semi-continue inférieurement en tout rationnel de $]-\infty\,,-1]\cup[1\,,+\infty[$ et en tout irrationnel de $]-1\,,1[$.

I.4.14. La fonction f est continue en 0 et en tout irrationnel (voir **I.2.3**). Soit $0\neq x_0=\frac{p}{q}$, où $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. On a $f(x_0)=\frac{1}{q}$ et $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\ f(x)=0<\frac{1}{q}$. Donc, f est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$.

I.4.15.

(a) La fonction f est continue en 0 et en tout irrationnel strictement positif (voir **I.2.3**). On suppose que x_0 est un irrationnel strictement négatif. On a $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\ f(x)=|x_0|=f(x_0)$. Donc, f est semi-continue supérieurement en 0 et en tout irrationnel. Si $x_0=\frac{p}{q}>0$, alors $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}\ f(x)=\frac{p}{q}>\frac{p}{q+1}=f(x_0)$. Ceci signifie que f est semi-continue inférieurement en tout rationnel strictement positif. Si $x_0=\frac{p}{q}<0$, alors

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x)=-\frac{p}{q}>\frac{p}{q+1}=f(x_0)$$

et

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x)=\frac{p}{q}<\frac{p}{q+1}=f(x_0).$$

Donc, f n'est semi-continue ni supérieurement, ni inférieurement, en tout rationnel strictement négatif.

(b) On note que pour $x\in\,]0\,,1]$,

$$\underline{\lim_{t\to x}}\,f(t)=-x<f(x)<x=\overline{\lim_{t\to x}}\,f(t).$$

Donc, f n'est semi-continue ni supérieurement, ni inférieurement, sur $]0\,,1]$.

I.4.16.

(a) Si $x_0 \in \mathbf{A}$ est un point isolé de $\mathbf{A}$, la proposition est manifestement correcte. Si x_0 est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$, la proposition se déduit alors du fait que

$$\varlimsup_{x\to x_0} af(x) = \begin{cases} a \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } a > 0, \\ a \varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

(b) Soit x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ et on suppose, par exemple, que f et g sont semi-continues inférieurement en x_0. D'après **I.4.8**, on a alors

$$\varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x) \geqslant f(x_0)+g(x_0).$$

I.4.17. On suppose, par exemple, que les fonctions f_n sont semi-continues inférieurement en x_0. Puisque $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n \geqslant f_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\varliminf_{x\to x_0} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x) \geqslant \varliminf_{x\to x_0} f_n(x) \geqslant f_n(x_0) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

En conséquence,

$$\varliminf_{x\to x_0} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x) \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x_0).$$

I.4.18. Il suffit d'observer que si $\{f_n\}$ est une suite croissante (resp. décroissante), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$) (voir, par exemple, **II.1.1 (vol. I)**) et d'utiliser le résultat du problème précédent.

I.4.19. D'après **I.4.1**, on a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \max\left\{f(x), \varlimsup_{z\to x} f(z)\right\} \\ &= \inf_{\delta>0} \sup\left\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta\right\} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\left\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta\right\}. \end{aligned}$$

De même,

$$f_2(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\left\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta\right\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f_1(x) - f_2(x) &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta\} \\
&\quad - \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta\} \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(z) - f(u) : z, u \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta, |u-x| < \delta\} \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{|f(z) - f(u)| : z, u \in \mathbf{A}, |z-x| < \delta, |u-x| < \delta\} \\
&= o_f(x).
\end{aligned}$$

I.4.20. Soit x un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ et $\{x_n\}$ une suite de points de $\mathbf{A}$ convergente vers x. On pose $\delta_n = |x_n - x| + \frac{1}{n}$. Alors, $|z - x_n| < \delta_n$ implique $|z - x| < 2\delta_n$. En conséquence (voir la solution du problème précédent),

$$\begin{aligned}
f_2(x_k) &= \lim_{n\to+\infty} \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z - x_k| < \delta_n\} \\
&\geqslant \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z - x_k| < \delta_n\} \\
&\geqslant \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A}, |z - x| < 2\delta_n\}.
\end{aligned}$$

Un passage à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ donne $\varliminf_{k\to+\infty} f_2(x_k) \geqslant f_2(x)$. Il s'ensuit que $\varliminf_{z\to x} f_2(z) \geqslant f_2(x)$ et la semi-continuité inférieure de la fonction f_2 est donc prouvée. On peut montrer de la même façon que f_1 est semi-continue supérieurement. Maintenant, d'après le résultat du problème précédent, $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ce qui, avec **I.4.16**, prouve la semi-continuité supérieure de o_f.

I.4.21. On prouve la proposition pour les fonctions semi-continues inférieurement. On suppose d'abord que la condition donnée est vérifiée. Pour $a < f(x_0)$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $f(x) > a$ pour $|x - x_0| < \delta$. Si $\{x_n\}$ est une suite de points de $\mathbf{A}$ convergente vers x_0, alors $|x_n - x_0| < \delta$ pour n suffisamment grand. Ainsi, $f(x_n) > a$, ce qui implique $\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geqslant a$. On obtient alors $\varliminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$, a pouvant être choisi arbitrairement. On suppose maintenant que f est semi-continue inférieurement en x_0 et que, contrairement à la proposition, la condition n'est pas satisfaite. Il existe alors $a < f(x_0)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbf{A}$ pour lequel $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$ et $f(x_n) \leqslant a$. La suite $\{x_n\}$ converge donc vers x_0 et $\varliminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant a < f(x_0)$, contradiction.

I.4.22. On suppose que l'ensemble $\{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{R}$. Soit x_0 un élément de $\mathbf{A}$, on prend $a < f(x_0)$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[\subset \{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$. Le résultat du problème précédent implique alors que f est semi-continue inférieurement.

On suppose maintenant que f est semi-continue inférieurement sur $\mathbf{A}$ et on montre que l'ensemble $\{x \in \mathbf{A} : f(x) \leqslant a\}$ est fermé dans $\mathbf{A}$. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de cet ensemble convergente vers x. On a alors $f(x_n) \leqslant a$ et, en conséquence, $f(x) \leqslant \varliminf_{n \to +\infty} f(x_n) \leqslant a$, ce qui implique que x est aussi un élément de $\{x \in \mathbf{A} : f(x) \leqslant a\}$. On a donc prouvé que cet ensemble est fermé ou, de façon équivalente, que son complémentaire est ouvert dans $\mathbf{A}$.

I.4.23. On suppose que f est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathbf{B} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant f(x)\big\}$. Notre but est de prouver que $\mathbf{B}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite de points de $\mathbf{B}$ convergente vers (x_0, y_0). On a

$$y_0 = \lim_{n \to +\infty} y_n \geqslant \varliminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geqslant \varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Donc, $(x_0, y_0) \in \mathbf{B}$.

On suppose maintenant que $\mathbf{B}$ est fermé et f n'est pas semi-continue inférieurement en $x_0 \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbf{B}^c = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\big\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ et il existe une suite $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, convergente vers x_0 telle que $y = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) < f(x_0)$. On prend g tel que $y < g < f(x_0)$. Alors, (x_0, g) appartient à $\mathbf{B}^c$. Il existe donc une boule centrée en (x_0, g) contenue dans $\mathbf{B}^c$ ou, de façon équivalente, $g < f(x_n)$. Ainsi, $g \leqslant y$, contradiction.

On rappelle que f est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $-f$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}$. Donc, f est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant f(x)\big\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

I.4.24. [21]. On prouve d'abord que f est semi-continue inférieurement si et seulement si la fonction $g(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} f(x)$ l'est aussi. Pour cela, on utilise la caractérisation donnée en **I.4.20**. On suppose que f est semi-continue inférieurement. Pour montrer que g l'est aussi, il suffit de montrer que l'ensemble $\mathbf{B} = \big\{x \in \mathbf{A} : \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} f(x) > a\big\}$ est ouvert dans $\mathbf{A}$ pour tout réel a. Clairement, si $a \leqslant -1$, alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ et si $a \geqslant 1$, $\mathbf{B} = \varnothing$. Si $|a| < 1$, alors $\mathbf{B} = \big\{x \in \mathbf{A} : f(x) > \tan\big(\frac{\pi}{2}\, a\big)\big\}$ qui est ouvert par hypothèse. On suppose maintenant que g est semi-continue inférieurement. L'ensemble $\big\{x \in \mathbf{A} : g(x) > \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} a\big\}$ est ouvert pour tout réel a et l'ensemble $\{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$ est donc ouvert.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbf{A}$, on définit $\varphi_{a,n}$ par

$$\varphi_{a,n}(x) = g(a) + n\,|x-a| \quad (x \in \mathbb{R})$$

et on pose

$$g_n(x) = \inf_{a \in \mathbf{A}} \varphi_{a,n}(x).$$

Clairement,

$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et

$$g_n(x) \leqslant \varphi_{x,n}(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{A}.$$

La suite $\{g_n(x)\}$ est donc convergente pour tout $x \in \mathbf{A}$. On montre maintenant que les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x, x' \in \mathbb{R}$,

$$\left|\varphi_{a,n}(x) - \varphi_{a,n}(x')\right| \leqslant n\left|x - x'\right|.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi_{a,n}(x') - n\left|x - x'\right| \leqslant \varphi_{a,n}(x) \leqslant \varphi_{a,n}(x') + n\left|x - x'\right|.$$

En conséquence, on a

$$g_n(x') - n\left|x - x'\right| \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(x') + n\left|x - x'\right|$$

et la continuité de g_n est donc prouvée. Il découle de ce qui précède que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in \mathbf{A}$. Notre but est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) \geqslant g(x).$$

Soit $x \in \mathbf{A}$ et $\alpha < g(x)$. Puisque g est semi-continue inférieurement en x, il existe $\delta > 0$ tel que $g(a) > \alpha$ si $|x-a| < \delta$. Donc,

$$\varphi_{a,n}(x) \geqslant g(a) > \alpha \quad \text{pour} \quad |x-a| < \delta. \tag{1}$$

D'autre part,

$$\varphi_{a,n}(x) > -1 + n\delta \quad \text{pour} \quad |x-a| \geqslant \delta,$$

ce qui, combiné à (1), donne

$$g_n(x) = \inf_{a \in \mathbf{A}} \varphi_{a,n}(x) \geqslant \min\{\alpha, -1 + n\delta\}.$$

Donc, $g_n(x) > \alpha$ pour n suffisamment grand et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) \geqslant \alpha$. Finalement, par passage à la limite lorsque α tend vers $g(x)$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) \geqslant g(x)$.

I.4.25. Le théorème de Baire (voir le problème précédent) implique qu'il existe une suite décroissante $\{f_n\}$ et une suite croissante $\{g_n\}$ de fonctions continues convergentes sur $\mathbf{A}$ respectivement vers f et g. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f_1(x), & \psi_1(x) &= \min\{\varphi_1(x), g_1(x)\}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \max\{\psi_{n-1}(x), f_n(x)\}, & \psi_n(x) &= \min\{\varphi_n(x), g_n(x)\}. \end{aligned}$$

La suite $\{\varphi_n\}$ est alors décroissante car les inégalités $\psi_n \leqslant \varphi_n$ et $f_n \leqslant \varphi_n$ impliquent

$$\varphi_{n+1} = \max\{\psi_n, f_{n+1}\} \leqslant \max\{\psi_n, f_n\} \leqslant \max\{\varphi_n, f_n\} = \varphi_n.$$

On peut montrer de même que $\{\psi_n\}$ est croissante. On observe alors que les suites de fonctions continues $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ convergent toutes les deux, vers des limites que l'on note respectivement φ et ψ. On peut montrer que $\varphi(x) = \max\{\psi(x), f(x)\}$ et $\psi(x) = \min\{\varphi(x), g(x)\}$ (voir, par exemple, **II.4.28 (vol. I)**). Donc, si $\varphi(x) \neq \psi(x)$ pour un x, alors $\varphi(x) = f(x)$ et, puisque $f(x) \leqslant g(x)$, on a aussi $\psi(x) = f(x)$, contradiction. Les suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ ont donc la même limite (que l'on note h) et qui vérifie $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$. D'après **I.4.18**, h est semi-continue inférieurement et supérieurement donc continue.

I.5. Continuité uniforme

I.5.1.

(a) La fonction peut être prolongée par continuité sur $[0,1]$. Donc, f est uniformément continue sur $]0,1[$.

(b) On remarque que

$$\left| f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \right| = 1$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, bien que $\left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|$ puisse être arbitrairement petit. La fonction n'est donc pas uniformément continue sur $]0,1[$.

(c) Puisqu'il existe un prolongement continu de f sur $[0,1]$, la fonction f est uniformément continue sur $]0,1[$.

(d) On a

$$\left| f\left(\frac{1}{\ln n}\right) - f\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \right| = |n-(n+1)| = 1$$

et $\left| \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, f n'est pas uniformément continue sur $]0\,,1[$.

(e) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, la fonction peut être prolongée par continuité sur $[0\,,1]$ et f est donc uniformément continue sur $]0\,,1[$.

(f) La fonction n'est pas uniformément continue sur $]0\,,1[$ car

$$\left| f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2n\pi+\pi}\right) \right| = e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{2n\pi+\pi}} > 2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(g) Pour voir que la fonction n'est pas uniformément continue sur $]0\,,1[$, on remarque que

$$\left| f\left(\frac{1}{e^n}\right) - f\left(\frac{1}{e^{n+1}}\right) \right| = 1.$$

(h) On observe que

$$\left| f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \right| = \cos\frac{1}{2n} + \cos\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

La fonction n'est donc pas uniformément continue sur $]0\,,1[$.

(i) Comme précédemment, on montre que la fonction n'est pas uniformément continue sur $]0\,,1[$.

I.5.2.

(a) On montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, d'après l'inégalité

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{x_1 - x_2} \quad \text{pour} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+,$$

on a

$$|x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon^2 \quad \text{implique} \quad |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

(b) On note que

$$\left| f(2n\pi) - f\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi.$$

Donc, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Puisque

$$\left|\sin^2 x_1 - \sin^2 x_2\right| = |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot |\sin x_1 + \sin x_2| \leqslant 2\,|x_1 - x_2|\,,$$

la fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(d) La fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\left| f\left(\sqrt{2n\pi}\right) - f\left(\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)\right| = 1$$

bien que $\left|\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(e) La fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, la continuité du logarithme implique

$$|\ln n - \ln(n+1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De plus,

$$|f(\ln n) - f(\ln(n+1)| = 1.$$

(f) On peut montrer, comme en (d), que la fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(g) Puisque

$$|\sin(\sin x_1) - \sin(\sin x_2)| \leqslant 2\left|\sin\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{2}\right| \leqslant |x_1 - x_2|\,,$$

f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(h) On note que

$$\left| f\left(2n\pi + \frac{1}{2n\pi}\right) - f(2n\pi)\right|$$
$$= \left|\sin\left(2n\pi \sin\frac{1}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{1}{2n\pi}\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1.$$

La fonction n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(i) On observe que

$$|\sin\sqrt{x_1} - \sin\sqrt{x_2}| = \left|2\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right| \leqslant |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|\,.$$

En raisonnant maintenant comme en (a), on montre l'uniforme continuité de f.

I.5.3. On montre que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe. Par continuité uniforme, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ dès que $|x_1 - x_2| < \delta$. Clairement, si $a < x_1 < a + \delta$ et $a < x_2 < a + \delta$, alors $|x_1 - x_2| < \delta$. Le théorème de Cauchy (voir **I.1.37**) implique que la limite à droite de f en a existe. On peut prouver de la même façon que la limite de f à gauche en b existe aussi.

I.5.4.

(a) La définition de la continuité uniforme implique directement que la somme de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

(b) Si f et g sont uniformément continues sur un intervalle $]a\,,b[$ borné, alors d'après le résultat du problème précédent, les fonctions peuvent être prolongées par continuité à $[a\,,b]$. Donc f et g sont bornées sur $]a\,,b[$. L'uniforme continuité de fg sur $]a\,,b[$ se déduit alors de l'inégalité

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant |f(x_1)|\,|g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)|\,|f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

D'autre part, les fonctions $f(x) = g(x) = x$ sont uniformément continues sur $[a\,,+\infty[$ mais $f(x)g(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur cet intervalle.

(c) D'après (b), la fonction $x \mapsto f(x)\sin x$ est uniformément continue sur $]a\,,b[$. Elle ne l'est pas nécessairement sur $[a\,,+\infty[$ comme le montre l'exemple en **I.5.2(b)**.

I.5.5.

(a) Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $|f(x_1) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 \leqslant b - x_1 < \frac{\delta_1}{2}$ et $|f(x_2) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 \leqslant x_2 - b < \frac{\delta_2}{2}$. En posant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, on obtient

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \tag{1}$$

Pour $x_1, x_2 \in\,]a\,,b]$ ou $x_1, x_2 \in [b\,,c[$, (1) est clairement vérifiée pour un certain $\delta > 0$.

(b) Non. On pose $\mathbf{A} = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{B} = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{A}, \\ 2 & \text{si } x \in \mathbf{B}. \end{cases}$$

I.5.6. Si f est constante, elle est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction périodique non constante, elle admet alors une période fondamentale T (voir **I.2.23**). Clairement, f est uniformément continue sur chaque intervalle $[kT\,,(k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc, comme dans la solution de **I.5.5(a)**, on peut montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.5.7.

(a) On pose $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geqslant A$ et $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \leqslant -A$. Ceci implique $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ si $x_1, x_2 \in [A\,,+\infty[$ ou $x_1, x_2 \in\,]-\infty\,,-A]$. Clairement f est uniformément continue sur $[-A\,,A]$. Finalement, comme dans la solution de **I.5.5(a)**, on montre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La démonstration se mène comme en (a).

I.5.8. Il suffit d'appliquer le résultat du problème précédent.

I.5.9. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas nécessairement. Pour le voir, considérez la fonction donnée en **I.5.2(c)**. La limite $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ existe (voir **I.5.3**).

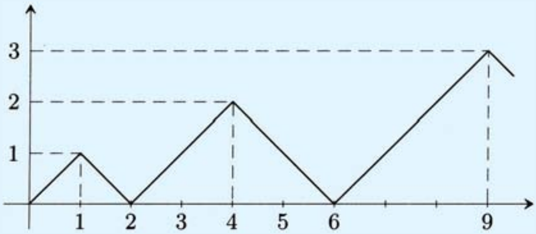
I.5.10. On suppose que $\mathbf{I} = \,]a\,,b[$ est un intervalle borné et, par exemple, que f est croissante. Comme en **I.1.35**, on peut prouver que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in]a\,,b[} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in]a\,,b[} f(x).$$

On peut alors prolonger la fonction f par continuité sur $[a\,,b]$ et elle est donc uniformément continue sur $]a\,,b[$. Si l'intervalle $\mathbf{I}$ n'est pas borné, les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existent et sont finies. D'après **I.5.7**, f est donc uniformément continue sur $\mathbf{I}$.

I.5.11. Non. La fonction suivante est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0\,,1], \\ -x+2 & \text{pour } x \in [1\,,2], \\ \ldots & \\ x - n(n+1) & \text{pour } x \in \left[n(n+1)\,,(n+1)^2\right], \\ -x + (n+1)(n+2) & \text{pour } x \in \left[(n+1)^2\,,(n+1)(n+2)\right], \\ \ldots & \end{cases}$$



I.5.12. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ de sorte que pour $x, x' \geqslant 0$,

$$\left|x - x'\right| < \delta \quad \text{implique} \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des points de l'intervalle $[0\,,1]$ tels que pour tout $x \in [0\,,1]$, il y ait un x_i vérifiant $|x - x_i| < \delta$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_i + n) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$, il existe n_0 tel que $|f(x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > n_0$ et pour $i = 1, 2, \ldots, k$. On suppose que $x \geqslant n_0 + 1$ et on pose $n = [x]$. Il existe alors x_i tel que $|x - (n + x_i)| < \delta$. Il s'ensuit que

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i + n)| + |f(x_i + n)| \leqslant \varepsilon.$$

I.5.13. Par continuité uniforme de f sur $[1\,,+\infty[$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < 1$ si $|x - x'| < \delta$. Tout $x \geqslant 1$ peut s'écrire sous la forme $x = 1 + n\delta + r$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < \delta$. Donc,

$$|f(x)| \leqslant |f(1)| + |f(x) - f(1)| \leqslant |f(1)| + (n + 1).$$

En divisant par x, on obtient

$$\frac{|f(x)|}{x} \leqslant \frac{|f(1)| + (n+1)}{1 + n\delta + r} \leqslant \frac{|f(1)| + 2}{\delta} = M.$$

I.5.14. Comme dans la solution du problème précédent, on trouve $\delta > 0$ tel que si $x = n\delta + r$, alors

$$|f(x + u) - f(u)| \leqslant n + 1$$

pour tout $u \geqslant 0$. Donc,

$$\frac{|f(x+u) - f(u)|}{x + 1} \leqslant \frac{n+1}{1 + n\delta + r} \leqslant \frac{2}{\delta} = M.$$

I.5.15. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbf{A}$, autrement dit, étant donné $\delta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_n - x_m| < \delta$ pour tous $n, m \geqslant n_0$. Par continuité uniforme de f, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ si $|x_n - x_m| < \delta_\varepsilon$. Donc, $\{f(x_n)\}$ est une suite de Cauchy.

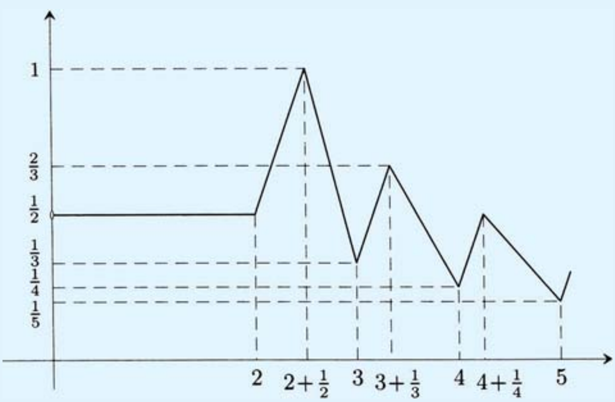
I.5.16. On suppose, contrairement à l'énoncé, que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{A}$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n strictement positif, il existe x_n et x'_n dans $\mathbf{A}$ vérifiant $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$. Puisque $\mathbf{A}$ est borné, il existe une sous-suite convergente $\{x_{n_k}\}$ extraite de $\{x_n\}$. On déduit de ce qui précède que la suite $\{x'_{n_k}\}$ converge vers la même limite. La suite $\{z_k\}$ formée des termes $x_{n_1}, x'_{n_1}, x_{n_2}, x'_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, x'_{n_k}, \ldots$ est convergente et il s'agit donc d'une suite de Cauchy. Mais $\left|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geqslant \varepsilon$ ce qui implique que $\{f(z_k)\}$ n'est pas une suite de Cauchy, contradiction.

Le fait que $\mathbf{A}$ soit borné est essentiel. Pour le voir, considérez la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.5.17. La nécessité de la condition se déduit immédiatement de la définition de la continuité uniforme. On suppose maintenant que la condition donnée est vérifiée et que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{A}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier n strictement positif, il existe x_n et y_n dans $\mathbf{A}$ vérifiant $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$, contradiction.

I.5.18. Non. On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } x \in \left]0\,,2\right], \\ \frac{1}{n} & \text{pour } x = n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \\ \frac{2}{n} & \text{pour } x = n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \\ x - n + \frac{1}{n} & \text{pour } x \in \left]n\,, n + \frac{1}{n}\right[,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \\ -\frac{n+2}{(n+1)(n-1)}\left(x - n - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} & \text{pour } x \in \left]n+\frac{1}{n}\,, n+1\right[,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2. \end{cases}$$



La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$. D'après **I.5.7**, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(n+\frac{1}{n}\right)}{f(n)} = 2.$$

I.5.19. Par continuité de f en 0, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour $|x| < \delta$. La sous-additivité de f entraîne donc

$$f(x+t) - f(x) \leqslant f(t) < \varepsilon \quad \text{et} \quad f(x) - f(x+t) \leqslant f(-t) < \varepsilon$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $|t| < \delta$. En conséquence, $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$.

I.5.20. On observe que ω_f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc (voir **I.1.35**),

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = \inf_{\delta>0} \omega_f(\delta) \geqslant 0.$$

Si $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Donc, si $|x_1 - x_2| < \delta$, alors $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega_f(\delta) < \varepsilon$. Ceci signifie que f est uniformément continue sur $\mathbf{A}$.

On suppose maintenant que f est uniformément sur $\mathbf{A}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_0 > 0$ tel que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ pour $|x_1 - x_2| < \delta_0$. Donc, $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) \leqslant \omega_f(\delta_0) \leqslant \varepsilon$ et, ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on a $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

I.5.21. Clairement, il suffit de prouver que (b) implique (a). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque fg est continue en 0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$|x| < \delta_1 \quad \text{implique} \quad |f(x)g(x) - f(0)g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, si $|x_1| < \delta_1$ et $|x_2| < \delta_1$, alors $|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| < \varepsilon$. Pour $|x_1| \geqslant \delta_1$, on a

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant \frac{|g(x_1)|}{|x_1|}\,|x_1|\,|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2)|\,|g(x_1) - g(x_2)|.$$

Donc,

$$\begin{aligned}|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant{}& \frac{|g(x_1)|}{|x_1|}\left(\left||x_1|\,f(x_1) - |x_2|\,f(x_2)\right| + |f(x_2)|\,|x_2 - x_1|\right)\\ &+ |f(x_2)|\,|g(x_1) - g(x_2)|.\end{aligned}$$

Ceci, combiné avec le résultat de **I.5.13**, donne

$$\begin{aligned}|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant M\,||x_1|\,f(x_1) - |x_2|\,f(x_2)| \\ + ML\,|x_2 - x_1| + L\,|g(x_1) - g(x_2)|\,,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}M &= \sup\left\{\frac{|g(x)|}{|x|} : |x| \geqslant \delta_1\right\},\\ L &= \max\left\{\sup\left\{|f(x)| : |x| \leqslant \delta_1\right\}, \sup\left\{\frac{|x|\,|f(x)|}{|x|} : |x| \geqslant \delta_1\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Le résultat cherché se déduit donc de la continuité uniforme de $g(x)$ et de $|x|\,f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

I.5.22. On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbf{I}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{implique} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{i}$$

On prouve que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > N \quad \text{implique} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{ii}$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$, $x_1 \neq x_2$. Clairement, cette implication est équivalente à

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon \quad \text{implique} \quad \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant N.$$

D'après (i), si $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$, alors $|x_1 - x_2| \geqslant \delta$. On peut, sans perte de généralité, supposer que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$. Puisque $f(x_2) - f(x_1) \geqslant \varepsilon$, il existe $\eta \in [\varepsilon\,, 2\varepsilon]$ et un entier strictement positif k tels que $f(x_2) = f(x_1) + k\eta$. La propriété des valeurs intermédiaires appliquée à f sur l'intervalle $[x_1\,, x_2]$ implique alors qu'il existe $x_1 = z_0 < z_1 < \ldots < z_k = x_2$ tels que $f(z_i) = f(x_1) + i\eta$, $i = 1, 2, \ldots, k$. On a $|f(z_i) - f(z_{i-1})| = \eta \geqslant \varepsilon$, donc $|z_i - z_{i-1}| \geqslant \delta$ et $|x_1 - x_2| \geqslant k\delta$. En posant $N = \frac{2\varepsilon}{\delta}$, on obtient

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant \frac{k\eta}{k\delta} = \frac{\eta}{\delta} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta} = N.$$

On suppose maintenant que (ii) est vérifiée. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $N > 0$ tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon \quad \text{implique} \quad \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant N.$$

En conséquence,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon \quad \text{implique} \quad |x_1 - x_2| \geqslant \frac{\varepsilon}{N}.$$

Ceci signifie que (i) est vérifiée en prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$.

I.6. Équations fonctionnelles

I.6.1. Clairement, les fonctions $f(x) = ax$ sont continues et vérifient l'équation fonctionnelle de Cauchy. On montre qu'il n'y a pas d'autres solutions continues à cette équation. On observe d'abord que si f vérifie

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

alors $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que

$$f(nx) = nf(x) \tag{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si on remplace x par $\frac{x}{n}$ dans (2), on obtient

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x). \tag{3}$$

Si $r = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors (2) et (3) impliquent

$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q} f(x) = rx. \tag{4}$$

La relation (2) implique $f(0) = 0$. Combiné à (1), cela donne $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ ou, dit autrement, $f(-x) = -f(x)$. On obtient donc, avec (4), $-rf(x) = f(-rx) = -f(rx)$ pour tout rationnel négatif r. Puisque pour tout réel α, il existe une suite $\{r_n\}$ de rationnels convergente vers α et puisque f est continue, on a, d'après (4),

$$f(\alpha x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n x\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) = \alpha f(x).$$

En prenant $x = 1$, on obtient $f(\alpha) = \alpha f(1)$. Ainsi, $f(x) = ax$ où $a = f(1)$.

I.6.2.

(a) On montre que si f est continue en au moins un point et vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy, elle est alors continue sur $\mathbb{R}$. La proposition se déduit alors du problème précédent. Clairement si f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy, les égalités (2)-(4) de la solution du problème précédent sont vérifiées. On montre d'abord que la continuité de f en x_0 implique la continuité en 0. En effet, si $\{z_n\}$ est une suite convergente vers 0, alors $\{z_n + x_0\}$ converge vers x_0. De plus, l'égalité

$$f(z_n + x_0) = f(z_n) + f(x_0)$$

et la continuité de f en x_0 impliquent $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = 0 = f(0)$. Si maintenant x est un réel et $\{x_n\}$ une suite convergente vers x, alors $\{x_n - x\}$ converge vers 0. L'égalité $f(x_n - x) = f(x_n) - f(x)$ et la continuité de f en 0 impliquent $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

(b) On montre d'abord que si f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy et est majorée sur l'intervalle $]a\,,b[$, elle est alors bornée sur tout intervalle $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$. On considère pour cela la fonction

$$g(x) = f(x) - f(1)\,x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Clairement, g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy et on déduit de la solution de **I.6.1** que $g(r) = 0$ pour $r \in \mathbb{Q}$. Pour $x \in \,]-\varepsilon\,,\varepsilon[$, on trouve un rationnel r tel que $x + r \in \,]a\,,b[$. On a alors $g(x) = g(x) + g(r) = g(x + r) = f(x + r) - f(1)(x + r)$, ce qui implique que g est majorée sur $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$ et il en est donc de même pour f. Puisque $f(-x) = -f(x)$, f est aussi minorée sur $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$. On montre maintenant que f est continue en 0. Soit $\{x_n\}$ une suite convergente vers 0. On choisit une suite $\{r_n\}$ de rationnels qui tend vers $+\infty$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n r_n = 0$. La suite $\{|f(x_n r_n)|\}$ est alors majorée, par exemple par M, et

$$|f(x_n)| = \left|f\left(\frac{1}{r_n}\, r_n x_n\right)\right| = \frac{1}{r_n}\,|f(r_n x_n)| \leqslant \frac{M}{r_n}\,.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$. La proposition se déduit alors de (a).

(c) On suppose, par exemple, que f est croissante. Les égalités (2)-(4) de la solution de **I.6.1** impliquent

$$-\frac{1}{n}\,f(1) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{n}\,f(1)$$

pour $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. La fonction f est donc continue en 0 et la proposition se déduit de (a).

I.6.3. On remarque que $f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$. Si f prend la valeur 0 en x_0, du fait que $f(x+y) = f(x)f(y)$, f est alors identiquement nulle, ce qui contredit $f(1) > 0$. La fonction f est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction $g(x) = \ln f(x)$ est continue et vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. D'après **I.6.1**, $g(x) = ax$, où $a = g(1) = \ln f(1)$. Donc $f(x) = b^x$ pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $b = f(1)$.

I.6.4. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on choisit $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $x = e^t$ et $y = e^s$. On définit g par $g(t) = f(e^t)$. On a alors $g(t+s) = g(t) + g(s)$ pour $t, s \in \mathbb{R}$ et, d'après **I.6.1**, $g(t) = at$. Donc, $f(x) = a \ln x = \log_b x$ où $b = e^{\frac{1}{a}}$.

I.6.5. Comme dans la solution du problème précédent, pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on choisit $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $x = e^t$ et $y = e^s$ puis on définit g en posant $g(t) = f(e^t)$. La fonction f vérifie alors l'équation donnée si et seulement si $g(t+s) = g(t)g(s)$ pour $t, s \in \mathbb{R}$. On déduit de **I.6.3** que $g(t) = a^t$ et $f(x) = a^{\ln x} = x^b$ où $b = \ln a$.

I.6.6. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) - f(y)$ est rationnel lorsque $x - y$ est rationnel, alors $g(x) = f(x+1) - f(x)$ est continue et ne prend que des valeurs rationnelles. La propriété des valeurs intermédiaires implique que g est constante. On pose donc $f(x+1) - f(x) = q$, $q \in \mathbb{Q}$. Si $f(0) = r$, alors $f(1) = r + q$ et, par récurrence, $f(n) = nq + r$, $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f(x) = f(x+1) - q$, on obtient $f(-1) = -q + r$ et, par récurrence, $f(-n) = -nq + r$, $n \in \mathbb{N}$. Pour un rationnel $p = \frac{n}{m}$, la fonction $f(x+p) - f(x)$ est aussi constante. On pose $f(x+p) = f(x) + \tilde{q}$. Comme précédemment, on montre que $f(kp) = k\tilde{q} + r$ pour $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $f(n) = f(mp) = m\tilde{q} + r$. D'autre part, $f(n) = nq + r$. Donc, $\tilde{q} = \frac{n}{m} q$ et $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} q + r$. Puisqu'on peut choisir p arbitrairement, $f(x) = qx + r$ pour $x \in \mathbb{Q}$. La continuité de f implique que f est définie par cette expression pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.6.7. On remarque que $f(0) = 0$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = -f(qx) = f\left(q^2 x\right) = -f\left(q^3 x\right).$$

On montre par récurrence que $f(x) = (-1)^n f(q^n x)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et, en utilisant la continuité de f en 0, on voit que $f(x) = 0$. Seule la fonction identiquement nulle vérifie donc l'équation donnée.

I.6.8. On a $f(0)=0$ et

$$f(x)=-f\left(\frac{2}{3}x\right)+x=f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\right)-\frac{2}{3}x+x.$$

On montre par récurrence que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$f(x)=(-1)^n f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right)+(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}x+\ldots-\frac{2}{3}x+x.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient $f(x)=\frac{3}{5}x$.

I.6.9. Si on pose $y=2x$ dans l'équation, on obtient

$$f(y)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}y\right)+\frac{1}{2^2}y=\frac{1}{2^2}f\left(\frac{1}{2^2}y\right)+\frac{1}{2^4}y+\frac{1}{2^2}y.$$

On montre par récurrence que

$$f(y)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2^n}y\right)+\frac{1}{2^{2n}}y+\frac{1}{2^{2(n-1)}}y+\ldots+\frac{1}{2^2}y.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et en utilisant le fait que $f(0)=0$ et la continuité de f en 0, on conclut que $f(y)=\frac{1}{3}y$.

I.6.10. On pose $f(0)=c$. En prenant $y=0$ dans l'équation de Jensen, on obtient

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}=\frac{f(x)+c}{2}.$$

Donc,

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)+c}{2}$$

ce qui donne $f(x)+f(y)=f(x+y)+c$. On pose $g(x)=f(x)-c$. La fonction g vérifie alors l'équation de Cauchy (voir **I.6.1**), d'où $g(x)=ax$ ou, dit autrement, $f(x)=ax+c$.

I.6.11. On montre d'abord que f est affine sur tout sous-intervalle fermé $[\alpha\,,\beta]$ de $]a\,,b[$. L'équation de Jensen donne

$$f\left(\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right)=f(\alpha)+\frac{1}{2}\left(f(\beta)-f(\alpha)\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\frac{\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{1}{2}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ &= f(\alpha)+\frac{1}{4}(f(\beta)-f(\alpha)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{3}{4}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}f(\beta)+\frac{1}{2}f\left(\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right) \\ &= f(\alpha)+\frac{3}{4}(f(\beta)-f(\alpha)). \end{aligned}$$

On montre par récurrence que

$$f\left(\alpha+\frac{k}{2^n}(\beta-\alpha)\right) = f(\alpha)+\frac{k}{2^n}(f(\beta)-f(\alpha))$$

pour $k=0,1,2,3,\ldots,2^n$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose l'égalité vérifiée pour $m\leqslant n$ et on la prouve au rang $n+1$. Si $k=2l$, $l=0,1,\ldots,2^n$, on a alors, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{k}{2^{n+1}}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\alpha+\frac{l}{2^n}(\beta-\alpha)\right) \\ &= f(\alpha)+\frac{l}{2^n}(f(\beta)-f(\alpha)) \\ &= f(\alpha)+\frac{k}{2^{n+1}}(f(\beta)-f(\alpha)). \end{aligned}$$

De même, si $k=2l+1$, $l=0,1,\ldots,2^n-1$, alors

$$\begin{aligned} f\left(\alpha+\frac{k}{2^{n+1}}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{l}{2^{n-1}}(\beta-\alpha)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2^n}(\beta-\alpha)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\alpha+\frac{l}{2^{n-1}}(\beta-\alpha)\right)+\frac{1}{2}f\left(\alpha+\frac{1}{2^n}(\beta-\alpha)\right) \\ &= f(\alpha)+\frac{k}{2^{n+1}}(f(\beta)-f(\alpha)). \end{aligned}$$

Puisque que les nombres de la forme $\frac{k}{2^n}$ forment un ensemble dense dans $[0\,,1]$, la continuité de f implique

$$f(\alpha+t(\beta-\alpha)) = f(\alpha)+t(f(\beta)-f(\alpha)) \quad \text{pour} \quad t\in[0\,,1].$$

En prenant $x = \alpha + t(\beta - \alpha)$, on obtient

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,(x - \alpha)\,.$$

On remarque maintenant que les hypothèses du problème impliquent que f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b. En effet, on a par exemple

$$\lim_{y\to b^-} \frac{f(y)}{2} = f\left(\frac{x+b}{2}\right) - \frac{f(x)}{2} \quad \text{pour} \quad x \in \,]a\,,b[\,.$$

Clairement,

$$]a\,,b[\, = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n\,,\beta_n],$$

où $\{\alpha_n\}$ est une suite décroissante de points de $]a\,,b[$ convergente vers a et $\{\beta_n\}$ est une suite croissante de points de cet intervalle convergente vers b. Donc pour $x \in \,]a\,,b[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [\alpha_n\,,\beta_n]$ pour tout $n \geqslant n_0$. Il s'ensuit que

$$f(x) = f(\alpha_n) + \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\,(x - \alpha_n)\,.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$f(x) = f(a^+) + \frac{f(b^-) - f(a^+)}{b - a}\,(x - a)\,.$$

I.6.12. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$x_1 = x \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$ et $f(x_n) = f(2x_{n+1} + 1) = f(x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $f(x) = f(x_n)$. On voit, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $f(x) = f(-1)$. Seules les fonctions constantes vérifient les hypothèses du problème.

I.6.13. On note que $g(x) = f(x) - \frac{a}{2}\,x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy (voir **I.6.1**), donc $g(x) = g(1)x$, ce qui donne

$$f(x) - \frac{a}{2}\,x^2 = \left(f(1) - \frac{a}{2}\right)x \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

I.6.14. Par hypothèse,

$$f(-1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \ldots = f(0).$$

De plus, pour $t \neq 0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$, on a

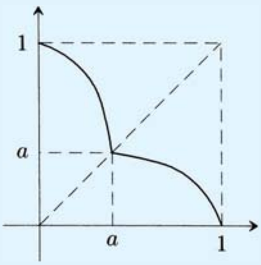
$$f(t) = f\left(\frac{t}{t+1}\right) = f\left(\frac{t}{2t+1}\right) = f\left(\frac{t}{3t+1}\right) = \ldots$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{nt+1} = 0$, la continuité de f en 0 implique $f(t) = 0$. Les seules solutions de l'équation sont donc les fonctions constantes.

I.6.15. Non. Il existe en fait une infinité de telles fonctions. Pour $a \in \left]0\,,1\right[$, soit g une transformation continue et strictement décroissante de $[0\,,a]$ sur $[a\,,1]$. La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in [0\,,a], \\ g^{-1}(x) & \text{pour } x \in \left]a\,,1\right], \end{cases}$$

où g^{-1} est l'application réciproque de g, vérifie la propriété donnée.



I.6.16. On suppose, contrairement à la proposition, qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|g(y_0)| = a > 1$. On pose $M = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0)| > \frac{M}{a}$. Par hypothèse,

$$\begin{aligned} |f(x_0+y_0)| + |f(x_0-y_0)| &\geqslant |f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)| \\ &= 2\,|f(x_0)|\,|g(y_0)| > 2\frac{M}{a}\,a = 2M. \end{aligned}$$

Donc, $|f(x_0+y_0)| > M$ ou $|f(x_0-y_0)| > M$, contradiction.

I.6.17. On note que $g(x) = f(x)e^{-x}$ vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. Il découle donc de **I.6.1** que $f(x) = axe^x$.

I.6.18. Par hypothèse $f(0) = 0$ et $f(2x) = (f(x))^2$. Par récurrence,

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \left(f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)^{2^2} = \ldots = \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

Donc,

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt[2^n]{f(x)}.$$

Si $f(x) > 0$, on obtient alors $0 = 1$ par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, contradiction. Seule la fonction identiquement nulle vérifie donc l'équation donnée.

I.6.19. En remplaçant x par $\frac{x-1}{x}$ dans

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \tag{1}$$

on a

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{2x-1}{x}. \tag{2}$$

En remplaçant alors x par $\frac{-1}{x-1}$ dans (1), on obtient

$$f\left(\frac{-1}{x-1}\right) + f(x) = \frac{x-2}{x-1}. \tag{3}$$

Additionner (1) et (3) et soustraire (2) à cette somme donne

$$2f(x) = 1 + x + \frac{x-2}{x-1} - \frac{2x-1}{x},$$

d'où

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}.$$

On vérifie facilement que cette fonction est bien solution de l'équation fonctionnelle donnée.

I.6.20. Pour x et y réels, on définit $\{x_n\}$ comme suit : $x_{2k-1} = x$ et $x_{2k} = y$, $k \in \mathbb{N}^*$. L'égalité $f(C\text{-}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = C\text{-}\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ implique alors

$$f\left(C\text{-}\lim_{n\to+\infty} \frac{nx+ny}{2n}\right) = C\text{-}\lim_{n\to+\infty} \frac{nf(x)+nf(y)}{2n},$$

ce qui signifie que f vérifie l'équation de Jensen $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Comme dans la solution de **I.6.11**, on peut montrer que

$$f\left(x + \frac{k}{2^n}(y-x)\right) = f(x) + \frac{k}{2^n}(f(y) - f(x)) \tag{$*$}$$

pour $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0\,,1]$, on peut trouver une suite $\left\{\frac{k_n}{2^n}\right\}$ convergente vers t. Puisque toute suite convergente est aussi convergente au sens de Cesàro (vers la même limite), la suite de terme général $x_n = x + \frac{k_n}{2^n}(y - x)$ converge au sens de Cesàro. D'après $(*)$, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x) + t(f(y) - f(x))$. En conséquence,

$$f(x + t(y - x)) = f(x) + t(f(y) - f(x)).$$

La fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$ d'après **I.2.33**. Combiné à **I.6.10**, ceci montre que $f(x) = ax + c$.

I.6.21. La fonction f est injective et $f(2x - f(x)) = x$ donc on obtient $f^{-1}(x) = 2x - f(x)$. Ainsi,

$$f(x) - x = x - f^{-1}(x). \tag{$*$}$$

Pour $x_0 \in [0\,,1]$, on définit la suite récurrente $\{x_n\}$ par $x_n = f(x_{n-1})$. L'égalité $(*)$ implique $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$. On a donc $x_n = x_0 + n(x_1 - x_0)$. Puisque $|x_n - x_0| \leqslant 1$, on a $|x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En conséquence, $f(x_0) = x_1 = x_0$.

I.6.22. On montre que les seules solutions continues de l'équation donnée sont les fonctions $f(x) = m(x - c)$. Si $g(x) = 2x - \frac{f(x)}{m}$, alors g est continue et

$$g(g(x)) = 2g(x) - x \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{i}$$

La fonction g est donc injective : si $g(x_1) = g(x_2)$, alors $g(g(x_1)) = g(g(x_2))$, ce qui donne $x_1 = x_2$. D'après le résultat de **I.3.16**, g est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On montre que l'on se trouve ici dans le premier cas. D'après (i),

$$g(g(x)) - g(x) = g(x) - x \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{ii}$$

Si g est strictement décroissante, on a alors $g(x_1) > g(x_2)$ pour $x_1 < x_2$ et, en conséquence, $g(g(x_1)) < g(g(x_2))$. D'autre part, (ii) donne

$$g(g(x_1)) - g(x_1) = g(x_1) - x_1, \quad g(g(x_2)) - g(x_2) = g(x_2) - x_2,$$

contradiction.

Par récurrence, l'égalité (i) implique

$$g^n(x) = ng(x) - (n-1)x \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1,$$

où g^n représente la n-ième itération de g. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g^n(x)}{n} = g(x) - x$. De plus,

$$g^n(x) - g^n(0) = n(g(x) - x - g(0)) + x. \tag{iii}$$

On a alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la monotonie de g,

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant x + g(0) \quad \text{pour} \quad x < 0, \\ g(x) &\geqslant x + g(0) \quad \text{pour} \quad x > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ce qui implique $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La fonction réciproque g^{-1} est donc définie sur $\mathbb{R}$. En remplaçant dans (i) x par $g^{-1}(g^{-1}(y))$, on voit que $g^{-1}(g^{-1}(y)) = 2g^{-1}(y) - y$. Puisque g^{-1} vérifie (i), on peut prouver par la même méthode que

$$g^{-n}(y) - g^{-n}(0) = n\left(g^{-1}(y) - y - g^{-1}(0)\right) + y.$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient (comme précédemment)

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) &\leqslant y + g^{-1}(0) \quad \text{pour} \quad y < 0, \\ g^{-1}(y) &\geqslant y + g^{-1}(0) \quad \text{pour} \quad y > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

On prouve maintenant que $g^{-1}(0) = -g(0)$. En remplaçant x par $g^{-1}(y)$ dans (ii), on obtient

$$g(y) - y = y - g^{-1}(y),$$

ce qui donne $g^{-1}(0) = -g(0)$.

On suppose, par exemple, que $g(0) \geqslant 0$. Alors, $g(x) > 0$ pour $x > 0$. En prenant $y = g(x) > 0$ dans (2), on voit que $x \geqslant g(x) + g^{-1}(0) = g(x) - g(0)$. Donc, d'après (1), on obtient $g(x) = x + g(0)$ pour $x > 0$. Puisque $g^{-1}(0) \leqslant 0$, on a $g^{-1}(y) < 0$ pour $y < 0$ et, comme ci-dessus, on prouve que $g^{-1}(y) = y + g^{-1}(0)$, ce qui signifie que $g(x) = x + g(0)$ pour $x < 0$. Donc, $g(x) = x + g(0)$ ou, de façon équivalente, $f(x) = m(x - g(0))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

I.6.23. On vérifie facilement que les fonctions données remplissent les conditions du problème. On montre qu'il n'y a pas d'autres solutions. Si on prend $x = 0$ dans l'équation

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(x)f(y) \tag{1}$$

et y tel que $f(y) \neq 0$, on obtient $f(0) = 1$. En prenant $y = 0$ dans (1), on voit que $f(x) = f(-x)$ et la fonction f est paire. Puisque f est continue et $f(0) = 1$, il existe un intervalle $[0\,, c]$ sur lequel la fonction est strictement positive. On considère deux cas : $f(c) \leqslant 1$ et $f(c) > 1$. Dans le premier cas, il existe θ, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, tel que $f(c) = \cos\theta$. On réécrit alors (1) sous la forme

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(y-x).$$

Une application de cette équation en prenant $x = c$, $y = c$ et $x = c$, $y = 2c$ donne respectivement $f(2c) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ et $f(3c) = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta$. On montre par récurrence que $f(nc) = \cos n\theta$. En appliquant maintenant (1) à $x = y = \frac{c}{2}$, on a

$$\left(f\left(\frac{c}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(0) + f(c)}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Puisque $f\left(\frac{c}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sont strictement positifs, la dernière égalité implique $f\left(\frac{c}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et, par récurrence, $f\left(\frac{c}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si on part de l'égalité $f(nc) = \cos n\theta$ et que l'on répète le procédé ci-dessus, on obtient

$$f\left(\frac{mc}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{m\theta}{2^n}\right) \quad \text{pour} \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $f(cx) = \cos\theta x$ pour $x = \frac{m}{2^n}$. Puisque l'ensemble des nombres de la forme $\frac{m}{2^n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}_+^*$, la continuité de f implique $f(cx) = \cos\theta x$ pour $x > 0$. La fonction f étant paire, l'égalité est encore vraie pour $x < 0$. Finalement, $f(x) = \cos ax$, avec $a = \frac{\theta}{c}$.

Dans le cas où $f(c) > 1$, il existe θ tel que $f(c) = \operatorname{ch}\theta$. On raisonne comme précédemment pour montrer que $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$.

I.6.24. Si on pose $x = \operatorname{th} u$ et $y = \operatorname{th} v$, alors

$$\frac{x + y}{1 + xy} = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v} = \operatorname{th}(u + v).$$

La fonction $g(u) = f(\operatorname{th} u)$ vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy (voir **I.6.1**) et est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, $g(u) = au$ et $f(x) = \frac{1}{2}a\ln\frac{1+x}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

I.6.25. On suppose que P n'est pas identiquement nul et vérifie l'équation donnée. On pose $Q(x) = P(1 - x)$. On a $Q(1 - x) = P(x)$ et l'équation peut donc s'écrire $Q\left((1 - x)^2\right) = (Q(1 - x))^2$ ou

$$Q\left(x^2\right) = (Q(x))^2 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Si Q n'est pas réduit à un monôme, il est de la forme $Q(x) = ax^k + x^m R(x)$, où $a \neq 0$, $m > k \geqslant 0$ et R est un polynôme tel que $R(0) \neq 0$. Pour un tel Q, d'après (1),

$$ax^{2k} + x^{2m} R\left(x^2\right) = a^2 x^{2k} + 2ax^{k+m} R(x) + x^{2m} R^2(x).$$

En égalant les termes de même degré, on conclut que $Q(x) = ax^k$, $a \neq 0$ et finalement que $a = 1$. En conséquence, $P(x) = (1-x)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Clairement, la fonction identiquement nulle vérifie aussi l'équation.

I.6.26. [S. Kotz, *Amer. Math. Monthly* 72 (1965), 1072-1075]. Pour alléger les notations, on écrit $f^m(x_i)$ à la place de $(f(x_i))^m$. Si dans l'équation

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^m(x_i) \tag{1}$$

on prend $x_i = c$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient

$$f\left(c^m\right) = f^m(c). \tag{2}$$

En particulier, $f(1) = f^m(1)$, ce qui implique $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$ dans le cas où m est impair. De même, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, $f(0) = -1$ si m est impair. En prenant dans (2) $c = x^{\frac{1}{m}}$, $x \geqslant 0$, on obtient

$$f\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = f^{\frac{1}{m}}(x).$$

En remplaçant x par $x_i^{\frac{1}{m}}$ dans (1) et en utilisant la dernière égalité, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^m\left(x_i^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{3}$$

En particulier, pour $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \frac{n-2}{n}f(0).$$

Si dans (1) on prend $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ et si on remplace x_1 par $x_1 + x_2$, on obtient

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x_1+x_2) + \frac{n-1}{n}f(0).$$

D'où,

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) - f(0).$$

La fonction $g(x) = f(x) - f(0)$ vérifie donc l'équation fonctionnelle de Cauchy et est continue en au moins un point. D'après le résultat de **I.6.2**, $g(x) = ax$ pour $x \geqslant 0$. Donc,

$$f(x) = ax + b, \quad \text{où} \quad a = f(1) - f(0),\ b = f(0).$$

De ce qui précède, on déduit que $b = 0$ ou $b = 1$ ou $b = -1$ si m est impair. Les seules valeurs possibles de a sont donc -2, -1, 0, 1 ou 2. On vérifie facilement que

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 1, \quad f(x) = x$$

et, si m est impair,

$$f(x) = -1, \quad f(x) = -x$$

sont les seules solutions.

I.6.27. Si f vérifie la condition donnée, on a alors

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f\left(\left(ab^{-1}z + z\right)\left(z^{-1}b\right)\right) = f\left(ab^{-1}z + z\right) f\left(z^{-1}b\right) \\ &= \left(f\left(ab^{-1}z\right) + f(z)\right) f\left(z^{-1}b\right) = f(a) + f(b) \end{aligned}$$

pour tous réels a et b, $b \neq 0$. Donc, $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$. De plus, $f(n) = nf(1)$ pour tout entier n. Si f n'est pas identiquement nulle, il existe alors c tel que $f(c) \neq 0$. Mais $f(c) = f(1)f(c)$ et $f(1) = 1$. Si $x \neq 0$, alors $1 = f(x)f\left(x^{-1}\right)$ et $0 \neq f(x) = \left(f\left(x^{-1}\right)\right)^{-1}$. Il s'ensuit que, pour des entiers p et $q \neq 0$,

$$f\left(pq^{-1}\right) = f(p)f\left(q^{-1}\right) = f(p)(f(q))^{-1} = pq^{-1}.$$

On note que l'on a $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 > 0$ pour $x > 0$. Donc, si $y - x > 0$, alors $f(y-x) = f(y) - f(x) > 0$, ce qui signifie que f est strictement croissante et $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$. Il s'ensuit que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (d'après **I.6.2**).

I.6.28. Une fonction f de la forme

$$f(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right), \tag{$*$}$$

où g est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^*$, vérifie l'équation fonctionnelle donnée. D'autre part, si f vérifie l'équation donnée, alors

$$f(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

ce qui signifie que f est de la forme $(*)$.

I.6.29. On remarque que si f vérifie l'équation fonctionnelle donnée et si on pose

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

les fonctions g et h ont les propriétés suivantes :

$$g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \tag{i}$$

et

$$h(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right), \quad h(x) + h\left(x^2\right) = 0, \quad h(-x) = h(x). \tag{ii}$$

On note maintenant que si g et h vérifient (i) et (ii), alors $f = g + h$ vérifie l'équation fonctionnelle donnée. Notre but est donc de trouver les fonctions g et h. Comme dans la solution du problème précédent, on peut montrer que toute fonction vérifiant (i) est de la forme

$$g(x) = k(x) + k\left(\frac{1}{x}\right),$$

où k est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour trouver les fonctions h, on observe d'abord que (ii) implique $h(1) = 0$. Puis, pour $x > 1$, on pose $h(x) = s(\ln\ln x)$ et s vérifie l'équation fonctionnelle

$$s(\ln\ln x) + s(\ln(2\ln x)) = 0$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$s(t) + s(\ln 2 + t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ceci signifie que l'on peut choisir toute fonction s telle que $s(t) = -s(\ln 2 + t)$ (notez que s est périodique de période $2\ln 2$). Il existe une infinité de telles fonctions, par exemple, $s(t) = \cos\frac{\pi t}{\ln 2}$. On prolonge ensuite la fonction h sur $]0\,,1[$ en posant $h(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right)$, puis sur $\mathbb{R}^*_-$ en posant $h(-x) = h(x)$.

I.6.30. [S. Haruki, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), 577-578]. Si on remplace dans l'équation donnée x par $x + y$ et y par $x - y$, on obtient

$$\frac{f(x+y) - g(x-y)}{2y} = \varphi(x). \tag{1}$$

Si on remplace maintenant y par $-y$ dans (1), on a

$$\frac{f(x-y) - g(x+y)}{-2y} = \varphi(x).$$

En conséquence, pour $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(u+v)+\varphi(u-v) &= \frac{1}{2y}\left(f(u+v+y)-g(u+v-y)\right.\\ &\qquad \left.+f(u-v+y)-g(u-v-y)\right)\\ &= \frac{1}{2y}\left(f(u+v+y)-g(u-v-y)\right)\\ &\qquad +\frac{1}{2y}\left(f(u-(v-y))-g(u+(v-y))\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=\frac{1}{2y}\left(2(v+y)\varphi(u)-2(v-y)\varphi(u)\right)=2\varphi(u).$$

Si on pose $s=u+v$ et $t=u-v$, ceci peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\varphi(s)+\varphi(t)}{2}=\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right),\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

On note $A\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $A(s)=\varphi(s)-\varphi(0)$. On a alors $A(0)=0$ et

$$\begin{aligned}A(s)+A(t) &= \varphi(s)+\varphi(t)-2\varphi(0)\\ &= 2\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right)-2\varphi(0)\\ &= 2A\left(\frac{s+t}{2}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

Prendre $t=0$ donne $A(s)=2A\left(\frac{s}{2}\right)$. En remplaçant ensuite s par $s+t$, on obtient

$$A(s+t)=2A\left(\frac{s+t}{2}\right).$$

Ceci et (2) impliquent

$$A(s+t)=A(s)+A(t).\tag{3}$$

L'équation (1) peut donc se réécrire sous la forme

$$\frac{f(x+y)-g(x-y)}{2y}=B+A(x),\tag{4}$$

où $B=\varphi(0)$ et $x\mapsto A(x)$ est une fonction vérifiant (3). Si on prend dans (4) $y=x$ et $y=-x$, on obtient alors respectivement

$$f(2x)=g(0)+2Bx+2xA(x)\quad\text{et}\quad g(2x)=f(0)+2Bx+2xA(x).$$

En remplaçant $2x$ par x et en utilisant le fait que $A(s) = 2A\left(\frac{s}{2}\right)$, on a

$$f(x) = g(0) + 2Bx + \frac{1}{2}\,xA(x), \quad g(x) = f(0) + 2Bx + \frac{1}{2}\,xA(x).$$

En substituant ces relations dans (1) et en appliquant (3), on arrive à

$$\frac{g(0) - f(0) + 2By + xA(y) + yA(x)}{2y} = \varphi(x)$$

et en prenant $x = 1$, on trouve

$$A(y) = dy + f(0) - g(0), \quad \text{où} \quad d = 2\varphi(1) - A(1) - 2B.$$

Puisque $A(0) = 0$, on a $f(0) = g(0)$, d'où $A(x) = dx$ et

$$f(x) = g(x) = f(0) + Bx + \frac{1}{2}\,dx^2.$$

On vérifie que $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c$ et $\varphi(x) = f'(x) = 2ax + b$ vérifient l'équation fonctionnelle donnée.

I.6.31. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Une *base de Hamel* de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$ est une famille libre maximale. Il existe une base de Hamel $\mathbf{H}$ contenant 1. Tout $x \in \mathbb{R}$ peut donc s'écrire de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{h \in \mathbf{H}} w_h(x)h,$$

où seul un nombre fini de coefficients $w_h(x) \in \mathbb{Q}$ sont non nuls. Donc, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = \sum_{h \in \mathbf{H}} w_h(x+y)h = \sum_{h \in \mathbf{H}} (w_h(x) + w_h(y))h,$$

ce qui implique $w_h(x+y) = w_h(x) + w_h(y)$. En particulier, $f = w_1$ vérifie (a). On montre qu'elle vérifie aussi les autres conditions.

On note que $w_1(1) = 1$ car $1 = 1 \times 1$ et $1 \in \mathbf{H}$. On montre maintenant que $w_1(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$. Par additivité de w_1, on a

$$1 = w_1(1) = w_1\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) = qw_1\left(\frac{1}{q}\right).$$

Donc,

$$w_1\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}.$$

Il s'ensuit, par additivité encore, que

$$w_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \quad \text{pour} \quad p, q \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, $w_1(0) = 0$ car $0 = 0 \times 1$ et $1 \in \mathbf{H}$. Donc,

$$0 = w_1(0) = w_1\left(\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right)\right) = w_1\left(\frac{p}{q}\right) + w_1\left(-\frac{p}{q}\right)$$

ou, dit autrement,

$$w_1\left(-\frac{p}{q}\right) = -\frac{p}{q}.$$

On a donc prouvé que $w_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Finalement, on montre que w_1 n'est pas continue. Si elle l'était, on aurait $w_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui contredirait le fait que w_1 ne prend que des valeurs rationnelles.

I.7. Fonctions continues sur un espace métrique

I.7.1. On montre d'abord que (a) $\Longrightarrow$ (b). Soit $\mathbf{F}$ un sous-ensemble fermé de $\mathbf{Y}$. Si une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $f^{-1}(\mathbf{F})$ converge vers x, alors $f(x_n) \in \mathbf{F}$ et, par continuité de f, $f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Puisque $\mathbf{F}$ est fermé, $f(x) \in \mathbf{F}$ ou, dit autrement, $x \in f^{-1}(\mathbf{F})$. On a donc prouvé que $f^{-1}(\mathbf{F})$ est fermé.

Pour prouver que (b) $\Longrightarrow$ (c), il suffit de noter que tout sous-ensemble ouvert $\mathbf{G}$ de $\mathbf{Y}$ est le complémentaire d'un sous-ensemble fermé $\mathbf{F}$, autrement dit, $\mathbf{G} = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{F}$. On a alors $f^{-1}(\mathbf{G}) = \mathbf{X} \setminus f^{-1}(\mathbf{F})$.

On prouve maintenant que (c) $\Longrightarrow$ (a). Soit $x_0 \in \mathbf{X}$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, l'ensemble $f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$ est ouvert dans $\mathbf{X}$. Puisque x_0 est un élément de $f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$. On a donc $f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon)$, ce qui signifie que f est continue en x_0.

On a donc prouvé que les trois premières conditions sont équivalentes.

On prouve maintenant que (a) $\Longrightarrow$ (d). Pour cela, on considère $y_0 \in f\left(\overline{\mathbf{A}}\right)$. Par définition de l'image d'un ensemble par f, il existe $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Par continuité de f en x_0, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une boule $\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)$ telle que

$$f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(y_0, \varepsilon).$$

Puisque $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$, on voit que $\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$. Donc,

$$\varnothing \neq f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(y_0, \varepsilon) \cap f(\mathbf{A}),$$

ce qui signifie que $y_0 \in \overline{f(\mathbf{A})}$.

Pour montrer que (d) $\Longrightarrow$ (e), on pose $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{B})$. On a alors

$$f\left(\overline{f^{-1}(\mathbf{B})}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(\mathbf{B})\right)} \subset \overline{\mathbf{B}}.$$

Donc, $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}}\right)$.

Pour conclure la démonstration, on montre que (e) $\Longrightarrow$ (b). Si $\mathbf{F}$ est fermé, alors $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$. D'après (e),

$$\overline{f^{-1}(\mathbf{F})} \subset f^{-1}(\mathbf{F}),$$

ce qui signifie que $f^{-1}(\mathbf{F})$ est fermé.

I.7.2. Soit $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ la famille des sous-ensembles boréliens de $\mathbf{X}$, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre[(4)] des sous-ensembles de $\mathbf{X}$ contenant tous les ensembles ouverts. On note $\widetilde{\mathcal{B}}$ la famille des ensembles $\mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ tels que $f^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$. $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une σ-algèbre de sous-ensembles de $\mathbf{Y}$. Puisque f est continue, le problème précédent implique que l'image réciproque de tout ensemble ouvert est un ensemble ouvert. $\widetilde{\mathcal{B}}$ contient donc tous les sous-ensembles ouverts de $\mathbf{Y}$, d'où $\mathcal{B}(\mathbf{Y}) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$. Ceci implique $f^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ si $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{Y})$.

I.7.3. On considère $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. On définit $f(x) = \sin \pi x$ et $\mathbf{F} = \left\{n + \frac{1}{n} : n \geqslant 2\right\}$. $\mathbf{F}$ est fermé dans l'espace métrique $\mathbf{X}$ car il ne contient que des points isolés. D'autre part,

$$f(\mathbf{F}) = \left\{\sin \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

n'est pas fermé car il ne contient pas 0 qui est son point d'accumulation.

On considère de nouveau $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ définis comme précédemment et on définit $f(x) = x\,(x - 2)^2$ et $\mathbf{G} =]1\,,3[$. On a alors $f(\mathbf{G}) = [0\,,3[$.

I.7.4. Si $y_n \in f(\mathbf{F})$, alors $y_n = f(x_n)$, où $x_n \in \mathbf{F}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathbf{F}$ est compact dans $\mathbf{X}$, il existe alors une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ convergente vers $x \in \mathbf{F}$. Par continuité de f, $\{y_{n_k}\}$ définie par $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ est une sous-suite de $\{y_n\}$ convergente vers $f(x) \in f(\mathbf{F})$. La compacité de $f(\mathbf{F})$ est donc prouvée.

I.7.5. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{F}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_m$ convergente vers x. Il existe au moins un ensemble $\mathbf{F}_i$ contenant une sous-suite $\{x_{n_k}\}$. La suite $\{x_n\}$ peut se décomposer en un nombre fini de sous-suites de sorte que chaque sous-suite soit contenue dans un ensemble $\mathbf{F}_i$. Puisque $\mathbf{F}_i$ est fermé et que f est continue sur $\mathbf{F}_i$, $\lim f(x_{n_k}) = \lim f_{|\mathbf{F}_i}(x_{n_k}) = f_{|\mathbf{F}_i}(x) = f(x)$. Il s'ensuit que $\{f(x_n)\}$ se décompose en un nombre fini de sous-suites convergentes vers $f(x)$, ce qui signifie que $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x)$.

(4) Une collection non vide de sous-ensembles d'un ensemble est une *σ-algèbre* si elle contient le complémentaire de chacun de ses éléments et si elle contient toute union dénombrable de certains de ses éléments. (N.d.T.)

Pour voir que la proposition est fausse dans le cas d'une infinité d'ensembles, on considère les ensembles $\mathbf{F}_i$ définis comme suit : $\mathbf{F}_0 = \{0\}$, $\mathbf{F}_i = \{\frac{1}{i}\}$, $i \in \mathbb{N}^*$. La fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \mathbf{F}_i \ (i \in \mathbb{N}^*), \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbf{F}_0 \end{cases}$$

est continue sur chaque $\mathbf{F}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ mais n'est pas continue sur l'ensemble $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbf{F}_i$.

I.7.6. Soit $x_0 \in \bigcup\limits_{t \in \mathbf{T}} \mathbf{G}_t$. Il existe $t_0 \in \mathbf{T}$ tel que $x_0 \in \mathbf{G}_{t_0}$. Puisque $\mathbf{G}_{t_0}$ est ouvert et que la restriction de f à $\mathbf{G}_{t_0}$ est continue, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) = f_{|\mathbf{G}_{t_0}}(x) \in \mathbf{B}\left(f_{|\mathbf{G}_{t_0}}(x_0), \varepsilon\right) = \mathbf{B}\left(f(x_0), \varepsilon\right)$ si $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \subset \mathbf{G}_{t_0}$, ce qui signifie que f est continue en x_0.

I.7.7. On suppose que $f_{|\mathbf{A}}$ est continue pour tout compact $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Si une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{X}$ converge vers x, l'ensemble $\mathbf{A} = \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ est alors compact dans $\mathbf{X}$. D'où,

$$\lim f(x_n) = \lim f_{|\mathbf{A}}(x_n) = f_{|\mathbf{A}}(x) = f(x).$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbf{X}$. L'autre implication est évidente.

I.7.8. La continuité de f^{-1} est équivalente à la condition que $f(\mathbf{G})$ est ouvert dans $\mathbf{Y}$ pour tout ouvert $\mathbf{G}$ de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{G}$ est ouvert dans $\mathbf{X}$, alors $\mathbf{G}^c = \mathbf{X} \setminus \mathbf{G}$ est compact comme sous-ensemble fermé de l'espace compact $\mathbf{X}$. D'après le résultat de **I.7.4**, $f(\mathbf{G}^c) = \mathbf{Y} \setminus f(\mathbf{G})$ est aussi compact, donc fermé. Ceci signifie que $f(\mathbf{G})$ est ouvert.

Pour montrer que la compacité est essentielle, on considère la fonction $f\colon\ ]0\,,1[\ \cup \{2\} \longrightarrow\ ]0\,,1]$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in\ ]0\,,1[$ et $f(2) = 1$. Clairement, f est une bijection continue de $]0\,,1[\ \cup \{2\}$ sur $]0\,,1]$. Puisque $f^{-1}(x) = x$ pour $x \in\ ]0\,,1[$ et $f^{-1}(1) = 2$, la fonction réciproque n'est pas continue sur $]0\,,1]$.

I.7.9. Soit d_1 et d_2 les distances respectives sur $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Par continuité de f, étant donné $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{X}$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$d_1(x, y) < \delta(x) \quad \text{implique} \quad d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Puisque la famille des boules $\left\{\mathbf{B}\left(x, \frac{1}{2}\,\delta(x)\right) : x \in \mathbf{X}\right\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact $\mathbf{X}$, il existe un sous-recouvrement

$$\left\{\mathbf{B}\left(x_i, \frac{1}{2}\,\delta(x_i)\right) : i = 1, 2, \ldots, n\right\}. \tag{2}$$

On pose $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_n)\}$ et on prend x et y dans $\mathbf{X}$ de sorte que $d_1(x,y) < \delta$. Puisque la famille (2) est un recouvrement de $\mathbf{X}$, il existe un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_1(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta(x_i)$. On a alors

$$d_1(y, x_i) < d_1(x, y) + d_1(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \leqslant \delta(x_i).$$

En conséquence, d'après (1),

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \varepsilon.$$

I.7.10. Pour $x_0, x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{A}$, on a

$$\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, y).$$

Donc, $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leqslant d(x, x_0) + \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A})$. D'où,

$$\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A}) \leqslant d(x, x_0).$$

De même, $\operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leqslant d(x, x_0)$ et, en conséquence,

$$|\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A})| \leqslant d(x, x_0),$$

ce qui implique que f est uniformément continue sur $\mathbf{X}$.

I.7.11. Si l'ensemble $f(\mathbf{X})$ n'est pas connexe, il existe alors des ensembles $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ non vides, ouverts et disjoints tels que $\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2 = f(\mathbf{X})$. La continuité de f implique que les ensembles $f^{-1}(\mathbf{G}_i)$, $i = 1, 2$, sont ouverts. Clairement, ils sont non vides et disjoints et leur union est $\mathbf{X}$, contradiction.

I.7.12. Soit d_1 et d_2 les distances respectives sur $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. On suppose que f est continue en $x_0 \in \mathbf{A}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $f(x) \in \mathbf{B}(f(x_0), \varepsilon/2)$ dès que $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}$. Donc, $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour $x, y \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}$. Il s'ensuit que $o_f(x_0) = 0$. Réciproquement, si $o_f(x_0) = 0$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$0 < \delta < \delta_\varepsilon \quad \text{implique} \quad \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) < \varepsilon.$$

Donc, $d_1(x, x_0) < \delta$ implique

$$d_2(f(x), f(x_0)) \leqslant \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) < \varepsilon.$$

I.7.13. On pose $\mathbf{B} = \left\{x \in \overline{\mathbf{A}} : o_f(x) \geqslant \varepsilon\right\}$. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de $\mathbf{B}$ convergente vers x_0. Puisque $\mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$ et $o_f(x_0)$ est bien défini. De plus, pour tout $\delta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{B}(x_n, \delta/2) \subset \mathbf{B}(x_0, \delta)$. D'où,

$$\operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) \geqslant \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_n, \delta/2))) \geqslant o_f(x_n) \geqslant \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $o_f(x_0) \geqslant \varepsilon$ ou, dit autrement, $x_0 \in \mathbf{B}$.

I.7.14. D'après le résultat de **I.7.12**, l'ensemble $\mathbf{C}$ des points de continuité de f est égal à l'ensemble sur lequel l'oscillation s'annule. On pose

$$\mathbf{B}_n = \left\{x \in \mathbf{X} : o_f(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

On déduit du problème précédent que les $\mathbf{B}_n$ sont ouverts dans $\mathbf{X}$. D'autre part,

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{B}_n,$$

autrement dit, l'ensemble des points de continuité de f est du type $\mathcal{G}_\delta$. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ des points de discontinuité de f est du type $\mathcal{F}_\sigma$ dans $\mathbf{X}$.

I.7.15. Considérez la fonction définie par (comparez avec **I.2.3(a)**)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

I.7.16. [S.S. Kim, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999), 258-259]. Soit $\mathbf{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de type $\mathcal{F}_\sigma$, autrement dit,

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n,$$

où les $\mathbf{F}_n$ sont fermés. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{F}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, il suffit de remplacer $\mathbf{F}_n$ par $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_n$. Si $\mathbf{A} = \mathbb{R}$, alors par exemple, $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ est discontinue en tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{A} \neq \mathbb{R}$, on définit alors la fonction g par

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in \mathbf{K}} \frac{1}{2^n} & \text{si } x \in \mathbf{A}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{A} \end{cases}$$

avec $\mathbf{K} = \{n : x \in \mathbf{F}_n\}$ et on pose

$$f(x) = g(x)\left(\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2}\right).$$

On prouve d'abord que tout point de $\mathbf{A}$ est un point de discontinuité de f. En effet, si $x \in \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, tout voisinage de x contient alors un point où le signe de f est différent de celui de $f(x)$. Si $x \in \partial\mathbf{A} \cap \mathbf{A}$, alors $f(x) \neq 0$ et tout voisinage de x contient un point où f s'annule. Puisque $\mathbf{A} = \overset{\circ}{\mathbf{A}} \cup (\partial\mathbf{A} \cap \mathbf{A})$, la fonction f est discontinue sur $\mathbf{A}$. Notre but est maintenant de montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{A}$. On a $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{A}$. Si une suite $\{x_k\}$ converge vers x et $x_k \in \mathbf{A}$, pour tout n, il existe alors un k_n tel que $x_k \notin \mathbf{F}_n$ pour $k \geqslant k_n$ (s'il y a une infinité de x_k dans un $\mathbf{F}_n$, alors x appartient aussi à $\mathbf{F}_n$). Donc, pour $k \geqslant k_n$, on a

$$g(x_k) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{2^n},$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{k\to+\infty} g(x_k) = 0 = g(x)$.

I.7.17. Non. Toute fonction définie sur un espace métrique discret est continue.

I.7.18. On suppose d'abord que $x \in \partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$. Puisque chaque boule $\mathbf{B}(x,\delta)$ contient des points de $\mathbf{A}$ et des points de $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$, on obtient $o_{\chi_\mathbf{A}}(x) = 1$. On suppose maintenant que $o_{\chi_\mathbf{A}}(x) > 0$. Ceci signifie que pour tout $\delta > 0$,

$$\sup\{|\chi_\mathbf{A}(x) - \chi_\mathbf{A}(y)| : y \in \mathbf{B}(x,\delta)\} = o_{\chi_\mathbf{A}}(x,\delta) > 0.$$

Donc, toute boule $\mathbf{B}(x,\delta)$ doit contenir des points de $\mathbf{A}$ et des points de $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ et $x \in \partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$.

Clairement, si $\mathbf{A}$ est ouvert et fermé, alors $\partial\mathbf{A} = \varnothing$. Donc, d'après **I.7.12**, $\chi_\mathbf{A}$ est continue sur $\mathbf{X}$. Réciproquement, si $\chi_\mathbf{A}$ est continue sur $\mathbf{X}$, alors $\partial\mathbf{A} = \varnothing$. On montre maintenant que $\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$. Si ce n'est pas le cas, il existe alors $x \in \overline{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{A} \subset \mathbf{X} \setminus \mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$, contradiction. On montre de la même manière que $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ est aussi fermé.

I.7.19. Pour $x \in \mathbf{A}$ et $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} o_f(x,\delta) &= \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in \mathbf{B}(x,\delta)\} \\ &\leqslant \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x,\delta)\} \\ &\quad + \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in (\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}) \cap \mathbf{B}(x,\delta)\}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
o_f(x,\delta) \leqslant \sup\{&d_2(g_1(x),g_1(y)) : y \in \mathbf{A}\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&+ \sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y \in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leqslant o_{g_1}(x,\delta) + \sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y \in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leqslant o_{g_1}(x,\delta) + \sup\{d_2(g_1(x),g_2(x))\\
&\quad + d_2(g_2(x),g_2(y)) : y \in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leqslant o_{g_1}(x,\delta) + d_2(g_1(x),g_2(x)) + o_{g_2}(x,\delta).
\end{aligned}$$

Puisque g_1 et g_2 sont continues, on obtient, d'après **I.7.12**,

$$o_f(x) \leqslant d_2(g_1(x),g_2(x)). \tag{1}$$

Notre but est maintenant de montrer que

$$o_f(x) \geqslant d_2(g_1(x),g_2(x)) \quad \text{pour } x \in \mathbf{A}. \tag{2}$$

Soit $\{\delta_n\}$ une suite de réels strictement positifs convergente vers 0. Puisque $\mathring{\mathbf{A}} = \varnothing$, l'ensemble $\mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$ est dense dans $\mathbf{X}$ et chaque boule $\mathbf{B}(x,\delta_n)$ contient un point y_n de $\mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sup\{d_2(f(x),f(y)) : y \in \mathbf{B}(x,\delta_n)\}&\\
&\geqslant \sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y \in \mathbf{B}(x,\delta_n)\cap(\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\}\\
&\geqslant d_2(g_1(x),g_2(y_n)).
\end{aligned}$$

Ceci, combiné à la continuité de g_2, implique

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{d_2(f(x),f(y)) : y \in \mathbf{B}(x,\delta_n)\} \geqslant d_2(g_1(x),g_2(x)),$$

ce qui donne (2). Les inégalités (1) et (2) impliquent que l'égalité cherchée est vérifiée pour tout $x \in \mathbf{A}$. De la même façon (en utilisant la densité de $\mathbf{A}$), on peut prouver que l'égalité est aussi vérifiée pour $x \in \mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$.

I.7.20. On suppose que $\{f_n\}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbf{X}$ telle que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\mathbf{P}_m(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{X} : |f(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon\}$$

et $\mathbf{G}(\varepsilon) = \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\widehat{\mathbf{P}_m(\varepsilon)}}$. On montre que $\mathbf{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}(1/n)$ est l'ensemble des points de continuité de f. On prouve d'abord que $x_0 \in \mathbf{C}$ si f est continue en x_0. Puisque $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, il existe m tel que

$$|f(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

La continuité de f et f_m en x_0 implique qu'il existe une boule $\mathbf{B}(x_0, \delta)$ telle que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_m(x) - f_m(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$. Donc, $|f(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ si $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$. Ceci signifie que $x_0 \in \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{P}_m(\varepsilon)}} \subset \mathbf{G}(\varepsilon)$. Puisque l'on peut choisir arbitrairement $\varepsilon > 0$, on voit que $x_0 \in \mathbf{C}$.

Si maintenant

$$x_0 \in \mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}(1/n),$$

alors $x_0 \in \mathbf{G}(\varepsilon/3)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $m > 0$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{P}_m(\varepsilon/3)}}$. En conséquence, il existe une boule $\mathbf{B}(x_0, \delta)$ telle que

$$|f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

si $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$. Puisque f_m est continue, ceci montre que f est continue en x_0. Notre but est maintenant de prouver que $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ est un ensemble de première catégorie. On définit pour cela

$$\mathbf{F}_m(\varepsilon) = \left\{x \in \mathbf{X} : |f_m(x) - f_{m+k}(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

La continuité de f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ implique que $\mathbf{F}_m(\varepsilon)$ est fermé. On voit que $\mathbf{X} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathbf{F}_m(\varepsilon)$ et $\mathbf{F}_m(\varepsilon) \subset \mathbf{P}_m(\varepsilon)$ car $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ pour $x \in \mathbf{X}$. Donc,

$$\bigcup_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F}_m(\varepsilon)}} \subset \mathbf{G}(\varepsilon).$$

On remarque alors que pour tout $\mathbf{F} \subset \mathbf{X}$, l'intérieur de $\mathbf{F} \setminus \overset{\circ}{\mathbf{F}}$ est vide car $\overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F} \setminus \overset{\circ}{\mathbf{F}}}} \subset \overset{\circ}{\mathbf{F}} \setminus \overset{\circ}{\overset{\frown}{\mathbf{F}}} = \varnothing$. De plus, si $\mathbf{F}$ est fermé, alors $\mathbf{F} \setminus \overset{\circ}{\mathbf{F}}$ est fermé, donc nulle part dense. Puisque

$$\mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F}_m(\varepsilon)}} \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left(\mathbf{F}_m(\varepsilon) \setminus \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F}_m(\varepsilon)}}\right),$$

l'ensemble $\mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F}_m(\varepsilon)}}$ est de première catégorie. De plus, l'ensemble $\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(\varepsilon)$ est aussi de première catégorie car $\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(\varepsilon) \subset \mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\overparen{\mathbf{F}_m(\varepsilon)}}$. Finalement, on observe que

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{C} = \mathbf{X} \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{G}(1/n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/n)) .$$

L'ensemble $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ des points de discontinuité de f est donc de première catégorie.

I.7.21. On utilise les notations de la solution du problème précédent. On a

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/k) \subset \mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{F}_m(1/k)}} \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left(\mathbf{F}_m(1/k) \setminus \overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{F}_m(1/k)}} \right),$$

d'où

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/k)) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left(\mathbf{F}_m(1/k) \setminus \overset{\circ}{\overbrace{\mathbf{F}_m(1/k)}} \right).$$

L'ensemble $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ est donc un sous-ensemble de l'union d'une famille dénombrable d'ensembles fermés et nulle part denses (leurs complémentaires sont ouverts et denses dans $\mathbf{X}$). Il s'ensuit que $\mathbf{C}$ contient une intersection dénombrable d'ensembles ouverts et denses. D'après le théorème de Baire, $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathbf{X}$.

I.7.22. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\mathbf{F}_k = \{0\} \cup \bigcap_{n \geqslant k} \left\{ x > 0 : \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque f est continue, ces ensembles sont fermés (voir **I.7.1**). Par hypothèse, $\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{F}_k = \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de Baire, au moins un des ensembles $\mathbf{F}_k$ est d'intérieur non vide. Il existe donc $a > 0$, $\delta > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $]a - \delta\, , a + \delta[\subset \mathbf{F}_k$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\delta \leqslant \frac{a}{k}$. Si $0 < x \leqslant \delta$ et $n = \left[\frac{a}{x}\right]$, alors $a - \delta \leqslant a - x < nx \leqslant a < a + \delta$ et $n \geqslant k$. Donc, $nx \in \mathbf{F}_k$ et, par définition de $\mathbf{F}_k$,

$$f(x) = \left| f\left(\frac{nx}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui implique $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

I.7.23. On définit $\mathbf{F}_n$ comme suit :

$$\mathbf{F}_n = \{x \in \mathbf{X} : |f(x)| \leqslant n \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\} .$$

La continuité de f implique que les $\mathbf{F}_n$ sont fermés. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbf{X}$, il existe un entier n_x strictement positif tel que $|f(x)| \leqslant n_x$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Donc, $x \in \mathbf{F}_{n_x}$ et $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n$. Puisque $(\mathbf{X}, d_1)$ est un ensemble de seconde catégorie[(5)], il existe un $\mathbf{F}_{n_0}$ d'intérieur non vide. Posons $\mathbf{G} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbf{F}_{n_0}}}$. On a alors $|f(x)| \leqslant n_0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in \mathbf{G}$.

I.7.24. On sait que

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(\mathbf{F}_n).$$

On montre que si f est continue, alors

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} f(\mathbf{F}_n) \subset f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n\right).$$

Soit $y \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(\mathbf{F}_n)$. Pour tout entier $n > 0$, $y \in f(\mathbf{F}_n)$ ou, dit autrement, $y = f(x_n)$ pour un $x_n \in \mathbf{F}_n$. D'après le théorème des ensembles emboîtés de Cantor, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n = \{x_0\}$ pour un certain $x_0 \in \mathbf{F}$. Par continuité de f, $y = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Donc, $y \in f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbf{F}_n\right)$.

I.7.25. Pour $u, v \in \mathbf{X}$, on a

$$d(f_u, f_v) = \sup\{|d_1(u,x) - d_1(v,x)| : x \in \mathbf{X}\} \leqslant d_1(u,v).$$

De plus,

$$\begin{aligned} d(f_u, f_v) &= \sup\{|d_1(u,x) - d_1(v,x)| : x \in \mathbf{X}\} \\ &\geqslant |d_1(u,u) - d_1(v,u)| = d_1(u,v). \end{aligned}$$

I.7.26. On suppose d'abord que $\mathbf{X}$ est un espace métrique compact et que $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbf{X}$, il existe alors $\delta_x > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour $|y - x| < \delta_x$. La famille $\{\mathbf{B}(x, \delta_x)\}$ étant un recouvrement ouvert de $\mathbf{X}$, il existe un sous-recouvrement fini

[(5)] Un ensemble est de *seconde catégorie* s'il n'est pas de première catégorie. (N.d.T.)

$\mathbf{B}(x_1, \delta_{x_1}), \ldots, \mathbf{B}(x_n, \delta_{x_n})$. Donc pour $x \in \mathbf{X}$, il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $x \in \mathbf{B}(x_i, \delta_{x_i})$. Il s'ensuit que

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leqslant \varepsilon + \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\},$$

ce qui prouve que f est bornée sur $\mathbf{X}$.

On suppose maintenant que toute fonction à valeurs réelles continue sur $\mathbf{X}$ est bornée et on suppose, contrairement à l'énoncé, que $\mathbf{X}$ n'est pas compact. On peut alors trouver une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{X}$ ne contenant aucune sous-suite convergente et l'ensemble $\mathbf{F} = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est fermé dans $\mathbf{X}$. La fonction f définie par $f(x_n) = n$ est continue sur $\mathbf{F}$. D'après le théorème de prolongement de Tiezte, il existe un prolongement continu de f défini sur $\mathbf{X}$. On a donc construit une fonction continue et non bornée, contradiction.

I.7.27. On montre d'abord que (a) implique (b). On suppose donc que (a) est vérifiée, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n) = 0$ et, contrairement à l'énoncé, que $\{x_n\}$ ne contient pas de sous-suite convergente. Il existe alors une suite $\{y_n\}$ d'éléments de $\mathbf{X}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ et $y_n \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\{y_n\}$ contient une sous-suite convergente $\{y_{n_k}\}$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$ implique que $\{x_{n_k}\}$ est aussi convergente. Donc, $\{y_n\}$ ne contient pas de sous-suite convergente et aucun terme des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ ne se répète une infinité de fois. Il existe une suite strictement croissante $\{n_k\}$ d'entiers strictement positifs telle que les ensembles infinis $\mathbf{F}_1 = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbf{F}_2 = \{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}^*\}$ soient fermés et disjoints. D'après le lemme de Urysohn, il existe une fonction continue $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ prenant la valeur 1 sur $\mathbf{F}_1$ et la valeur 0 sur $\mathbf{F}_2$. Ainsi,

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0.$$

La fonction f est donc continue mais pas uniformément continue sur $\mathbf{X}$, ce qui contredit (a).

Pour montrer que (b) implique (a), on note $\mathbf{A}$ l'ensemble des points d'accumulation de $\mathbf{X}$. D'après (b), toute suite d'éléments de $\mathbf{A}$ admet une sous-suite convergente vers un élément de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est donc compact. Si $\mathbf{X} \neq \mathbf{A}$, pour $\delta_1 > 0$, on pose alors $\delta_2 = \inf\{\rho(x) : x \in \mathbf{X}, \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) > \delta_1\}$ et on prouve que $\delta_2 > 0$. Si $\delta_2 = 0$, il existe alors une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{X}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(x_n) = 0$ et $\operatorname{dist}(x_n, \mathbf{A}) > \delta_1$. D'après (b), $\{x_n\}$ admet une sous-suite convergente vers un élément de $\mathbf{A}$, contradiction. Soit $\varepsilon > 0$ et $f\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbf{A}$, il existe $\delta_x > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

si $d_1(x,y) < \delta_x$. Puisque $\mathbf{A}$ est compact, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ tels que

$$\mathbf{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{B}\left(x_k, \frac{1}{3}\,\delta_{x_k}\right).$$

On pose $\delta_1 = \frac{1}{3}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$, $\delta_2 > 0$ défini comme précédemment et $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Soit x et $y \in \mathbf{X}$ tels que $d_1(x,y) < \delta$. Si $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) > \delta_1$, alors $\rho(x) > \delta_2$ et $d_1(x,y) < \delta \leqslant \delta_2$ seulement si $x = y$. Évidemment alors, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leqslant \delta_1$, il existe $a \in \mathbf{A}$ tel que $d_1(x,a) < \delta_1$. Il découle de ce qui précède qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_1(a, x_k) < \frac{1}{3}\,\delta_{x_k}$. Ainsi,

$$d_1(y, x_k) \leqslant d_1(y,x) + d_1(x,a) + d_1(a,x_k) < \delta + \delta_1 + \frac{1}{3}\,\delta_{x_k} \leqslant \delta_{x_k}$$

et

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité uniforme de f sur $\mathbf{X}$.

I.7.28. On sait (voir **I.7.9**) que toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue sur cet espace. L'énoncé affirme que chaque ensemble $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, est fini si $\mathbf{X}$ est compact. Supposons, au contraire, qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$ soit infini. Puisque la famille des boules $\{\mathbf{B}(x, \varepsilon), x \in \mathbf{X}\}$ forme un recouvrement ouvert de $\mathbf{X}$, elle contient un sous-recouvrement fini, ce qui contredit le fait que $\rho(x) > \varepsilon$ pour une infinité de x.

On suppose maintenant que toute fonction à valeurs réelles continue sur $\mathbf{X}$ est uniformément continue et que tout ensemble $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$ est fini et on prouve que $\mathbf{X}$ est compact. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de $\mathbf{X}$. Si un terme de la suite apparaît une infinité de fois, cette suite contient alors évidemment une sous-suite convergente. Si ce n'est pas le cas, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho(x_n) = 0$ car les ensembles $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$ sont finis. D'après le résultat du problème précédent, $\{x_n\}$ contient une sous-suite convergente.

I.7.29. Il suffit de considérer $\mathbf{X} = [0\,,1] \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \ldots$ muni de la distance euclidienne usuelle $d_1(x,y) = |x - y|$.

II

DÉRIVATION

Énoncés

II.1. Dérivée d'une fonction réelle

II.1.1. Trouver, si elle existe, la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x\,|x|$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = [x] \sin^2(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = (x - [x]) \sin^2(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$,

(e) $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$,

(f) $f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{|x|}$, $|x| > 1$.

II.1.2. Trouver la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \log_x 2$, $x > 0$, $x \neq 1$,

(b) $f(x) = \log_x \cos x$, $x \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{1\}$.

II.1.3. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

(a) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{e} & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

II.1.4. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, mais est dérivable en 0 qui est un point d'accumulation de $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

II.1.5. Déterminer les constantes a, b, c et d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 < x < 1, \\ 3 - 2x & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leqslant 0, \\ cx^2 + dx & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leqslant 1, \\ ax^2 + c & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{dx^2+1}{x} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

II.1.6. Déterminer les sommes suivantes :

(a) $$\sum_{k=0}^{n} ke^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n, \quad n \geqslant 1,$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

II.1.7. Prouver que si $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leqslant |\sin x|$ pour $x \in \mathbb{R}$, alors $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant 1$.

II.1.8. Soit f et g deux fonctions dérivables en a. Déterminer les limites

(a) $$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a},$$ (b) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

II.1.9. Soit f une fonction dérivable en a telle que $f(a) > 0$. Déterminer les limites

(a) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}},$$ (b) $$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}, \quad a > 0.$$

II.1.10. Soit f une fonction dérivable en a. Déterminer les limites suivantes :

(a) $$\lim_{x \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

(b) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x)\cos x - f(a)}, \quad a = 0, f'(0) \neq 0,$$

(c) $$\lim_{n \to +\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

(d) $$\lim_{n \to +\infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a)\right).$$

II.1.11. Pour $a > 0$ et $m, k \in \mathbb{N}^*$, calculer

(a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \ldots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right),$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}},$$

(c) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right).$$

II.1.12. Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, trouver

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots + f\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

II.1.13. Soit f une fonction dérivable en a et $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ deux suites convergentes vers a telles que $x_n \neq a$, $z_n \neq a$ et $x_n \neq z_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de fonction f pour laquelle

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

(a) est égale à $f'(a)$,

(b) n'existe pas ou existe mais est différente de $f'(a)$.

II.1.14. Soit f une fonction dérivable en a, $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ deux suites convergentes vers a telles que $x_n < a < z_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

II.1.15.

(a) Montrer que la fonction f définie sur $]0\,,2[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in \mathbb{Q}\cap\,]0\,,2[, \\ 2x-1 & \text{pour } x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\,]0\,,2[\end{cases}$$

n'est dérivable qu'en $x = 1$ et que $f'(1) \neq 0$. La fonction réciproque est-elle dérivable en $1 = y = f(1)$?

(b) On pose

$$\mathbf{A} = \{y \in]0\,,3[\,:\, y \in \mathbb{Q}, \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}\}\,,$$

$$\mathbf{B} = \left\{x : x = \frac{y+4}{2}\,, y \in \mathbf{A}\right\}$$

et on définit f par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in \mathbb{Q} \cap]0\,,2[, \\ 2x-1 & \text{pour } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0\,,2[, \\ 2x-4 & \text{pour } x \in \mathbf{B}. \end{cases}$$

Démontrer que l'intervalle $]0\,,3[$ est inclus dans l'image directe de f et que la fonction réciproque n'est pas dérivable en 1.

II.1.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x = 0, \\ a_q & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}, \end{cases}$$

la suite $\{a_q\}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k a_n = 0$ pour un certain entier $k \geqslant 2$. Prouver que f est dérivable en tout irrationnel algébrique[1] de degré au plus k.

II.1.17. Soit P un polynôme de degré n ayant n racines réelles distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et Q un polynôme de degré au plus $n-1$. Prouver que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et déterminer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}$, $n \geqslant 2$.

[1] Un nombre est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Il est de degré k s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré k mais n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers de degré strictement inférieur à k. (N.d.T.)

II.1.18. Établir les égalités suivantes en utilisant le résultat du problème précédent.

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0\}$,

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+2k} = \frac{n!\, 2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2n, -2(n-1), \ldots, -2, 0\}$.

II.1.19. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Décrire les points où $|f|$ est dérivable.

II.1.20. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions définies dans un voisinage de x, ne s'annulant pas en x et dérivables en ce point. Prouver que

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

II.1.21. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n$ des fonctions définies dans un voisinage de x, ne s'annulant pas en x et dérivables en ce point. Prouver que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}\right)'(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}(x) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k'(x)}{f_k(x)} - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right).$$

II.1.22. Étudier la dérivabilité de f et $|f|$ pour

(a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \sin x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2^k} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right[,\ k \geqslant 2, \\ \sin\left(x - \frac{3}{2^k}\right) & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right[,\ k \geqslant 2. \end{cases}$$

II.1.23. Démontrer que si les dérivées à gauche et à droite $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent, la fonction f est alors continue en x_0.

II.1.24. Prouver que si $f\colon\ ]a\,,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ atteint son maximum en $c \in\ ]a\,,b[$, autrement dit, $f(c) = \max\{f(x) : x \in\ ]a\,,b[\}$ et si les dérivées à gauche et à droite $f'_-(c)$ et $f'_+(c)$ existent, alors $f'_-(c) \geqslant 0$ et $f'_+(c) \leqslant 0$. Établir une condition nécessaire semblable pour que f atteigne son minimum.

II.1.25. Prouver que si $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$, $f(a) = f(b)$ et si f'_- existe sur $]a\,,b[$, alors

$$\inf\left\{f'_-(x) : x \in\ ]a\,,b[\right\} \leqslant 0 \leqslant \sup\left\{f'_-(x) : x \in\ ]a\,,b[\right\}.$$

II.1.26. Prouver que si $f \in \mathscr{C}_{[a,b]}$ et si f'_- existe sur $]a\,,b[$, alors

$$\inf\left\{f'_-(x) : x \in\ ]a\,,b[\right\} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \sup\left\{f'_-(x) : x \in\ ]a\,,b[\right\}.$$

II.1.27. Prouver que si f'_- existe et est continue sur $]a\,,b[$, alors f est dérivable sur $]a\,,b[$ et $f'(x) = f'_-(x)$ pour tout $x \in\ ]a\,,b[$.

II.1.28. Existe-t-il une fonction $f\colon\ ]1\,,2[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f'_-(x) = x \quad \text{et} \quad f'_+(x) = 2x$$

pour $x \in\ ]1\,,2[$?

II.1.29. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,,b]$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0, \tag{i}$$
$$f'(a) = f'_+(a) > 0,\ f'(b) = f'_-(b) > 0. \tag{ii}$$

Prouver qu'il existe $c \in\ ]a\,,b[$ tel que $f(c) = 0$ et $f'(c) \leqslant 0$.

II.1.30. Montrer que $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ vérifie l'équation

$$\left(1+x^2\right) f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Montrer aussi que pour $m \geqslant 0$,

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m\,(2m)!\,.$$

II.1.31. Montrer que

(a) $\left(e^x \sin x\right)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right),\ x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1,$

(b) $\left(x^n \ln x\right)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),\ x > 0,\ n \geqslant 1,$

(c) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right),\ x > 0,\ n \geqslant 1,$

(d) $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}},\ x \neq 0,\ n \geqslant 1.$

II.1.32. Prouver les identités suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right),\ x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},\ n \geqslant 1.$

II.1.33. On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x > 1$. Prouver que $f^{(n)}(x) > 0$ si n est impair et $f^{(n)}(x) < 0$ si n est pair et strictement positif.

II.1.34. On pose $f_{2n}(x) = \ln\left(1 + x^{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0$.

II.1.35. Soit P un polynôme de degré n. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

II.1.36. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{(1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_n x)}$$

est alors bien définie dans un certain voisinage de 0. Démontrer que $f^{(k)}(0) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II.1.37. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$$

pour $x > 0$.

II.1.38. Soit $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ des intervalles ouverts et $f\colon \mathbf{J} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{J}$ des fonctions infiniment dérivables, respectivement sur $\mathbf{J}$ et sur $\mathbf{I}$. Démontrer la *formule de Faà di Bruno* donnant la dérivée n-ième de $h = f \circ g$:

$$h^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g^{(2)}(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n},$$

où $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ et la sommation est faite sur l'ensemble des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

II.1.39. Prouver que les fonctions

(a) $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}} & \text{si } x \in \left]a\,,b\right[, \\ 0 & \text{si } x \notin \left]a\,,b\right[, \end{cases}$$

appartiennent à $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}}$.

II.1.40. Soit f une fonction dérivable sur $\left]a\,,b\right[$ telle que pour tout $x \in \left]a\,,b\right[$, on a $f'(x) = g(f(x))$ où $g \in \mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}}$. Prouver que $f \in \mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$.

II.1.41. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\left]a\,,b\right[$ telle qu'il existe des réels α, β, γ vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ et

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \left]a\,,b\right[.$$

Prouver que $f \in \mathscr{C}^\infty_{]a,b[}$.

II.2. Théorème des accroissements finis

II.2.1. Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a\,,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Prouver que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $x \in\,]a\,,b[$ tel que

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

II.2.2. Soit f et g des fonctions continues sur $[a\,,b]$ et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$, la fonction f vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Prouver qu'il existe $x \in\,]a\,,b[$ tel que $g'(x)f(x) + f'(x) = 0$.

II.2.3. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ $(a > 0)$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Démontrer que si

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}\,,$$

il existe alors $x_0 \in\,]a\,,b[$ tel que $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

II.2.4. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver que si $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$, l'équation $f'(x)f(x) = x$ admet alors au moins une racine dans $]a\,,b[$.

II.2.5. Soit f et g des fonctions continues et ne s'annulant pas sur $[a\,,b]$ et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver que si $f(a)g(b) = f(b)g(a)$, il existe alors $x_0 \in\,]a\,,b[$ tel que

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}\,.$$

II.2.6. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0.$$

Prouver que le polynôme $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ a au moins une racine dans $]0\,,1[$.

II.2.7. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \frac{2^2 a_2}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n} + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0.$$

Prouver que la fonction

$$f(x) = a_n \ln^n x + \ldots + a_2 \ln^2 x + a_1 \ln x + a_0$$

a au moins une racine dans $]1\,, e^2[$.

II.2.8. Prouver que si toutes les racines d'un polynôme P de degré $n \geqslant 2$ sont réelles, alors toutes les racines de P' le sont aussi.

II.2.9. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a\,, b]$, deux fois dérivable sur $]a\,, b[$ et telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Prouver qu'il existe $x_1 \in \,]a\,, b[$ tel que $f''(x_1) = 0$.

II.2.10. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a\,, b]$, deux fois dérivable sur $]a\,, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = f'(b) = 0$. Prouver qu'il existe $x_1, x_2 \in \,]a\,, b[$, $x_1 \neq x_2$, tels que

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$

II.2.11. Montrer que chacune des équations

(a) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$,

(b) $3^x + 4^x = 5^x$

admet exactement une racine réelle.

II.2.12. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels non nuls et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$. Prouver que l'équation

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$$

a au plus $n - 1$ racines dans $\mathbb{R}_+^*$.

II.2.13. Prouver que sous les hypothèses du problème précédent, l'équation

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{\alpha_n x} = 0$$

a au plus $n - 1$ racines réelles.

II.2.14. Soit f, g et h des fonctions continues sur $[a\,,b]$ et dérivables sur $]a\,,b[$. On pose

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}, \quad x \in [a\,,b].$$

Prouver qu'il existe $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que $F'(x_0) = 0$. En déduire le *théorème des accroissements finis* et le *théorème des accroissements finis généralisé*.

II.2.15. Soit f une fonction continue sur $[0\,,2]$, deux fois dérivable sur $]0\,,2[$. Montrer que si $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$, il existe alors $x_0 \in \,]0\,,2[$ tel que $f''(x_0) = 0$.

II.2.16. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur $]a\,,b[$. Prouver que si f n'est pas une fonction affine, il existe x_1 et x_2 dans $]a\,,b[$ tels que

$$f'(x_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(x_2).$$

II.2.17. Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$ et dérivable sur $]0\,,1[$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in \,]0\,,1[$ vérifiant $f(x_0) = 1$. Prouver qu'il existe $c \in \,]0\,,1[$ tel que $|f'(c)| > 2$.

II.2.18. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ $(a > 0)$ et dérivable sur $]a\,,b[$. Prouver qu'il existe $x_1 \in \,]a\,,b[$ tel que

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

II.2.19. Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x)$, $x \mapsto \ln\left(1 + x^2\right)$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$.

II.2.20. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a\,,b[$ telle qu'il existe $M \geqslant 0$ vérifiant $|f''(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \,]a\,,b[$. Prouver que f est uniformément continue sur $]a\,,b[$.

II.2.21. Soit a et b deux réels tels que $b - a \geqslant 4$ et $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver qu'il existe $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

II.2.22. Prouver que si f est dérivable sur $]a\,,b[$ et si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty, \tag{i}$$
$$f'(x) + f^2(x) + 1 \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \,]a\,,b[\,, \tag{ii}$$

alors $b - a \geqslant \pi$.

II.2.23. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur $]a\,,b[$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = A$, alors $f'_-(b) = A$.

II.2.24. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f'(x) = O(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Prouver que $f(x) = O\left(x^2\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

II.2.25. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et $g_1, g_2, \ldots, g_n$ des fonctions continues sur $[a\,,b]$, dérivables sur $]a\,,b[$ et telles que $g_k(a) \neq g_k(b)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Prouver qu'il existe $c \in \,]a\,,b[$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} f'_k(c) = \sum_{k=1}^{n} g'_k(c) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}\,.$$

II.2.26. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ et $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$. On dit que f est *uniformément dérivable* sur $[a\,,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

pour tout $x \in [a\,,b]$ et $|h| < \delta$, $x + h \in \mathbf{I}$. Prouver que f est uniformément dérivable sur $[a\,,b]$ si et seulement si f' est continue sur $[a\,,b]$.

II.2.27. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et g une fonction dérivable sur $]a\,,b[$ telle que $g(a) = 0$. Prouver que s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$\left| g(x)f(x) + \lambda g'(x) \right| \leqslant |g(x)| \quad \text{pour} \quad x \in [a\,,b],$$

alors $g(x) \equiv 0$ sur $[a\,,b]$.

II.2.28. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

II.2.29. Montrer que les seules fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'\left(x+\frac{1}{2}h\right), \quad x, h \in \mathbb{R},\ h \neq 0,$$

sont les polynômes du second degré.

II.2.30. Pour p et q strictement positifs tels que $p+q=1$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(px+qy) \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

II.2.31. Prouver[2] que si f est dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur $\mathbf{I}$.

II.2.32. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que

(a) si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

(b) si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2\sqrt{x}f'(x)) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

II.2.33. Prouver que si $f \in \mathscr{C}^2_{[a,b]}$ admet au moins trois zéros distincts dans $[a\,,b]$, l'équation $f(x)+f''(x) = 2f'(x)$ admet alors au moins une racine dans $[a\,,b]$.

II.2.34. Prouver que si le polynôme P admet au moins n racines distinctes strictement supérieures à 1, alors le polynôme

$$Q(x) = \left(x^2+1\right)P(x)P'(x) + x\left((P(x))^2 + \left(P'(x)\right)^2\right)$$

admet au moins $2n-1$ racines réelles distinctes.

II.2.35. Soit $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_m > 0$, un polynôme ayant m racines réelles distinctes. Prouver que le polynôme $Q(x) = (P(x))^2 - P'(x)$ admet

(a) exactement $m+1$ racines réelles distinctes si m est impair,

(b) exactement m racines réelles distinctes si m est pair.

---
[2] *Théorème de Darboux*. (N.d.T.)

II.2.36. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 3$ n'ayant que des racines réelles. On note

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

où $a_i \leqslant a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et

$$P'(x) = n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

où $a_i \leqslant c_i \leqslant a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Prouver que si

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}), \\ Q'(x) &= (n-1)(x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_{n-2}), \end{aligned}$$

alors $d_i \geqslant c_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$. De plus, prouver que si

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n), \\ R'(x) &= (n-1)(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_{n-2}), \end{aligned}$$

alors $e_i \leqslant c_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

II.2.37. Sous les hypothèses du problème précédent, prouver que

(a) si $S(x) = (x-a_1-\varepsilon)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, où $\varepsilon \geqslant 0$ est tel que $a_1+\varepsilon \leqslant a_{n-1}$ et si $S'(x) = n(x-f_1)(x-f_2)\cdots(x-f_{n-1})$, alors $f_{n-1} \geqslant c_{n-1}$;

(b) si $T(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n+\varepsilon)$, où $\varepsilon \geqslant 0$ est tel que $a_n - \varepsilon \geqslant a_2$ et si $T'(x) = n(x-g_1)(x-g_2)\cdots(x-g_{n-1})$, alors $g_1 \leqslant c_1$.

II.2.38. Prouver que sous les hypothèses de **II.2.36**, on a

$$a_i + \frac{a_{i+1}-a_i}{n-i+1} \leqslant c_i \leqslant a_{i+1} - \frac{a_{i+1}-a_i}{i+1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

II.2.39. Prouver que si f est dérivable sur $[0\,,1]$ et si

(i) $f(0) = 0$,

(ii) il existe $K > 0$ tel que$|f'(x)| \leqslant K\,|f(x)|$ pour $x \in [0\,,1]$,

alors $f(x) \equiv 0$.

II.2.40. Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]-1,1[}$ et $\mathbf{J} \subset]-1\,,1[$ un intervalle de longueur λ. L'intervalle $\mathbf{J}$ est décomposé en trois intervalles consécutifs $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ et $\mathbf{J}_3$ de longueurs respectives λ_1, λ_2 et λ_3 (on a donc $\mathbf{J}_1 \cup \mathbf{J}_2 \cup \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$). Prouver que si

$$m_k(\mathbf{J}) = \inf\left\{\left|f^{(k)}(x)\right| : x \in \mathbf{J}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

alors

$$m_k(\mathbf{J}) \leqslant \frac{1}{\lambda_2}\left(m_{k-1}(\mathbf{J}_1) + m_{k-1}(\mathbf{J}_3)\right).$$

II.2.41. Prouver que sous les hypothèses du problème précédent, si $|f(x)| \leqslant 1$ pour $x \in]-1\,,1[$, alors

$$m_k(\mathbf{J}) \leqslant \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

II.2.42. Soit $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes. Prouver que s'il existe p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, tel que $a_p = 0$ et $a_i \neq 0$ pour tout $i \neq p$, alors $a_{p-1}a_{p+1} < 0$.

II.3. Formule de Taylor et règle de L'Hospital

II.3.1. Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n-1$ fois dérivable sur $[a\,,b]$. Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors pour tout $x \in [a\,,b]$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Cette formule est appelée *formule de Taylor avec reste de Peano*[3].

II.3.2. Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois continûment dérivable sur $[a\,,b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a\,,b[$. Prouver que pour tous $x, x_0 \in [a\,,b]$ et tout $p > 0$, il existe $\theta \in]0\,,1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

où

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}$$

est le *reste de Schlömilch-Roche*.

[3] Ou encore, dans la terminologie française, *formule de Taylor avec reste de Young*. (N.d.T.)

II.3.3. Déduire du résultat précédent les formes suivantes du reste :

(a)
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

(*reste de Lagrange*),

(b)
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}\,(1-\theta)^n\,(x - x_0)^{n+1}$$

(*reste de Cauchy*).

II.3.4. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $[a\,,b]$. Pour $x, x_0 \in [a\,,b]$, prouver la *formule de Taylor avec reste intégral* :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt. \end{aligned}$$

II.3.5. Soit $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $[a\,,b]$. Pour $x, x_0 \in [a\,,b]$, prouver la formule de Taylor suivante :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

où

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_{n+1}}\int_{x_0}^{t_n}\cdots\int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1)\,dt_1\cdots dt_n dt_{n+1}.$$

II.3.6. Montrer que l'approximation

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2$$

donne $\sqrt{1+x}$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2}\,|x|^3$ si $|x| < \frac{1}{2}$.

II.3.7. Pour $x > -1$, $x \neq 0$, montrer que

(a) $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$,

(b) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ si $0 < \alpha < 1$.

II.3.8. Soit $f, g \in \mathscr{C}^2_{[0,1]}$ telles que $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \in]0\,,1[$. Pour $x \in]0\,,1[$, on note $\theta(x)$ un des réels pour lesquels l'égalité dans le théorème des accroissements finis généralisé est vérifiée, autrement dit, tel que

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}.$$

Calculer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\theta(x)}{x}.$$

II.3.9. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0\,,1[$ tel que

(a)

$$f(x) = f(0) + xf'(x) - \frac{x^2}{2} f''(x) + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

(b)

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x^2}{1+x} f'(x) + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(1+x)^n} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}} \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{x+\theta x^2}{1+x}\right)}{(n+1)!}, \quad x \neq -1.$$

II.3.10. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $2n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0\,,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{1!} f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3!} f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{2}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} + \frac{2}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\theta x)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

II.3.11. Prouver, en utilisant le résultat du problème précédent, que

$$\ln(1+x) > 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2k+1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

II.3.12. Prouver que si $f''(x)$ existe, alors

(a) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x),$$

(b) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x).$$

II.3.13. Prouver que si $f'''(x)$ existe, alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}=f'''(x).$$

II.3.14. Pour $x>0$, établir les inégalités suivantes :

(a) $$e^x>\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,,$$

(b) $$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\,,$$

(c) $$1+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2+\frac{1}{16}\,x^3\,.$$

II.3.15. Prouver que si $f^{(n+1)}(x)$ existe et n'est pas nul et si $\theta(h)$ est un réel défini par la formule de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x+\theta(h)h),$$

alors

$$\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}\,.$$

II.3.16. Soit f une fonction dérivable sur $[0\,,1]$ telle que $f(0)=f(1)=0$ et f'' existe et est bornée sur $]0\,,1[$ ($|f''(x)|\leqslant A$ pour $x\in\,]0\,,1[$). Prouver que

$$\left|f'(x)\right|\leqslant\frac{A}{2}\quad\text{pour}\quad x\in[0\,,1].$$

II.3.17. Soit $f\colon[-c\,,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[-c\,,c]$. Pour $k=0,1,2$, on pose $M_k=\sup\left\{\left|f^{(k)}(x)\right|:x\in[-c\,,c]\right\}$. Prouver que

(a) $$\left|f'(x)\right|\leqslant\frac{M_0}{c}+\left(x^2+c^2\right)\frac{M_2}{2c}\quad\text{pour}\quad x\in[-c\,,c],$$

(b) $$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}\quad\text{pour}\quad c\geqslant\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\,.$$

II.3.18. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a\,,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$M_k = \sup\left\{\left|f^{(k)}(x)\right| : x \in]a\,,+\infty[\right\} < +\infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

Prouver(4) que $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$. Donner un exemple de fonction pour laquelle l'égalité $M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}$ est atteinte.

II.3.19. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$M_k = \sup\left\{\left|f^{(k)}(x)\right| : x \in \mathbb{R}\right\} < +\infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

Prouver que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

II.3.20. Soit f une fonction p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$M_k = \sup\left\{\left|f^{(k)}(x)\right| : x \in \mathbb{R}\right\} < +\infty, \quad k = 0, 1, \ldots, p,\ p \geqslant 2.$$

Prouver(5) que

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

II.3.21. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f'' existe et est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

II.3.22. Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

II.3.23. Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $]0\,,1[$ telle que

(i) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0$,

(ii) il existe $M > 0$ tel que $(1-x)^2\left|f''(x)\right| \leqslant M$ pour $x \in]0\,,1[$.

Prouver que $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x)f'(x) = 0$.

(4) *Inégalité de Landau.* (N.d.T.)
(5) *Inégalités de Kolmogorov.* (N.d.T.)

II.3.24. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,,b]$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Prouver que si f'' est définie sur $]a\,,b[$, il existe alors $c \in\,]a\,,b[$ tel que

$$\left|f''(c)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|.$$

II.3.25. Soit $f\colon [-1\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable telle que

$$f(-1) = f(0) = 0,\;\; f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0.$$

Prouver qu'il existe $c \in\,]-1\,,1[$ tel que $f'''(c) \geqslant 3$.

II.3.26. Soit f une fonction n fois continûment dérivable sur $[a\,,b]$. On pose pour $x, t \in [a\,,b]$ $t \neq x$,

$$Q(t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}.$$

Prouver la version suivante de la formule de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

où $r_n(x) = \frac{Q^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$.

II.3.27. Soit $f\colon\,]-1\,,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0. Soit x_n et y_n deux suites telles que $-1 < x_n < y_n < 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, on considère le quotient

$$D_n = \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Prouver que

(a) si $x_n < 0 < y_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = f'(0)$,

(b) si $0 < x_n < y_n$ et si la suite $\left\{\frac{y_n}{y_n-x_n}\right\}$ est bornée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = f'(0)$,

(c) si f' existe sur $]-1\,,1[$ et est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = f'(0)$.

(Comparer avec **II.1.13** et **II.1.14**.)

II.3.28. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P en posant

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k (x-k)^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prouver que $P(x) \equiv 0$.

II.3.29. On suppose que $f^{(n+2)}$ est continue sur $[0\,,x]$. Démontrer qu'il existe $\theta\in\,]0\,,1[$ tel que

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\,x+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1}+\frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}\,x^n$$
$$+\frac{n}{2(n+1)}\,f^{(n+2)}(\theta x)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\,.$$

II.3.30. On suppose que $f^{(n+p)}$ existe sur $[a\,,b]$ et est continue en $x_0\in[a\,,b]$. Prouver que si $f^{(n+j)}(x_0)=0$ pour $j=1,2,\ldots,p-1$, $f^{(n+p)}(x_0)\neq 0$ et

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x-x_0)^{n-1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x)(x-x_0))}{n!}\,(x-x_0)^n\,,$$

alors

$$\lim_{x\to x_0}\theta(x)=\binom{n+p}{n}^{-\frac{1}{p}}.$$

II.3.31. Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $]-1\,,1[$ telle que $f(0)=0$. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx).$$

II.3.32. Soit f une fonction infiniment dérivable sur $]a\,,b[$. Prouver que si f s'annule en une infinité de points de l'intervalle fermé $[c\,,d]\subset\,]a\,,b[$ et si $\sup\left\{\left|f^{(n)}(x)\right| : x\in\,]a\,,b[\right\}=O(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors f s'annule sur un sous-intervalle ouvert de $]a\,,b[$.

II.3.33. Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

(i) il existe $L>0$ tel que $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant L$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

(ii) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Prouver que $f(x)\equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

II.3.34. Utiliser la règle de L'Hospital pour déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

II.3.35. Prouver que si f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0)=1$, $f'(0)=0$ et $f''(0)=-1$, on a alors, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

II.3.36. Pour $a>0$, $a\neq 1$, évaluer

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

II.3.37. Peut-on appliquer la règle de L'Hospital pour calculer les limites suivantes ?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

II.3.38. La fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x\ln 2}-\frac{1}{2^x-1} & \text{si } x\neq 0,\\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0. \end{cases}$$

est-elle dérivable en 0 ?

II.3.39. Soit f une fonction n fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, prouver l'égalité

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(a+kh) \right).$$

II.3.40. Démontrer la version suivante de la règle de L'Hospital. Soit $f, g\colon\,]a\,,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, deux fonctions dérivables sur $]a\,,b[$. On suppose de plus que

(i) $g'(x) \neq 0$ pour $x \in\,]a\,,b[$,

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$),

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $-\infty \leqslant L \leqslant +\infty$.

On a alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

II.3.41. Utiliser la version ci-dessus de la règle de L'Hospital pour prouver la généralisation suivante des résultats donnés en **II.2.32**. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $a > 0$.

(a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (af(x) + f'(x)) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{L}{a}$.

(b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (af(x) + 2\sqrt{x} f'(x)) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{L}{a}$.

Ces propositions sont-elles valides pour $a < 0$?

II.3.42. Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 0$. Prouver que si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x) f'''(x)}{(f''(x))^2} = c, \quad c \neq 1,$$

alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{1}{2-c}.$$

II.3.43. Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]-1,1[}$ telle que $f(0) = 0$. Prouver que si g est définie sur $]-1\,,1[\, \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, il existe alors un prolongement $\mathscr{C}^{\infty}$ de g sur $]-1\,,1[$.

II.4. Fonctions convexes

Une fonction f est *convexe* sur un intervalle $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ si

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (*)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ et $\lambda \in \left]0\,,1\right[$. Une fonction convexe f est *strictement convexe* sur $\mathbf{I}$ si l'inégalité $(*)$ est stricte pour $x_1 \neq x_2$. La fonction f est *concave* sur $\mathbf{I}$ si $-f$ est convexe.

II.4.1. Prouver qu'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ est convexe si et seulement si f' est croissante sur $\mathbf{I}$.

II.4.2. Prouver qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$.

II.4.3. Soit f une fonction convexe sur un intervalle $\mathbf{I}$. Prouver l'*inégalité de Jensen* :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{I}$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

II.4.4. Pour $x, y > 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, prouver l'inégalité

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\,.$$

II.4.5. Prouver[(6)] que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \quad \text{pour} \quad x_1, \ldots, x_n > 0.$$

II.4.6. Montrer que

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} < \frac{e^a + e^b}{2} \quad \text{pour} \quad a \neq b.$$

[(6)] Il s'agit de l'*inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique.* (N.d.T.)

II.4.7. Pour x et y strictement positifs, établir l'inégalité

$$x\ln x + y\ln y \geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

II.4.8. Pour $\alpha > 1$ et $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs, prouver que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}.$$

II.4.9. Soit $x_1, \dots, x_n \in \left]0\,,1\right[$ et $p_1, \dots, p_n \in \left]0\,,1\right]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Prouver que

(a) $$1 + \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^{-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x_k}{x_k}\right)^{p_k},$$

(b) $$\frac{1+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+x_k}{1-x_k}\right)^{p_k}.$$

II.4.10. On pose $x = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ où $x_1, \dots, x_n \in \left]0\,,\pi\right[$. Prouver que

(a) $$\prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leqslant (\sin x)^n,$$

(b) $$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

II.4.11. Prouver que si $a > 1$ et $x_1, \dots, x_n \in \left]0\,,1\right[$ sont tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^a}{n^{a-1}}.$$

II.4.12. Pour $n \geqslant 2$, vérifier l'inégalité suivante :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} \leqslant \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n2^{n-1}}\right)^n.$$

II.4.13. Établir les inégalités suivantes :

(a) pour $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\frac{n^2}{x_1 + \ldots + x_n} \leqslant \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

(b) pour $x_k, \alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$,

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \leqslant x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

(c) pour $x_k, y_k \geqslant 0$ et $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$,

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \leqslant (x_1 + y_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n + y_n)^{\alpha_n},$$

(d) pour $x_{i,j} \geqslant 0$ et $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\alpha_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \right)^{\alpha_i}.$$

II.4.14. Prouver que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et majorée, elle est alors constante sur $\mathbb{R}$.

II.4.15. Une fonction convexe et bornée sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, a[$ doit-elle être constante ?

II.4.16. Soit $f : \ ]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a, b[$ (les cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$ sont possibles). Prouver que soit f est monotone sur $]a, b[$, soit il existe $c \in \ ]a, b[$ tel que

$$f(c) = \min \{ f(x) : x \in \ ]a, b[\}$$

et f est décroissante sur $]a, c]$ et croissante sur $[c, b[$.

II.4.17. Soit $f : \ ]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a, b[$ (les cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$ sont possibles). Prouver que les limites (finies ou infinies)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

existent.

II.4.18. Soit $f\colon\ ]a\,,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée sur $]a\,,b[$ (les cas $a=-\infty$ et $b=+\infty$ sont possibles). Prouver que f est uniformément continue sur $]a\,,b[$ (comparer avec **II.4.14**).

II.4.19. Soit $f\colon\ ]a\,,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a\,,b[$ (les cas $a=-\infty$ et $b=+\infty$ sont possibles). Prouver que f admet des dérivées à gauche et à droite sur $]a\,,b[$ et qu'elles sont monotones. Prouver de plus que les dérivées à gauche et à droite sont égales, excepté sur un ensemble dénombrable.

II.4.20. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f, f' et f'' soient strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. On se donne $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leqslant b$. Soit $x\mapsto\xi(x)$, $x>0$, la fonction définie par le théorème des accroissements finis :

$$\frac{f(b+x)-f(a-x)}{b-a+2x}=f'(\xi).$$

Prouver que la fonction ξ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.4.21. En utilisant le résultat de **II.4.4**, prouver l'*inégalité de Hölder* : si $p,q>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

II.4.22. En utilisant l'inégalité de Hölder, prouver l'*inégalité de Minkowski* : si $p\geqslant 1$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

II.4.23. Prouver que si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^4$ converge, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{4}{5}}}$ converge aussi.

II.4.24. Pour $x_i,y_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ et $p>1$, prouver l'inégalité

$$((x_1+\ldots+x_n)^p+(y_1+\ldots+y_n)^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(x_1^p+y_1^p)^{\frac{1}{p}}+\ldots+(x_n^p+y_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

II.4.25. Prouver l'*inégalité de Minkowski généralisée* : pour $x_{i,j} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$) et $p > 1$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

II.4.26. Une fonction f définie sur un intervalle $\mathbf{I}$ est *mid-convexe* sur cet intervalle si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tout $x, y \in \mathbf{I}$. Prouver que si f est continue et mid-convexe sur $\mathbf{I}$, elle est convexe sur $\mathbf{I}$.

II.4.27. Prouver que l'hypothèse de continuité ne peut pas être omise en **II.4.26**.

II.4.28. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{I}$ telle que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tout $x, y \in \mathbf{I}$, $x \neq y$. Prouver que f est strictement convexe sur $\mathbf{I}$.

II.4.29. Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$. Prouver que f est localement lipschitzienne sur $\mathbf{I}$.

II.4.30. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.4.31. La fonction f est dite *sous-additive* sur $\mathbb{R}_+^*$ si on a

$$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

(a) si $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est sous-additive,

(b) si f est convexe et sous-additive sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est une fonction décroissante sur cet intervalle.

II.4.32. Soit f une fonction dérivable sur $]a\,,b[$ telle que, pour $x, y \in\ ]a\,,b[$ $(x \neq y)$, il existe un unique ζ vérifiant

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\zeta).$$

Prouver que f est strictement convexe ou strictement concave sur $]a\,,b[$.

II.4.33. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $d \in \mathbb{R}$, la fonction $g_d(x) = f(x + d) - f(x)$ soit $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Prouver que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.4.34. Soit $a_n \leqslant \ldots \leqslant a_2 \leqslant a_1$ des réels et f une fonction convexe sur l'intervalle $[a_n\,, a_1]$. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_{k+1})a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)a_{k+1}$$

en posant $a_{n+1} = a_1$.

II.4.35. Soit f une fonction concave et strictement croissante sur l'intervalle $]a\,,b[$ (les cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$ sont possibles). Prouver que si $a < f(x) < x$ pour tout $x \in\ ]a\,,b[$ et

$$\lim_{x \to a^+} f'_+(x) = 1,$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} = 1$$

pour tout $x, y \in\ ]a\,,b[$, f^n représentant la n-ième itérée de f (voir **I.1.40**).

II.5. Applications des dérivées

II.5.1. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis généralisé, que

(a) $\quad 1 - \dfrac{x^2}{2!} < \cos x \quad$ pour $\quad x \neq 0,$

(b) $\quad x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x \quad$ pour $\quad x > 0,$

(c) $\quad \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \quad$ pour $\quad x \neq 0,$

(d) $\quad \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \quad$ pour $\quad x > 0.$

II.5.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, vérifier les propositions suivantes :

(a)
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},$$

(b)
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

II.5.3. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver que si $a \geqslant 0$, il existe alors $x_1, x_2, x_3 \in\,]a\,,b[$ tels que

$$f'(x_1) = (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = \left(b^2 + ba + b^2\right)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

II.5.4. Démontrer la généralisation suivante du résultat donné en **II.2.32**. Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et α un nombre complexe à partie réelle strictement positive. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si f est dérivable et si $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha f(x) + f'(x)) = 0$.

II.5.5. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x) + f''(x)) = L$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

II.5.6. Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'existence de la limite

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x))$$

implique-t-elle celle de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

II.5.7.

(a) Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = 1$. Prouver que si $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$, il existe alors $x_0 > 0$ tel que $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

(b) Soit f une fonction continûment dérivable sur $]1\,,+\infty[$ telle que $f(1) = 1$. Démontrer que si $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ pour $x \geqslant 1$, il existe alors $x_0 > 0$ vérifiant $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

II.5.8. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[0\,,a]$ telles que $f(0)=g(0)=0$ et $g(x)>0$, $g'(x)>0$ pour $x\in\,]0\,,a]$. Prouver que si $\frac{f'}{g'}$ est croissante sur $]0\,,a]$, alors $\frac{f}{g}$ est aussi croissante sur cet intervalle.

II.5.9. Montrer que chacune des équations

$$\sin(\cos x)=x \quad \text{et} \quad \cos(\sin x)=x$$

admet une unique racine dans $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer de plus que si x_1 et x_2 sont respectivement les racines de la première et de la seconde équation, alors $x_1<x_2$.

II.5.10. Prouver que si f est dérivable sur $[a\,,b]$, $f(a)=0$ et s'il existe $C\geqslant 0$ tel que $|f'(x)|\leqslant C\,|f(x)|$ pour tout $x\in[a\,,b]$, alors $f(x)\equiv 0$.

II.5.11. En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver que

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p<\left(1+\frac{x}{q}\right)^q$$

pour $x>0$ si $0<p<q$.

II.5.12. Montrer d'abord que $e^x\geqslant 1+x$ pour $x\in\mathbb{R}$, puis, en utilisant ce résultat, prouver l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique.

II.5.13. Montrer que

$$xy\leqslant e^x+y(\ln y-1)$$

pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer aussi qu'il y a égalité si et seulement si $y=e^x$.

II.5.14. Soit $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow[-1\,,1]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(f(0))^2+\big(f'(0)\big)^2=4.$$

Prouver qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)+f''(x_0)=0$.

II.5.15. Établir les inégalités suivantes :

(a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{Arctan}x>1 \quad \text{pour} \quad x>0,$

(b) $2\tan x-\operatorname{sh}x>0 \quad \text{pour} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2},$

(c) $\ln x<\dfrac{x}{e} \quad \text{pour} \quad x>0,\ x\neq e,$

(d) $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2} \quad \text{pour} \quad x>0,\ x\neq 1.$

II.5.16. Déterminer lequel des deux nombres est le plus grand :

(a) e^{π} et π^{e},

(b) $2^{\sqrt{2}}$ et e,

(c) $\ln 8$ et 2.

II.5.17. Vérifier les propositions suivantes :

(a) $$\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\ln\left(1+\frac{b}{x}\right) < \frac{b}{a}, \quad a, b, x > 0,$$

(b) $$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n} < 1, \quad x \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{N}^*, m, n \geqslant |x|\,,$$

(c) $$\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \frac{1}{x} + \ln x, \quad x > 0.$$

II.5.18. Pour $x > 0$, établir les inégalités suivantes :

(a) $$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,,$$

(b) $$(x-1)^2 \geqslant x\ln^2 x.$$

II.5.19. Montrer que

(a) $$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (1+x)\ln(1+x) < x + \frac{x^2}{2} \quad \text{pour } x > 0,$$

(b) $$\ln(1+\cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4} \quad \text{pour } x \in \,]0\,,\pi[.$$

II.5.20. Pour $x > 0$, vérifier les propositions suivantes :

(a) $$e^x < 1 + xe^x,$$

(b) $$e^x - 1 - x < x^2e^x,$$

(c) $$xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1,$$

(d) $$e^x < (1+x)^{1+x},$$

(e) $$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x.$$

II.5.21. Montrer que $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ pour $x \in \,]0\,,e[$.

II.5.22. Montrer que $e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 > 0$ si $x > 1$.

II.5.23. Établir les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll}\text{(a)} & \dfrac{1}{3}\tan x + \dfrac{2}{3}\sin x > x \quad \text{pour} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \text{(b)} & x(2+\cos x) > 3\sin x \quad \text{pour} \quad x > 0, \\ \text{(c)} & \cos x < \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,. \end{array}$$

II.5.24. Montrer que si $\alpha > 1$, on a alors

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leqslant x^\alpha + (1-x)^\alpha \leqslant 1$$

pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

II.5.25. Montrer que si $\alpha \in \left]0\,,1\right[$, alors

$$(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha \qquad \text{pour } x, y > 0.$$

II.5.26. Pour $\alpha \in \left]0\,,1\right[$ et $x \in [-1\,,1]$, montrer que

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{8}\,x^2.$$

II.5.27. Prouver la généralisation suivante du résultat du problème précédent. Pour $B \geqslant 0$ et $x \in [-1\,,B]$, on a

$$\begin{array}{ll}\text{(a)} & (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2\,(1+B)^2}\,x^2 \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \text{(b)} & (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2\,(1+B)^2}\,x^2 \quad \text{si} \quad 1 < \alpha < 2. \end{array}$$

II.5.28. Prouver que

$$\begin{array}{ll}\text{(a)} & \sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}\,x \quad \text{pour} \quad x \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right], \\ \text{(b)} & \sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}\,x + \dfrac{x}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) \quad \text{pour} \quad x \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{array}$$

II.5.29. Prouver que

$$\pi x(1-x) < \sin \pi x \leqslant 4x(1-x) \quad \text{pour } x \in \left]0\,,1\right[.$$

II.5.30. Prouver que

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}\left(e^x - 1\right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

II.5.31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les extrema locaux de la fonction

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}.$$

II.5.32. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les extrema locaux de la fonction

$$f(x) = x^m (1-x)^n .$$

II.5.33. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le maximum de la fonction

$$f(x) = \sin^{2m} x \times \cos^{2n} x.$$

II.5.34. Déterminer tous les points où la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}$ atteint ses extrema locaux.

II.5.35. Déterminer le maximum et le minimum sur $[-1\,,1]$ de la fonction $f(x) = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$.

II.5.36. Déterminer le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}\,.$$

II.5.37. Prouver les inégalités suivantes pour $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$:

(a) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leqslant \frac{1}{e}\,,$$

(b) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 e^{-a_k} \leqslant \frac{4}{e^2}\,,$$

(c) $$\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{3}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

II.5.38. Déterminer tous les points où la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

atteint ses extrema locaux.

II.5.39. On pose

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f atteint son minimum absolu en 0 alors qu'elle n'est monotone sur aucun intervalle de la forme $]-\varepsilon\,, 0[$ ou $]0\,, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$).

II.5.40. Établir les inégalités suivantes pour $x > 0$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh} x^2 + \operatorname{ch} x^2}} < \operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x < \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x.$$

II.5.41. En utilisant le résultat du problème précédent, prouver que si a et b sont deux réels distincts et strictement positifs, alors

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Le réel $L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ est appelé la *moyenne logarithmique* des réels strictement positifs a et b, $a \neq b$ (on pose généralement $L(a,a) = a$)[7].

II.5.42. La *moyenne des puissances* des réels strictement positifs x et y est définie par

$$M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad p \neq 0.$$

(a) Montrer que

$$\lim_{p \to 0} M_p(x,y) = \sqrt{xy}.$$

(Il est donc naturel d'adopter la convention $M_0(x,y) = \sqrt{xy}$.)

(b) Montrer que $M_p(x,y) < M_q(x,y)$ si $x \neq y$ et $p < q$.

[7] $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ est appelé la *moyenne harmonique* des réels strictement positifs a et b, $M_2(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est appelé la *moyenne quadratique* des réels positifs a et b. (N.d.T.)

II.5.43. Pour $\lambda \geqslant 1$, x, y strictement positifs et tout entier $n \geqslant 2$, montrer que

$$\sqrt{xy} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n + \lambda\left((x+y)^n - x^n - y^n\right)}{2 + \lambda\left(2^n - 2\right)}} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

II.5.44. Prouver que

(a) $\quad \sin(\tan x) \geqslant x \quad$ pour $\quad x \in \left[0\,, \frac{\pi}{4}\right]$,

(b) $\quad \tan(\sin x) \geqslant x \quad$ pour $\quad x \in \left[0\,, \frac{\pi}{3}\right]$.

II.5.45. Montrer que

$$\frac{1}{\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

si $x \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right]$.

II.5.46. Montrer que

$$\operatorname{Arctan} x > \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{pour } x > 0.$$

II.5.47. Soit a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ des réels strictement positifs. Démontrer que l'inégalité

$$\prod_{k=1}^{n} (x a_k + (1-x) b_k) \leqslant \max\left\{\prod_{k=1}^{n} a_k, \prod_{k=1}^{n} b_k\right\}$$

est vérifiée pour tout $x \in [0\,, 1]$ si et seulement si

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{b_k}\right) \geqslant 0.$$

II.5.48. En utilisant les résultats de **II.5.1**, prouver que

$$\cos x + \cos y \leqslant 1 + \cos(xy) \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 \leqslant \pi.$$

II.5.49. Établir, pour x et y strictement positifs, l'inégalité

$$x^y + y^x > 1.$$

II.5.50. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver que si $0 < x < \frac{n}{n+1}$, alors

$$\left(1 - 2x^n + x^{n+1}\right)^n < \left(1 - x^n\right)^{n+1}.$$

II.5.51. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \sin \frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Prouver que si y et z sont des réels strictement positifs tels que $y + z < 1$, alors $f(y+z) < f(y) + f(z)$.

II.5.52. Prouver l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

II.5.53. Soit $f \in \mathscr{C}^2_{[a,b]}$ une fonction telle que $f(a)f(b) < 0$ et f' et f'' ne changent pas de signe sur $[a\,,b]$. Prouver que la suite récurrente définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et $x_0 = b$ si f' et f'' ont le même signe et $x_0 = a$, dans le cas contraire, converge vers l'unique racine de l'équation $f(x) = 0$ dans $]a\,,b[$. (Il s'agit de la *méthode d'approximation* dite *de Newton* d'une racine de l'équation $f(x) = 0$.)

II.5.54. Sous les hypothèses du problème précédent, prouver que

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2m} (x_n - \xi)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

si $M = \max\{|f''(x)| : x \in [a\,,b]\}$, $m = \min\{|f''(x)| : x \in [a\,,b]\}$ et ξ est l'unique racine de l'équation $f(x) = 0$.

II.5.55. Trouver $\sup\left\{2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} : x > 0\right\}$.

II.5.56. Soit f une fonction infiniment dérivable sur $[0\,,1]$ telle que, pour tout $x \in [0\,,1]$, il existe un entier $n(x)$ vérifiant $f^{(n(x))}(x) = 0$. Prouver que f coïncide avec un polynôme sur $[0\,,1]$.

II.5.57. Montrer sur un exemple que l'hypothèse dans le problème précédent que f est infiniment dérivable sur $[0\,,1]$ est essentielle. Montrer aussi que la conclusion de **II.5.56** est fausse si on remplace l'existence de $n(x)$ par $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in [0\,,1]$.

II.6. Dérivabilité forte et dérivabilité au sens de Schwarz

Définition 5. Une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble ouvert $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est *fortement dérivable* en $a \in \mathbf{A}$ si

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\ x_1\neq x_2}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f^*(a)$$

existe et est finie. Le nombre $f^*(a)$ est appelé la *dérivée forte* de f en a.

Définition 6. Une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble ouvert $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ est *dérivable au sens de Schwarz* (ou Schwarz-dérivable) en $a \in \mathbf{A}$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f^s(a)$$

existe et est finie. Le nombre $f^s(a)$ est appelé la *dérivée de Schwarz* ou *dérivée symétrique* de f en a.

La *dérivée forte supérieure* (resp. *inférieure*) de f en a est définie en remplaçant la limite par une limite supérieure $\overline{\lim}$ (resp. limite inférieure $\underline{\lim}$) dans la définition 5 et elle est notée $D^*f(a)$ (resp. $D_*f(a)$). Les *dérivées de Schwarz supérieures et inférieures* sont définies de façon analogue et sont notées respectivement $D^sf(a)$ et $D_sf(a)$.

II.6.1. Démontrer que si f est fortement dérivable en a, elle est alors dérivable en a et $f^*(a) = f'(a)$. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

II.6.2. Soit $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $\mathbf{A}^1$ et $\mathbf{A}^*$ l'ensemble des points où f est respectivement dérivable et fortement dérivable. Prouver que si $a \in \mathbf{A}^*$ est un point d'accumulation de $\mathbf{A}^*$, alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{A}^*}} f^*(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{A}^1}} f'(x) = f^*(a) = f'(a).$$

II.6.3. Prouver que toute fonction continûment dérivable en a est fortement dérivable en a.

II.6.4. La dérivabilité forte de f en a implique-t-elle la continuité de f' en ce point ?

II.6.5. Soit $\mathbf{G}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{A}$. Prouver que f est fortement dérivable sur $\mathbf{G}$ si et seulement si la dérivée f' est continue sur $\mathbf{G}$.

II.6.6. Prouver que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est alors fortement dérivable sur un *ensemble résiduel*, c'est-à-dire sur un ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbf{B}$ où $\mathbf{B}$ est un ensemble de première catégorie dans $\mathbb{R}$.

II.6.7. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que la dérivée de Schwarz f^s existe sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver que si $f(b) > f(a)$, il existe alors $c \in \,]a\,,b[$ tel que $f^s(c) \geqslant 0$.

II.6.8. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Démontrer que si f est Schwarz-dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$, il existe alors $x_1, x_2 \in \,]a\,,b[$ tels que $f^s(x_1) \geqslant 0$ et $f^s(x_2) \leqslant 0$.

II.6.9. Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$ et Schwarz-dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Prouver qu'il existe $x_1, x_2 \in \,]a\,,b[$ tels que

$$f^s(x_2) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f^s(x_1).$$

II.6.10. Soit f une fonction continue et Schwarz-dérivable sur $]a\,,b[$. Prouver que si la dérivée de Schwarz f^s est bornée sur $]a\,,b[$, alors f est lipschitzienne sur cet intervalle.

II.6.11. Soit f une fonction continue et Schwarz-dérivable sur $]a\,,b[$ tel que f^s soit continue sur cet intervalle. Prouver que f est dérivable et $f'(x) = f^s(x)$ pour tout $x \in \,]a\,,b[$.

II.6.12. Soit f une fonction continue et Schwarz-dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$. Prouver que si $f^s(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$, f est alors croissante sur $\mathbf{I}$.

II.6.13. Soit f une fonction continue et Schwarz-dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$. Prouver que si $f^s(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{I}$, f est alors constante sur $\mathbf{I}$.

II.6.14. Soit f une fonction Schwarz-dérivable sur $]a\,,b[$ et $x_0 \in]a\,,b[$ un extremum local de f. La dérivée de Schwarz doit-elle s'annuler en x_0 ?

II.6.15. Une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la *propriété de Baire* s'il existe un ensemble résiduel $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}$ sur lequel f est continue. Prouver que si f vérifie la propriété de Baire, il existe alors un ensemble résiduel $\mathbf{B}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{B}$,

$$D_s f(x) = D_* f(x) \quad \text{et} \quad D^s f(x) = D^* f(x).$$

II.6.16. Prouver que si f vérifie la propriété de Baire et est Schwarz-dérivable sur $\mathbb{R}$, f est alors fortement dérivable sur un ensemble résiduel.

II.6.17. Soit f une fonction Schwarz-dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ et soit $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$. La fonction f est *uniformément Schwarz-dérivable* sur $[a\,,b]$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$, alors

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^s(x)\right| < \varepsilon$$

dès que $x \in [a\,,b]$ et $x+h, x-h \in \mathbf{I}$.

Soit f une fonction Schwarz-dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ et $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$. Prouver que s'il existe $x_0 \in]a\,,b[$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} |f(x_0+h)| = +\infty$ et s'il existe x_1 tel que f soit localement bornée sur $[x_1\,,x_0[$, alors f n'est pas uniformément Schwarz-dérivable sur $[a\,,b]$.

II.6.18. Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ contenant $[a\,,b]$. Démontrer que f est uniformément Schwarz-dérivable sur $[a\,,b]$ si et seulement si f^s est continue sur $[a\,,b]$.

II.6.19. Montrer sur un exemple que l'hypothèse de continuité de f est essentielle dans le problème précédent.

II.6.20. Prouver qu'une fonction localement bornée sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ est uniformément Schwarz-dérivable sur tout $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$ si et seulement si f' est continue sur $\mathbf{I}$.

Solutions

II.1. Dérivée d'une fonction réelle

II.1.1.

(a) On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

car

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = f'_-(0).$$

(b) On obtient

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Puisque

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = +\infty$$

et

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h} - 0}{h} = -\infty,$$

la fonction f n'est pas dérivable en 0.

(c) $f'(x) = n\pi \sin(2\pi x)$ pour $x \in]n\,, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. De plus, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$f'_+(n) = \lim_{x \to n^+} \frac{n \sin^2(\pi x) - 0}{x - n} = \lim_{x \to n^+} \frac{n \sin^2(\pi x - \pi n)}{x - n} = 0,$$

$$f'_-(n) = \lim_{x \to n^-} \frac{(n-1) \sin^2(\pi x) - 0}{x - n} = 0.$$

Il s'ensuit que $f'(x) = \pi\,[x] \sin(2\pi x)$.

(d) Il découle de (c) que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x \sin^2(\pi x)\right)' - \left([x] \sin^2(\pi x)\right)' \\ &= \sin^2(\pi x) + \pi\,(x - [x]) \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

(e) $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

(f) $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ si $|x| > 1$.

II.1.2.

(a) Puisque $\log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}$, on obtient

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x} = -\frac{\log_x 2 \cdot \log_x e}{x}\,.$$

(b) Comme en (a), on prouve que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\tan x \ln x - \frac{1}{x}\ln\cos x}{\ln^2 x} \\ &= -\tan x \log_x e - \frac{1}{x}\log_x \cos x \cdot \log_x e. \end{aligned}$$

II.1.3.

(a) Clairement,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

On vérifie maintenant si une dérivée existe en 1 et en -1. On a

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}\,, \\ f'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \operatorname{Arctan}'(1) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Donc, $f'(1) = \frac{1}{2}$. On a aussi

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{4}}{x+1} = \operatorname{Arctan}'(-1) = \frac{1}{2}\,, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{4}}{x+1} = +\infty \end{aligned}$$

et $f'(-1)$ n'existe pas.

(b) On a

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}\left(1 - x^2\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

De plus,

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x-1} = 0,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2e^{-x^2} - \frac{1}{e}}{x-1} = \left(x^2e^{-x^2}\right)'_{|x=1} = 0.$$

Puisque que f est paire, $f'(-1) = 0$.

(c) On remarque que f est continue en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\tan t}} \\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\tan t = -1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{\tan t}} \\ &= -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\tan t = 1. \end{aligned}$$

La fonction est donc dérivable partout sauf en 0.

II.1.4. On note d'abord que

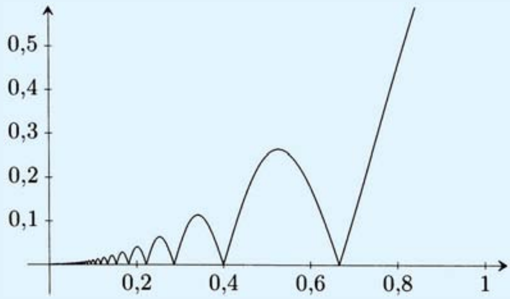
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0.$$

Clairement, $f'(x)$ existe pour $x \neq \frac{2}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Pour $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n = 0, 2, 4, \ldots$, on a

$$f'_+(x_n) = \lim_{x\to x_n^+} \frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x - x_n} = \left(x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'_{|x=x_n} = \pi,$$

$$f'_-(x_n) = \lim_{x\to x_n^-} \frac{-x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x - x_n} = \left(-x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'_{|x=x_n} = -\pi.$$

De même, si $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, alors $f'_+(x_n) = \pi$ et $f'_-(x_n) = -\pi$. Puisque f est paire, f n'est pas dérivable en x_n, $n \in \mathbb{Z}$.



II.1.5.

(a) Puisque f doit être continue, on obtient $c = 0$ et $a + b = 1$. Puisque $f'_-(0) = 4$ et $f'_+(0) = b$, on obtient $b = 4$ et $a = -3$. On vérifie facilement que pour de tels a, b et c, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) $a = d = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

(c) $b = c = 1$, $a = 0$, $d = \frac{1}{4}$.

II.1.6.

(a) Pour $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} .$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k e^{kx} = \frac{ne^{(n+2)x} - (n+1)\, e^{(n+1)x} + e^x}{(1 - e^x)^2} .$$

(b) En dérivant n fois les deux membres de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{kx} = (e^x - 1)^{2n} ,$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^n e^{kx} \binom{2n}{k} = \left((e^x - 1)^{2n} \right)^{(n)} .$$

Pour calculer $\left((e^x - 1)^{2n} \right)^{(n)}$ en 0, on pose $g(x) = e^x - 1$ et on note que la dérivée n-ième de $(g(x))^{2n}$ est une somme dont chaque terme contient une puissance de $g(x)$ d'ordre au moins n (comparez avec **II.1.38**). La dérivée n-ième de $x \mapsto (e^x - 1)^{2n}$ en 0 est donc nulle. En conséquence,

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n = 0.$$

(c) En dérivant l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z},$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos(kx) = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \qquad x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Pour $x = 2l\pi$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos(kx) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

II.1.7. On pose $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$. On a alors

$$\begin{aligned} |a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| = \left|f'(0)\right| &= \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \\ &= \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \times \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \leqslant 1. \end{aligned}$$

II.1.8.

(a) On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)f(a) - a(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= f(a) - af'(a). \end{aligned}$$

(b) Comme en (a), on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= f'(a)g(a) - f(a)g'(a). \end{aligned}$$

II.1.9.

(a) Puisque f est continue en a et $f(a) > 0$, on voit que $f\left(a + \frac{1}{n}\right) > 0$ pour n suffisamment grand. De plus, puisque f est dérivable en a, la fonction $x \mapsto \ln f(x)$ l'est aussi. Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln \left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}} \\ &= 0 \times (\ln f(x))'_{|x=a} = 0\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(b) Comme en (a), on obtient

$$\lim_{x\to a} \ln \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}} = \lim_{x\to a} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{x-a} \times \frac{x-a}{\ln x - \ln a} = \frac{f'(a)}{f(a)}\, a.$$

II.1.10.

(a) D'après **II.1.8(b)**, en prenant $g(x) = x^n$, on a

$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a} = -na^{n-1} f(a) + a^n f'(a).$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{x} \cdot \frac{x}{f(x)\cos x - f(0)} \\ &= (f(x)e^x)'_{|x=0} \frac{1}{(f(x)\cos x)'_{|x=0}} \\ &= \frac{f'(0) + f(0)}{f'(0)}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\sum_{i=1}^{k} f\left(a+\frac{i}{n}\right) - kf(a)\right) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} i \frac{f\left(a+\frac{i}{n}\right) - f(a)}{\frac{i}{n}} \\ &= (1+2+\ldots+k) f'(a) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} f'(a).\end{aligned}$$

(d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(a+\frac{k}{n^2}\right)-f(a)}{\frac{k}{n^2}} = f'(a).$$

Ceci implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\frac{k}{n^2}\, f'(a) - \frac{k}{n^2}\,\varepsilon < f\left(a+\frac{k}{n^2}\right) - f(a) < \frac{k}{n^2}\, f'(a) + \frac{k}{n^2}\,\varepsilon$$

pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si $n \geqslant n_0$. En sommant sur k, on obtient

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}\, f'(a) - \frac{n(n+1)}{2n^2}\,\varepsilon < \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(a+\frac{k}{n^2}\right) - f(a)\right)$$
$$< \frac{n(n+1)}{2n^2}\, f'(a) + \frac{n(n+1)}{2n^2}\,\varepsilon.$$

Il s'ensuit que la limite est égale à $\frac{1}{2}\, f'(a)$.

II.1.11.

(a) On a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+\ldots+(n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right)\\
&\quad= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^m - n^m + (n+2)^m - n^m + \ldots + (n+k)^m - n^m}{n^{m-1}}\\
&\quad= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m - 1}{\frac{1}{n}} + 2\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^m - 1}{\frac{2}{n}} + \ldots + k\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^m - 1}{\frac{k}{n}}\right)\\
&\quad= \frac{k(k+1)}{2}\, m.
\end{aligned}$$

Comparez avec **II.1.10(c)**.

(b) D'après **II.1.10(c)**, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}\right) = \frac{k(k+1)}{2} \times \frac{1}{a}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}} = e^{\frac{k(k+1)}{2a}}.$$

(c) On note que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{n}{n^2}\right)-n\ln\frac{1}{a}\right).$$

Le résultat de **II.1.10(d)** implique alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)=e^{\frac{a}{2}}.$$

II.1.12. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)}{x}+\ldots+\frac{f\left(\frac{x}{k}\right)-f(0)}{x}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)f'(0).$$

II.1.13.

(a) Si $f(x)=x^m$ $(m\in\mathbb{N}^*)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^m-z_n^m}{x_n-z_n}=ma^{m-1}=f'(a).$$

(b) Considérez la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Pour

$$x_n=\frac{2}{\pi(4n+1)}\quad\text{et}\quad z_n=\frac{1}{2n\pi},$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=-\frac{2}{\pi}\neq 0=f'(0).$$

D'autre part, si

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et si on prend $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ comme précédemment, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x_n) - g(z_n)}{x_n - z_n} = -\infty.$$

II.1.14. D'après les hypothèses,

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \cdot \frac{x_n - a}{x_n - z_n} + \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \cdot \frac{a - z_n}{x_n - z_n},$$

où

$$0 < \frac{a - z_n}{x_n - z_n} < 1, \quad 0 < \frac{x_n - a}{x_n - z_n} < 1$$

et

$$\frac{a - z_n}{x_n - z_n} + \frac{x_n - a}{x_n - z_n} = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

est compris entre

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \quad \text{et} \quad \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}.$$

Le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

II.1.15. [W. R. Jones, M. D. Landau, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 816-817].

(a) On note d'abord que f n'est continue qu'en 1. Si $\{x_n\}$ est une suite de rationnels différents de 1 qui converge vers 1, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} (x_n + 1) = 2.$$

Si $\{x_n\}$ est une suite d'irrationnels convergente vers 1, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2.$$

Donc, $f'(1) = 2$. Clairement, f est injective sur $]0\,,2[$. La fonction réciproque est définie sur $]0\,,3[$, excepté pour les rationnels dont la racine est irrationnelle. L'ensemble de définition de f^{-1} est donc d'intérieur vide et on ne peut pas définir $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

(b) On note d'abord que f est définie sur $]0\,,2[\cup\mathbf{B}$, où $\mathbf{B}\subset\,]2\,,7/2[$. On note aussi que la restriction de f à $]0\,,2[$ est la fonction définie en (a). Donc, $f'(1)=2$. Puisque $f(\mathbf{B})=\mathbf{A}$, l'image de f contient $]0\,,3[$. Néanmoins, $\left(f^{-1}\right)'(1)$ n'existe pas car tout voisinage de $1=f(1)$ contient l'image par f de points de $]0\,,2[$ et l'image de points de $\mathbf{B}$. Ainsi, même la limite de f^{-1} en 1 n'existe pas.

II.1.16. D'après un *théorème de Liouville* [voir, par exemple, J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1980, p. 7], tout irrationnel algébrique x de degré k s'approche mal par des rationnels dans le sens où il existe $M>0$ tel que $\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{Mq^k}$ pour tout rationnel $\frac{p}{q}$. Donc,

$$\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-f(x)}{\frac{p}{q}-x}\right|\leqslant Mq^k\left|a_q\right|.$$

Il s'ensuit, par hypothèse, que $f'(x)=0$.

On notera que si, par exemple, $a_q=2^{-q}$, f est alors dérivable en tout irrationnel algébrique.

II.1.17. On pose $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. On a alors

$$P'(x_k)=a\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j),\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

L'identité à prouver,

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)},$$

est équivalente à

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)P(x)}{P'(x_k)(x-x_k)},$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n}Q(x_k)\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}.$$

Q étant un polynôme de degré au plus $n-1$, il suffit de prouver que cette égalité est vérifiée en n points distincts. Clairement, elle est vérifiée en $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

En particulier, si $Q(x) \equiv 1$, alors

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} \prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} (x - x_j).$$

En regardant les coefficients des termes en x^{n-1}, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$

II.1.18. Appliquez le résultat du problème précédent en prenant

(a) $P(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ et $Q(x) \equiv n!$.

(b) $P(x) = x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)$ et $Q(x) \equiv n!\,2^n$.

II.1.19. Clairement, la dérivée de $|f|$ existe en tout x tel que $f(x) \neq 0$. De plus, si $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$, alors $|f|'(x) = 0$.

II.1.20. Il existe un voisinage de x où aucune des fonctions f_k ne change de signe. Donc $|f_k|$ est dérivable en x et on a

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} |f_k|\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} |f_k|}(x) = \left(\ln \prod_{k=1}^{n} |f_k|\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_k|'(x)}{|f_k(x)|}.$$

La démonstration se conclut en observant que $|f_k|'(x) = \operatorname{sgn}(f_k(x)) f_k'(x)$.

II.1.21. Appliquez le résultat du problème précédent en remplaçant f_k par $\frac{f_k}{g_k}$.

II.1.22.

(a) Clairement, f et $|f|$ ne sont continues qu'en 0. De plus, $f'(0) = 1$ et $|f|'(0)$ n'existe pas (comparez avec **II.1.19**).

(b) Les fonctions f et $|f|$ ne sont continues qu'en $x_k = \frac{3}{2^k}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. On vérifie facilement que $f'(x_k) = 1$ et que $|f|'(x_k)$ n'existe pas.

II.1.23. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $f'_+(x_0)$, on a

$$(f'_+(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (f'_+(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) \tag{1}$$

pour $x > x_0$ suffisamment proche de x_0. De même,

$$(f'_-(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \geqslant f(x) - f(x_0) \geqslant (f'_-(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) \tag{2}$$

pour $x < x_0$ suffisamment proche de x_0. La continuité de f en x_0 est une conséquence immédiate de (1) et (2).

II.1.24. Puisque $f(c) = \max\{f(x) : x \in]a\,,b[\}$, on a $f(x) - f(c) \leqslant 0$ pour $x \in]a\,,b[$. Donc,

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

De même, $f'_+(c) \leqslant 0$.

Si $f(c_0) = \min\{f(x) : x \in]a\,,b[\}$, on a alors $f'_+(c_0) \geqslant 0$ et $f'_-(c_0) \leqslant 0$.

II.1.25. Clairement, la proposition est vraie si f est constante. On considère donc une fonction f non constante. On peut supposer, sans perte de généralité, que $f(a) = f(b) = 0$. Il existe alors, par exemple, $x_1 \in]a\,,b[$ tel que $f(x_1) > 0$. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $0 = f(b) < k < f(x_1)$. On pose $c = \sup\{x \in]x_1\,,b[: f(x) > k\}$ et on a $f(x) \leqslant k$ pour $x \in [c\,,b]$. De plus, il existe une suite $\{h_n\}$ à termes strictement négatifs, convergente vers 0 et telle que $f(c + h_n) > k$. Puisque f'_- existe,

$$f'_-(c) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(c + h_n) - f(c)}{h_n} \leqslant 0.$$

On a donc prouvé que $\inf\left\{f'_-(x) : x \in]a\,,b[\right\} \leqslant 0$. On prouve de la même façon que $\sup\left\{f'_-(x) : x \in]a\,,b[\right\} \geqslant 0$.

On remarque de plus que l'on a un résultat semblable pour f'_+, à savoir,

$$\inf\left\{f'_+(x) : x \in]a\,,b[\right\} \leqslant 0 \leqslant \sup\left\{f'_+(x) : x \in]a\,,b[\right\}.$$

II.1.26. On applique le résultat du problème précédent à la fonction auxiliaire

$$x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

pour prouver cette proposition.

On peut prouver une proposition semblable pour f'_+ :

$$\inf\left\{f'_+(x) : x \in]a\,,b[\right\} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \sup\left\{f'_+(x) : x \in]a\,,b[\right\}.$$

II.1.27. D'après le résultat du problème précédent, on a

$$\inf\left\{f'_-(z) : z \in \left]x\,,x+h\right[\right\} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \sup\left\{f'_-(z) : z \in \left]x\,,x+h\right[\right\}$$

pour $x \in \left]a\,,b\right[$ et $h > 0$ tel que $x+h \in \left]a\,,b\right[$. Puisque f'_- est continue sur $\left]a\,,b\right[$, on obtient, par passage à la limite lorsque h tend vers 0^+, $f'_+(x) = f'_-(x)$.

II.1.28. Le résultat du problème précédent implique qu'une telle fonction n'existe pas.

II.1.29. Par hypothèse, f s'annule en au moins un point de l'intervalle ouvert $\left]a\,,b\right[$. On pose

$$c = \inf\left\{x \in \left]a\,,b\right[: f(x) = 0\right\}.$$

On a $f(c) = 0$ et, puisque $f'(a) > 0$, on obtient $f(x) > 0$ pour $x \in \left]a\,,c\right[$. De plus, puisque $f'(c)$ existe,

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)}{h} \leqslant 0.$$

II.1.30. Clairement, on a $\left(1+x^2\right) f'(x) = 1$, ce qui implique $\left(1+x^2\right) f''(x) + 2xf'(x) = 0$. On montre alors par récurrence que

$$\left(1+x^2\right) f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient alors, de nouveau par récurrence, $f^{(2m)}(0) = 0$ et $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m\,(2m)!$.

II.1.31. Ces identités se prouvent facilement par récurrence.

II.1.32.

(a) Appliquez la *formule de Leibniz*

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

et l'identité (a) du problème précédent.

(b) Appliquez la formule de Leibniz et l'identité (b) du problème précédent.

II.1.33. On voit facilement que si $x > 1$, alors $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$. En dérivant n fois ($n \geqslant 3$)

$$(f(x))^2 = x^2 - 1$$

et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$2f(x)f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \equiv 0.$$

Le résultat cherché s'obtient par récurrence.

II.1.34. On a[(8)]

$$f_{2n}(x) = \ln\left(1 + x^{2n}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \ln(x - \omega_k),$$

où $\omega_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}$. Donc,

$$f_{2n}^{(2n)}(x) = -(2n-1)! \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(x - \omega_k)^{2n}}.$$

En prenant $x = -1$, on obtient

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = -(2n-1)! \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(1 + \omega_k)^{2n}}.$$

Un calcul facile montre que

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = i\frac{(2n-1)!}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\cos^{2n}\frac{(2k-1)\pi}{4n}}.$$

Puisque $f_{2n}^{(2n)}(-1)$ est réel, on en déduit que $f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0$.

[(8)] Il est conseillé de se reporter à un ouvrage d'analyse complexe pour la définition du logarithme d'un nombre complexe. (N.d.T.)

II.1.35. On note respectivement $G(x)$ et $D(x)$ le premier et le second membre de l'identité à prouver. G et D sont des polynômes de degré $n+1$ et $G(0) = D(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que $G'(x) = D'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = P(x),\\
D'(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{k!}\, x^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}\, x^{k+1}\\
&= P(x) + (-1)^n \frac{P^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = P(x).
\end{aligned}$$

II.1.36. Il existe un voisinage de 0 où f est strictement positive. Donc,

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 x} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n x} = g(x).$$

D'où, $f'(x) = f(x)g(x)$ et $f'(0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n > 0$. De plus,

$$g^{(i)}(x) = i!\left(\frac{\lambda_1^{i+1}}{(1-\lambda_1 x)^{i+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n^{i+1}}{(1-\lambda_n x)^{i+1}}\right). \tag{$*$}$$

D'après la formule de Leibniz,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} g^{(i)}(x) f^{(k-1-i)}(x).$$

On obtient alors, par récurrence et en utilisant $(*)$, $f^{(k)}(0) > 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

II.1.37. On procède par récurrence. L'égalité est évidente pour $n = 1$. On la suppose vérifiée pour $k \leqslant n$ et on montre qu'elle l'est aussi à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}\left(\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\right)^{(n)}\\
&= (-1)^{n+1} n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} - (-1)^{n+1}\left(x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}\\
&= -\frac{n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - (-1)^{n-1}\left(x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$(-1)^{n-1}\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\left(\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}\right)'.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à f' en prenant $k = n-1$ donne

$$\frac{1}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{n-1}\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\left(x^{n}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= -\frac{n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

II.1.38. La démonstration présentée ici de cette formule bien connue est basée sur l'article de S. Roman [*Amer. Math. Monthly* 87 (1980), 805-809]. Bien que l'on applique des méthodes de l'analyse fonctionnelle, la démonstration reste élémentaire. On considère des formes linéaires $L\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes à coefficients réels et on note $\langle L, P(x)\rangle$ la valeur de L en $P(x)$. Soit A^k une forme linéaire telle que

$$\left\langle A^k, x^n\right\rangle = n!\,\delta_{n,k},$$

où

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

On remarque ici que la valeur de A^k en x^n est $(x^n)^{(k)}_{|x=0}$. On note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, la forme linéaire définie par

$$\left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k, P(x)\right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left\langle A^k, P(x)\right\rangle.$$

Puisque $\left\langle A^k, P(x)\right\rangle = 0$ pour presque tout k, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la somme se trouvant dans le second membre de cette égalité. Le but est maintenant de prouver que

$$L = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left\langle L, x^k\right\rangle}{k!} A^k \tag{1}$$

si L est une forme linéaire sur $\mathcal{P}$. En effet, pour $n \geqslant 0$,

$$\left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k, x^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} \left\langle A^k, x^n \right\rangle = \langle L, x^n \rangle .$$

Puisque L et A^k sont linéaires, on obtient

$$\langle L, P(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k, P(x) \right\rangle$$

pour tout polynôme P, ce qui prouve (1). Du fait que la valeur de A^k en x^n est $(x^n)^{(k)}_{|x=0}$, il semble naturel de définir une opération sur A^k en posant

$$A^k A^j = A^{k+j}.$$

En tenant compte de (1), on peut étendre cette opération en une opération définie pour tous $L, M \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$LM = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\langle M, x^j \rangle}{j!} A^j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n A^n,$$

où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} \frac{\langle M, x^{n-k} \rangle}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle L, x^k \right\rangle \left\langle M, x^{n-k} \right\rangle .$$

Donc, d'après (1),

$$\langle LM, x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle L, x^k \right\rangle \left\langle M, x^{n-k} \right\rangle . \tag{2}$$

On montre alors par récurrence que

$$\langle L_1 \cdots L_j, x^n \rangle = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_j = 0 \\ k_1 + \ldots + k_j = n}}^{n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_j!} \left\langle L_1, x^{k_1} \right\rangle \left\langle L_2, x^{k_2} \right\rangle \cdots \left\langle L_j, x^{k_j} \right\rangle . \tag{3}$$

On définit la dérivée formelle L' de L par

$$\left(A^0\right)' = 0, \quad \left(A^k\right)' = kA^{k-1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*$$

et

$$L' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} kA^{k-1}.$$

On montre maintenant que

$$\langle L', P(x)\rangle = \langle L, xP(x)\rangle \tag{4}$$

pour tout $P \in \mathcal{P}$. Clairement, il suffit de montrer que

$$\left\langle \left(A^k\right)', x^n \right\rangle = \left\langle A^k, x^{n+1} \right\rangle.$$

On a

$$\left\langle \left(A^k\right)', x^n \right\rangle = \left\langle kA^{k-1}, x^n \right\rangle = kn!\,\delta_{n,k-1} = (n+1)!\,\delta_{n+1,k} = \left\langle A^k, x^{n+1} \right\rangle.$$

Pour démontrer la formule de Faà di Bruno, on pose

$$h_n = h^{(n)}(t),\ g_n = g^{(n)}(t),\ f_n = f^{(n)}(u)_{|u=g(t)}.$$

Clairement,

$$h_1 = f_1 g_1,\ h_2 = f_1 g_2 + f_2 g_1^2,\ h_3 = f_1 g_3 + f_2\, 3 g_1 g_2 + f_3 g_1^3.$$

On peut montrer par récurrence que

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n), \tag{5}$$

où $l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ne dépend pas des f_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Pour déterminer $l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, on choisit $f(t) = e^{at}$ $(a \in \mathbb{R})$. On a alors $f_k = a^k e^{ag(t)}$ et $h_n = \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)}$. L'égalité (5) implique

$$e^{-ag(t)} \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a^k l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n). \tag{6}$$

On pose $B_n(t) = e^{-ag(t)} \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)}$ pour $n \geqslant 0$. La formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned} B_n(t) &= e^{-ag(t)} \left(a g_1(t)\, e^{ag(t)}\right)^{(n-1)} \\ &= a \cdot e^{-ag(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) \left(e^{ag(t)}\right)^{(n-k-1)} \\ &= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) B_{n-k-1}(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Pour $t \in \mathbf{I}$ fixé, on note $B_n = B_n(t)$ et on définit les formes linéaires L et M sur $\mathcal{P}$ par $\langle L, x^n\rangle = B_n$, $\langle M, x^n\rangle = g_n$. On a alors $\langle L, 1\rangle = B_0 = 1$ et $\langle M, 1\rangle = g_0 = g(t)$. De plus, d'après (1),

$$L = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} A_k \quad \text{et} \quad M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g_k}{k!} A^k.$$

En combinant maintenant (7) à (2) et (4), on obtient

$$\begin{aligned}\langle L, x^n\rangle &= a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left\langle M, x^{k+1}\right\rangle\left\langle L, x^{n-1-k}\right\rangle\\ &= a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left\langle M', x^{k}\right\rangle\left\langle L, x^{n-1-k}\right\rangle\\ &= a\left\langle M'L, x^{n-1}\right\rangle.\end{aligned}$$

Donc, $\left\langle L', x^{n-1}\right\rangle = a\left\langle M'L, x^{n-1}\right\rangle$ ou, dit autrement,

$$L' = aM'L.$$

Cette équation différentielle formelle admet des solutions de la forme $L = ce^{a(M-g_0)}$, et c étant une constante réelle. Les conditions initiales donnent $1 = B_0 = \langle L, 1\rangle = \left\langle ce^{a(M-g_0)}, 1\right\rangle = c$ et $L = e^{a(M-g_0)}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}B_n = \langle L, x^n\rangle = \left\langle e^{a(M-g_0)}, x^n\right\rangle &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\left\langle (M-g_0)^k, x^n\right\rangle\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0\\ j_1+\ldots+j_k=n}}^{n}\frac{n!}{j_1!j_2!\cdots j_k!}\left\langle M-g_0, x^{j_1}\right\rangle\left\langle M-g_0, x^{j_2}\right\rangle\cdots\left\langle M-g_0, x^{j_k}\right\rangle\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=1\\ j_1+\ldots+j_k=n}}^{n}\frac{n!}{j_1!j_2!\cdots j_k!}g_{j_1}g_{j_2}\cdots g_{j_k}.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de a^k dans (6), on obtient

$$\begin{aligned}l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n) &= \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=1\\ j_1+\ldots+j_k=n}}^{n}\frac{g_{j_1}}{j_1!}\frac{g_{j_2}}{j_2!}\cdots\frac{g_{j_k}}{j_k!}\\ &= \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n=0\\ k_1+\ldots+k_n=k\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}}^{n}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{g_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n=0\\ k_1+\ldots+k_n=k\\ k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}}^{n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n},$$

ce qui complète la démonstration.

II.1.39.

(a) On a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

car (voir **I.1.12**)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

Il s'ensuit que f' est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \neq 0$, on a

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{4}{x^6} - \frac{2 \times 3}{x^4} \right).$$

De nouveau, en utilisant **I.1.12**, on montre que $f''(0) = 0$ et f'' est aussi continue sur $\mathbb{R}$. On remarque finalement que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

P étant un polynôme. On en déduit que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Comme en (a), on montre que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que g appartient à $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}}$.

(c) La fonction est le produit de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}}$, en prenant $f_1(x) = g(x-a)$ et $f_2(x) = g(b-x)$, g étant définie en (b).

II.1.40. On a

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(f(x))f'(x) = g'(f(x))g(f(x)), \\ f'''(x) &= g''(f(x))(g(f(x)))^2 + (g'(f(x)))^2 g(f(x)). \end{aligned}$$

Les fonctions f'' et f''' sont donc continues sur $]a\,,b[$. On montre par récurrence que $f^{(n)}$, $n \geqslant 3$, est la somme de produits des dérivées $g^{(k)}(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Elle est donc continue sur $]a\,,b[$.

II.1.41. Si $\alpha \neq 0$,

$$f''(x) = \frac{-\beta f'(x) - \gamma f(x)}{\alpha}.$$

Donc,

$$f'''(x) = \frac{-\beta f''(x) - \gamma f'(x)}{\alpha} = \frac{\left(\beta^2 - \gamma\alpha\right) f'(x) + \gamma\beta f(x)}{\alpha^2}.$$

On montre alors par récurrence que la dérivée n-ième de f est combinaison linéaire de f et de f'.

Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et $f'(x) = \frac{-\gamma}{\beta} f(x)$. On obtient, de nouveau par récurrence,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\gamma^n}{\beta^n} f(x).$$

II.2. Théorème des accroissements finis

II.2.1. La fonction auxiliaire $h(x) = e^{\alpha x} f(x)$, $x \in [a\,,b]$, vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que

$$0 = h'(x_0) = \big(\alpha f(x_0) + f'(x_0)\big)\, e^{\alpha x_0},$$

d'où $\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

II.2.2. La fonction $h(x) = e^{g(x)} f(x)$, $x \in [a\,,b]$, vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $x_0 \in \,]a\,,b[$ tel que

$$0 = h'(x_0) = \big(g'(x_0) f(x_0) + f'(x_0)\big)\, e^{g(x_0)},$$

d'où $g'(x_0) f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

II.2.3. Appliquez le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [a\,,b]$.

II.2.4. Considérez $h(x) = f^2(x) - x^2$ ($x \in [a\,,b]$) et appliquez le théorème de Rolle.

II.2.5. Appliquez le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [a\,,b]$.

II.2.6. On remarque que le polynôme

$$Q(x) = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \ldots + a_n x$$

vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur l'intervalle $[0\,,1]$.

II.2.7. La fonction

$$h(x) = \frac{a_n}{n+1} \ln^{n+1} x + \ldots + \frac{a_2}{3} \ln^3 x + \frac{a_1}{2} \ln^2 x + \frac{a_0}{1} \ln x, \quad x \in \left[1\,,e^2\right],$$

vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

II.2.8. D'après le théorème de Rolle, entre deux zéros réels du polynôme P, il existe au moins un zéro de P'. De plus, chaque zéro de P d'ordre k ($k \geqslant 2$) est un zéro de P' d'ordre $k-1$. Il y a donc $n-1$ zéros de P', comptés avec leur multiplicité.

II.2.9. D'après le théorème de Rolle appliqué à f sur $[a\,,b]$, il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f'(c)=0$. En appliquant alors le théorème de Rolle à f' sur $[a\,,c]$, on voit qu'il existe $x_1 \in\,]a\,,c[\, \subset\,]a\,,b[$ tel que $f''(x_1)=0$.

II.2.10. Appliquez un raisonnement semblable à celui utilisé dans la solution du problème précédent.

II.2.11.

(a) On pose $P(x) = x^{13}+7x^3-5$. On a $P(0)=-5$ et $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet au moins une racine strictement positive. S'il en admettait deux, le théorème de Rolle impliquerait que $P'(x_0)=0$ pour un certain $x_0>0$. Ceci contredit le fait que $P'(x)=0$ si et seulement si $x=0$. Pour finir, on remarque que $P(x)<0$ pour $x<0$.

(b) On considère la fonction

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1.$$

On a $f(2)=0$. Si f s'annule en un autre point, d'après le théorème de Rolle, sa dérivée s'annule alors en au moins un point, contredisant le fait que $f'(x)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

II.2.12. On procède par récurrence. Pour $n=1$, l'équation $a_1x^{\alpha_1}=0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que, pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, l'équation

$$a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_nx^{\alpha_n}=0$$

admet au plus $n-1$ racines dans $\mathbb{R}_+^*$ et considère l'équation

$$a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+\ldots+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$a_1+a_2x^{\alpha_2-\alpha_1}+\ldots+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}-\alpha_1}=0.$$

Si cette dernière équation admet plus de n racines strictement positives, d'après le théorème de Rolle, la dérivée de la fonction dans le premier membre de l'égalité admet au moins n racines strictement positives, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

II.2.13. Appliquez le résultat du problème précédent en remplaçant x par e^x.

II.2.14. Clairement, $F(a) = F(b) = 0$ et F est continue sur $[a\,, b]$. De plus, F est dérivable sur $]a\,, b[$ et

$$F'(x) = \det\begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in \,]a\,, b[$ tel que $F'(x_0) = 0$.

En prenant $g(x) = x$ et $h(x) = 1$ pour $x \in [a\,, b]$, on obtient

$$F'(x_0) = \det\begin{pmatrix} f'(x_0) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui donne $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. On a donc obtenu le théorème des accroissements finis. Pour obtenir le théorème des accroissements finis généralisé, il suffit de prendre $h(x) \equiv 1$.

II.2.15. Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $x_1 \in \,]0\,, 1[$ et $x_2 \in \,]1\,, 2[$ tels que

$$f'(x_1) = f(1) - f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(x_2) = f(2) - f(1) = 1.$$

La proposition se déduit alors du théorème de Rolle appliqué à f' sur $[x_1\,, x_2]$.

II.2.16. Puisque f n'est pas une fonction affine, il existe $c \in \,]a\,, b[$ tel que

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) \quad \text{ou} \quad f(c) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)\,.$$

On suppose, par exemple, que

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)\,.$$

On a alors

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{ou} \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

La proposition se déduit donc du théorème des accroissements finis. Le même raisonnement s'applique au cas où

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(c-a)\,.$$

II.2.17. On suppose d'abord que $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Un des deux intervalles $[0\,,x_0]$ et $[x_0\,,1]$ a une longueur inférieure à $\frac{1}{2}$. Supposons, par exemple, que ce soit $[x_0\,,1]$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\frac{-1}{1-x_0} = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = f'(c)$$

et $|f'(c)| > 2$. Supposons maintenant que $x_0 = \frac{1}{2}$ et que f est affine sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$. On a alors $f(x) = 2x$ pour $x \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right]$. Puisque $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, il existe $x_1 > \frac{1}{2}$ tel que $f(x_1) > 1$ et la proposition se déduit du théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x_1\,,1]$. Finalement, on suppose que f n'est pas affine sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$. S'il existe $x_2 \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ tel que $f(x_2) > 2x_2$, il suffit d'appliquer alors le théorème des accroissements finis sur $[0\,,x_2]$. Si $f(x_2) < 2x_2$, on peut alors appliquer le théorème des accroissements finis sur $\left[x_2\,,\frac{1}{2}\right]$.

II.2.18. On voit en appliquant le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[a\,,b]$ que

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{x_1f'(x_1)-f(x_1)}{x_1^2}}{-\frac{1}{x_1^2}} = f(x_1) - x_1f'(x_1).$$

II.2.19. D'après le théorème des accroissements finis, pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, il existe $x_0 \in \left]x_1\,,x_2\right[$ tels que

$$|\ln(1+x_1) - \ln(1+x_2)| = \frac{1}{1+x_0}\,|x_1-x_2| \leqslant |x_1-x_2|\,.$$

De même,

$$\left|\ln\left(1+x_1^2\right) - \ln\left(1+x_2^2\right)\right| = \frac{2x_0}{1+x_0^2}\,|x_1-x_2| \leqslant |x_1-x_2|$$

et

$$|\operatorname{Arctan} x_1 - \operatorname{Arctan} x_2| = \frac{1}{1+x_0^2}\,|x_1-x_2| \leqslant |x_1-x_2|\,.$$

II.2.20. On se donne $x_0 \in \,]a\,,b[$. Pour tout $x \in \,]a\,,b[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c se trouvant entre x_0 et x tel que $f'(x) - f'(x_0) = f''(c)(x - x_0)$. Donc,

$$\left|f'(c)\right| \leqslant M\,|x - x_0| + \left|f'(x_0)\right| \leqslant M(b-a) + \left|f'(x_0)\right|,$$

ce qui signifie que f' est bornée. Il s'ensuit (comme dans la solution du problème précédent) que f est uniformément continue sur $]a\,,b[$.

II.2.21. On considère la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} f(x)$. D'après le théorème des accroissements finis, pour $a < x_1 < x_2 < b$ et $x_2 - x_1 > \pi$, on a

$$|\operatorname{Arctan} f(x_2) - \operatorname{Arctan} f(x_1)| = \frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x_0)}\,(x_2 - x_1)\,.$$

Donc,

$$\pi \geqslant \frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x_0)}\,(x_2 - x_1)$$

et

$$\frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x_0)} \leqslant \frac{\pi}{x_2 - x_1} < 1.$$

II.2.22. On a

$$\operatorname{Arctan} f(x_2) - \operatorname{Arctan} f(x_1) = \frac{f'(x_0)}{1 + f^2(x_0)}\,(x_2 - x_1)$$

pour $a < x_1 < x_2 < b$. D'après (ii),

$$\operatorname{Arctan} f(x_2) - \operatorname{Arctan} f(x_1) \geqslant -(x_2 - x_1).$$

En faisant tendre x_2 vers b^- et x_1 vers a^+ et en utilisant (i), on voit que $-\pi \geqslant -(b-a)$.

II.2.23. D'après le théorème des accroissements finis,

$$f'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h \to 0^-} f'(b + \theta h) = A.$$

II.2.24. Puisque $f'(x) = O(x)$, il existe $M > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|f'(x)| \leqslant Mx$ pour $x \geqslant x_0$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= \left|f'(x_0 + \theta(x - x_0))\right|(x - x_0)\\ &\leqslant M(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \leqslant Mx(x - x_0) \leqslant Mx^2\end{aligned}$$

pour $x \geqslant x_0$.

II.2.25. Le résultat se déduit du théorème de Rolle appliqué à la fonction auxiliaire

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k(x)-f_k(a)-(g_k(x)-g_k(a))\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}\right).$$

II.2.26. On suppose d'abord que f est uniformément dérivable sur $[a\,,b]$. Pour toute suite $\{h_n\}$ convergente vers 0 telle que $h_n\neq 0$ et $x+h_n\in\mathbf{I}$ pour $x\in[a\,,b]$, la suite de fonctions $\left\{\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right\}$ est uniformément convergente sur $[a\,,b]$ vers f'. D'après le résultat de **I.2.34**, f' est continue sur $[a\,,b]$.

On suppose maintenant que f' est continue sur $[a\,,b]$. D'après le théorème des accroissements finis, pour $x\in[a\,,b]$, $x+h\in\mathbf{I}$, on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=f'(x+\theta h)-f'(x)$$

pour un certain $0<\theta<1$. La continuité uniforme de f' sur $[a\,,b]$ implique alors la dérivabilité uniforme de f.

II.2.27. La fonction f étant continue sur $[a\,,b]$, elle est bornée et il existe donc $A\geqslant 0$ tel que $|f(x)|\leqslant A$ pour $x\in[a\,,b]$. Par hypothèse,

$$\left|g'(x)\right|\leqslant\frac{1+A}{|\lambda|}\,|g(x)|\,.$$

Soit $[c\,,d]$ un sous-intervalle de $[a\,,b]$ dont la longueur est inférieure à $\frac{1}{2}\frac{|\lambda|}{1+A}=\frac{B}{2}$ et tel que $g(c)=0$. Pour $x_0\in[c\,,d]$, on a

$$|g(x_0)-g(c)|=|g(x_0)|=(x_0-c)\left|g'(x_1)\right|\leqslant\frac{B}{2}\,\frac{|g(x_1)|}{B}\,.$$

En répétant le procédé, on obtient une suite décroissante $\{x_n\}$ de points de $[c\,,d]$ telle que

$$|g(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}\,|g(x_1)|\leqslant\ldots\leqslant\frac{1}{2^n}\,|g(x_n)|\leqslant\ldots$$

On a donc $g(x_0)=0$. Il suffit pour conclure la démonstration de décomposer $[a\,,b]$ en un nombre fini de sous-intervalles de longueurs inférieures à $\frac{B}{2}$.

On peut noter ici que l'hypothèse de continuité de f sur $[a\,,b]$ peut être remplacée par l'hypothèse que f est bornée sur $[a\,,b]$.

II.2.28. D'après le théorème des accroissements finis généralisé, on a

$$\frac{\frac{f(2x)}{2x}-\frac{f(x)}{x}}{\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}}=f(\zeta)-\zeta f'(\zeta),$$

où $x < \zeta < 2x$. D'où,

$$\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{\zeta}{2x}\left(f'(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right).$$

Ceci implique

$$0 \leqslant \left|f'(\zeta)\right| \leqslant 2\left|\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x}\right| + \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|.$$

On obtient le résultat cherché par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$.

II.2.29. Le résultat est une conséquence immédiate de **I.6.30**.

II.2.30. Par hypothèse,

$$f'(px+qy) = f'(qx+py) \quad \text{pour} \quad x \neq y. \tag{$*$}$$

Si $p \neq q$, f' est alors une fonction constante. En effet, si $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, en prenant alors

$$x = \frac{p}{2p-1}x_1 + \frac{p-1}{2p-1}x_2 \quad \text{et} \quad y = \frac{p-1}{2p-1}x_1 + \frac{p}{2p-1}x_2,$$

on a $x_1 = px + (1-p)y$ et $x_2 = py + (1-p)x$, ce qui contredit $(*)$. On a donc prouvé que f est une fonction affine si $p \neq q$. Si $p = q = \frac{1}{2}$, d'après le résultat du problème précédent, f est un polynôme du second degré.

II.2.31. On suppose, par exemple, que $f'(a) < f'(b)$ pour $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$. Soit λ un réel tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. On considère la fonction définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$. On a $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$, donc g atteint son minimum sur $[a\,,b]$ en un point x_0 de l'intervalle ouvert $]a\,,b[$ et $g'(x_0) = 0$ ou, dit autrement, $f'(x_0) = \lambda$.

II.2.32.

(a) Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $a > 0$ tel que $|f(x) + f'(x)| < \varepsilon$ pour $x \geqslant a$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe $\zeta \in\,]a\,,x[$ tel que

$$\frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{e^x - e^a} = f(\zeta) + f'(\zeta).$$

Donc,

$$\left|f(x) - f(a)e^{a-x}\right| < \varepsilon\left|1 - e^{a-x}\right|,$$

ce qui donne
$$|f(x)| < |f(a)|\, e^{a-x} + \varepsilon \left|1 - e^{a-x}\right|.$$
En conséquence, $|f(x)| < 2\varepsilon$ pour x suffisamment grand.

(b) Appliquez le théorème des accroissements finis généralisé à $x \mapsto e^{\sqrt{x}} f(x)$ et $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ et procédez comme en (a).

II.2.33. Les hypothèses impliquent que la fonction $x \mapsto e^{-x} f(x)$ admet au moins trois zéros distincts dans $[a\,,b]$ et, d'après le théorème de Rolle, sa dérivée $x \mapsto e^{-x}(f'(x) - f(x))$ admet au moins deux zéros distincts dans cet intervalle. Ceci implique alors que la dérivée seconde admet au moins un zéro, ce qui signifie que l'équation $e^{-x}(f(x) + f''(x) - 2f'(x)) = 0$ a au moins une racine dans $[a\,,b]$.

II.2.34. On observe d'abord que $Q(x) = F(x)G(x)$, où
$$F(x) = P'(x) + xP(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right)',$$
$$G(x) = xP'(x) + P(x) = (xP(x))'.$$
Soit $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ les racines du polynôme P. D'après le théorème de Rolle, F a au moins $n-1$ zéros que l'on note b_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et G a n racines que l'on note c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. On peut supposer que
$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n,$$
$$0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \ldots < c_n < a_n.$$
Si $b_i \neq c_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, le polynôme Q admet au moins $2n-1$ racines. On suppose maintenant qu'il existe i tel que $b_i = c_{i+1} = r$. On a alors $P'(r) + rP(r) = 0 = rP'(r) + P(r)$ et $\left(r^2 - 1\right) P(r) = 0$. Puisque $r > 1$, cela donne $P(r) = 0$, contradiction.

II.2.35. Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ les racines de P. Les hypothèses impliquent $P'(x_m) > 0$, $P'(x_{m-1}) < 0$ et $P'(x_{m-2}) > 0, \ldots$. On voit de plus que $Q(x_m) < 0$, $Q(x_{m-1}) > 0, \ldots$. Si m est impair, alors $Q(x_1) < 0$. Si m est pair, alors $Q(x_1) > 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, Q a au moins $m+1$ racines réelles lorsque m est impair et au moins m racines réelles lorsque m est pair. On montre maintenant que tous les racines réelles de Q sont distinctes. Puisque toutes les racines de P sont réelles et distinctes, $(P'(x))^2 > P(x)P''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En effet, puisque
$$P(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

on voit que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - x_j}$$

pour $x \neq x_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Donc,

$$P(x)P''(x) - \left(P'(x)\right)^2 = -P^2(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(x - x_j)^2} < 0.$$

De plus, pour $x = x_j$,

$$\left(P'(x_j)\right)^2 > 0 = P(x_j)P''(x_j).$$

L'inégalité $(P'(x))^2 > P(x)P''(x)$ est donc prouvée. D'où,

$$\begin{aligned} P(x)Q'(x) &= P(x)(2P(x)P'(x) - P''(x)) \\ &= 2P'(x)\left(P^2(x) - P'(x)\right) + 2\left(P'(x)\right)^2 - P(x)P''(x) \\ &> 2P'(x)P^2(x) - \left(P'(x)\right)^2. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$P(x)Q'(x) > 2P'(x)Q(x), \tag{$*$}$$

ce qui montre que tous les zéros de Q sont simples. Si y_1 et y_2 sont deux zéros consécutifs de Q, alors $Q'(y_1)$ et $Q'(y_2)$ sont de signes opposés. D'après $(*)$, $P(y_1)$ et $P(y_2)$ sont alors aussi de signes opposés. Il y a donc entre deux zéros consécutifs de Q au moins un zéro de P. Donc, lorsque m est impair, si Q a plus de $m+1$ zéros réels, alors P aurait plus de m zéros réels, ce qui contredirait les hypothèses. De même, lorsque m est pair, si Q a plus de m zéros réels, il aurait alors plus de $m + 2$ zéros réels et, en conséquence, P aurait plus de m zéros réels, contradiction.

II.2.36. [G. Peyser, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 1102-1104]. On remarque que si toutes les racines d'un polynôme P sont réelles, d'après le théorème de Rolle, toutes les racines de P' sont alors aussi réelles et se trouvent entre les racines de P et P' a donc bien la forme donnée dans le problème. On ne prouve que la première proposition, la démonstration de la seconde étant semblable à la première. Clairement, $P(x) = Q(x)(x - a_n)$ et

$$P'(x) = Q'(x)(x - a_n) + Q(x). \tag{$*$}$$

Il suffit de considérer le cas où $a_i < a_{i+1}$. Supposons, par exemple, que $P(x) > 0$ pour $x \in \left]a_i\,, a_{i+1}\right[$. On a alors $Q(x) < 0$ pour $x \in \left]a_i\,, a_{i+1}\right[$. De plus, l'égalité $(*)$ implique $Q'(x) < 0$ pour $x \in \left]a_i\,, c_i\right[$ et $Q'(c_i) < 0$. En conséquence, $d_i > c_i$, ce qui conclut la démonstration de la proposition.

II.2.37. [G. Peyser, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 1102-1104]. On suppose que $a_{n-1} < a_n$ et $\varepsilon > 0$. Clairement,

$$S(x) = P(x) - \varepsilon R(x)$$

où $R(x) = (x - a_2)(x - a_3)\cdots(x - a_n)$. On suppose, par exemple, que $P(x) < 0$ pour $x \in]a_{n-1}\,,a_n[$. On a alors aussi $S(x) < 0$ et $R(x) < 0$ pour $x \in]a_{n-1}\,,a_n[$. Puisque

$$S'(x) = P'(x) - \varepsilon R'(x), \tag{$*$}$$

on voit que $S'(c_{n-1}) = -\varepsilon R'(c_{n-1})$. Le problème précédent implique $R'(c_{n-1}) > 0$ et, d'après $(*)$, on a $S'(c_{n-1}) < 0$. Puisque S' passe de négatif à positif en un point de l'intervalle $]a_{n-1}\,,a_n[$, on voit que $f_{n-1} > c_{n-1}$. L'autre proposition se prouve de la même façon.

II.2.38. [G. Peyser, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1102-1104]. On pose $W(x) = (x - a_i)^i\,(x - a_{i+1})$. Si $i = 2, 3, \ldots, n-1$, alors $W'(x) = 0$ pour $x = a_i$ et pour

$$x = c = \frac{ia_{i+1} + a_i}{i+1} = a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i+1}\,.$$

Si $i = 1$, W' ne s'annule alors qu'en c. En appliquant d'abord le premier résultat de **II.2.36** $(n-i-1)$ fois, puis le premier résultat du problème précédent $(i-1)$ fois en prenant ε successivement égal à $a_i - a_1$, $a_i - a_2$, …, $a_i - a_{i-1}$, on arrive à

$$c_i \leqslant c = a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i+1}\,.$$

On peut appliquer les secondes parties des deux problèmes précédents pour obtenir l'inégalité de gauche.

II.2.39. On observe que, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout x dans $]0\,,1/K[\, \cap\, [0\,,1]$, on a

$$|f(x)| \leqslant Kx\,|f(x_1)| \leqslant K^2 x x_1\,|f(x_2)| \leqslant \ldots \leqslant K^n x x_1 \cdots x_{n-1}\,|f(x_n)|\,,$$

où $0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x$. Donc, $|f(x)| \leqslant (Kx)^n\,|f(x_n)|$. La fonction f étant bornée, il s'ensuit que $f(x) \equiv 0$ sur $[0\,,1/K] \cap [0\,,1]$. Si $K \geqslant 1$, on peut prouver de la même manière que $f(x) \equiv 0$ sur $[1/K\,,2/K]$. On arrive, en répétant le procédé un nombre fini de fois, à $f(x) \equiv 0$ sur $[0\,,1]$.

II.2.40. Pour $x_1 \in \mathbf{J}_1$ et $x_3 \in \mathbf{J}_3$, on a

$$\frac{f^{(k-1)}(x_3) - f^{(k-1)}(x_1)}{x_3 - x_1} = f^{(k)}(\zeta)$$

pour un certain $\zeta \in]x_1, x_3[$. Donc,

$$\begin{aligned} m_k(\mathbf{J}) &\leqslant \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\left|f^{(k-1)}(x_3)\right| + \left|f^{(k-1)}(x_1)\right|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_2}\left(\left|f^{(k-1)}(x_3)\right| + \left|f^{(k-1)}(x_1)\right|\right). \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité voulue en prenant la borne inférieure sur tous les $x_1 \in \mathbf{J}_1$ et $x_3 \in \mathbf{J}_3$.

II.2.41. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 1$, l'inégalité se déduit du théorème des accroissements finis et du fait que $|f(x)| \leqslant 1$. On suppose que l'inégalité à prouver est vérifiée à l'ordre k. D'après le résultat du problème précédent, on a

$$\begin{aligned} m_{k+1}(\mathbf{J}) &\leqslant \frac{1}{\lambda_2}\left(m_k(\mathbf{J}_1) + m_k(\mathbf{J}_3)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1^k} 2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k + \frac{1}{\lambda_3^k} 2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k\right) \\ &= 2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k \left(\frac{1}{\lambda_1^k \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3^k \lambda_2}\right). \end{aligned}$$

En prenant $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{k\lambda}{2(k+1)}$ et $\lambda_2 = \frac{\lambda}{k+1}$, on obtient

$$m_{k+1}(\mathbf{J}) \leqslant \frac{2^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}(k+1)^{k+1}}{\lambda^{k+1}}.$$

II.2.42. On a

$$P^{(p-1)}(x) = (p-1)!\, a_{p-1} + \frac{(p+1)!}{2!} a_{p+1} x^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-p+1)!} a_n x^{n-p+1}.$$

Le théorème de Rolle implique qu'entre deux zéros réels consécutifs de P se trouve exactement un zéro de P'. Le polynôme $P^{(p-1)}$ a donc $n - p + 1$ zéros réels distincts et $P^{(p)}$ a $n - p$ zéros réels distincts. Comme on l'a déjà mentionné, entre deux zéros réels consécutifs de $P^{(p-1)}$ se trouve exactement un zéro de $P^{(p)}$.

Supposons, contrairement à la proposition à prouver, que a_{p-1} et a_{p+1} sont de même signe. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'ils sont tous deux positifs. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $P^{(p-1)}$ soit décroissant sur $]-\varepsilon, 0[$ et croissant sur $]0, \varepsilon[$. Clairement, $P^{(p)}(0) = 0$. S'il n'y a pas d'autres zéros de $P^{(p)}$, on a alors $P^{(p-1)}(x) > P^{(p-1)}(0) > 0$ pour $x \neq 0$, contradiction. Si $P^{(p)}$ a des racines non nulles, on note $x_0 \neq 0$ la plus proche de 0. Il y a donc une racine de $P^{(p-1)}$ entre 0 et x_0. D'autre part, $P^{(p-1)}(x) > 0$ sur l'intervalle ouvert d'extrémités 0 et x_0, contradiction.

II.3. Formule de Taylor et règle de L'Hospital

II.3.1. On remarque que pour $n = 1$, la formule se déduit immédiatement de la définition de $f'(x_0)$. Pour $n > 1$, on pose

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right).$$

On a $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$ et, par définition de la dérivée n-ième,

$$r_n^{(n-1)}(x) = r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0) = r_n^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

d'où $r_n^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$r_n^{(n-2)}(x) = r_n^{(n-2)}(x) - r_n^{(n-2)}(x_0) = r_n^{(n-1)}(c)(x - x_0),$$

c étant un point de l'intervalle ouvert d'extrémités x et x_0. On voit que $r_n^{(n-2)}(x) = o\left((x - x_0)^2\right)$ car $|c - x_0| < |x - x_0|$. En répétant n fois le procédé, on obtient $r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

II.3.2. Pour $x, x_0 \in [a\,, b]$, on pose

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right).$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $x > x_0$. Sur $[x_0\,, x]$, on définit la fonction auxiliaire φ par

$$\varphi(z) = f(x) - \left(f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x - z) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n\right).$$

On a

$$\varphi(x_0) = r_n(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0. \tag{1}$$

De plus, φ' existe sur $]x_0\,, x[$ et

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n. \tag{2}$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisé, on a

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

où ψ est une fonction continue sur $[x_0\,,x]$, dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas sur $]x_0\,,x[$. Les relations (1) et (2) donnent alors

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(x-c)^n\,.$$

En prenant $\psi(z)=(x-z)^p$ et en écrivant $c=x_0+\theta(x-x_0)$, on arrive à

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}\,(1-\theta)^{n+1-p}\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

II.3.3. Ces résultats sont des cas particuliers du problème précédent. Il suffit en effet de prendre

(a) $p=n+1$,

(b) $p=1$.

II.3.4. Une intégration par parties donne

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=\left.-(x-t)f'(t)\right]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt.$$

Donc,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt.$$

Il suffit de répéter n fois le même raisonnement pour arriver à la version demandée de la formule de Taylor.

II.3.5. Pour $n=1$,

$$\begin{aligned}R_2(x)&=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_2}f^{(2)}(t_1)\,dt_1dt_2=\int_{x_0}^{x}(f'(t_2)-f'(x_0))\,dt_2\\&=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

On arrive à la formule demandée par récurrence.

II.3.6. La formule de Taylor avec reste de Lagrange (voir **II.3.3(a)**) donne

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{3}{3!\times 8}\,(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}\,x^3$$

pour un certain $0 < \theta < 1$. Donc, pour $|x| < \frac{1}{2}$,

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \tfrac{1}{2}\,x - \tfrac{1}{8}\,x^2\right)\right| \leqslant \frac{3\,|x|^3}{48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,|x|^3}{4} \leqslant \frac{1}{2}\,|x|^3\,.$$

II.3.7. En appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange (voir **II.3.3**) à $f(x) = (1+x)^\alpha$, on obtient

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)\,(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2}\,x^2$$

pour un certain $0 < \theta < 1$. Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\,(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2} > 0 \quad \text{pour} \quad \alpha > 1 \quad \text{ou} \quad \alpha < 0$$

et

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\,(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < 1.$$

II.3.8. La formule de Taylor donne

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(0)x + \frac{1}{2}\,f''(\theta_1(x))x^2}{g'(0)x + \frac{1}{2}\,g''(\theta_2(x))x^2}\,.$$

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))} = \frac{f'(0)x + \theta(x)f''(\theta_3(x))}{g'(0)x + \theta(x)g''(\theta_4(x)}\,.$$

En utilisant les égalités précédentes et la continuité de f'' et de g'' en 0, on vérifie facilement que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}\,.$$

II.3.9.

(a) D'après la formule de Taylor, on a

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(-x) + \frac{f''(x)}{2!}(-x)^2 + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x - \theta_1 x)}{(n+1)!}(-x)^{n+1}.$$

On obtient l'égalité demandée en prenant $\theta = 1 - \theta_1$.

(b) Observez que $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f\left(x - \frac{x^2}{1+x}\right)$ et procédez comme en (a).

II.3.10. On a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \frac{f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2} + \theta_1 \frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

De même,

$$f(0) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{f'\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \frac{f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} - \frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2} + \theta_2 \frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

En soustrayant une égalité à l'autre, on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{1!} f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3!} f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{2}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} + \frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2} + \theta_1 \frac{x}{2}\right) + f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2} + \theta_2 \frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Le résultat cherché se déduit alors du fait qu'une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (voir **II.2.31**).

II.3.11. On applique le problème précédent en prenant $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x > 0$ et on remarque que les dérivées d'ordre impair de f sont strictement positives pour $x > 0$.

II.3.12. Avec la formule de Taylor avec reste de Peano (voir **II.3.1**), on a

(a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o\left(h^2\right)}{h^2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{2f(x)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)+o\left(h^2\right)}{h^2}\right)\\
&\quad=f''(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{h^2f''(x)+o\left(4h^2\right)-2o\left(h^2\right)}{h^2}=f''(x).
\end{aligned}$$

II.3.13. On peut, comme dans la solution du problème précédent, appliquer la formule de Taylor avec reste de Peano (voir **II.3.1**).

II.3.14.

(a) La formule de Taylor donne, pour $x>0$,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}>\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,.$$

(b) On a, pour $x>0$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\frac{1}{(1+\theta_1x)^5}>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\,.$$

De même, pour $x>-1$, $x\neq 0$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\frac{1}{(1+\theta_2x)^4}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\,.$$

(c) En appliquant la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}(1+\theta_1 x)^{-\frac{7}{2}}x^4 \\ &< 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\end{aligned}$$

et

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+\theta_2 x)^{-\frac{5}{2}}x^3 > 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 .$$

II.3.15. D'après **II.3.1**, on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x) + o\left(h^{n+1}\right).$$

D'autre part,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h).$$

En soustrayant la première égalité à la seconde, on obtient

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}$$

et

$$\theta(h) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{\theta(h)h}} .$$

Le résultat demandé découle alors du fait que $f^{(n+1)}(x)$ existe et n'est pas nul.

II.3.16. Pour $0 < x \leqslant 1$, on a

$$f(0) = f(x-x) = f(x) - f'(x)x + f''(x-\theta_1 x)\frac{x^2}{2} \tag{1}$$

et, pour $0 \leqslant x < 1$,

$$f(1) = f(x+(1-x)) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(x+\theta_2(1-x))\frac{(1-x)^2}{2} . \tag{2}$$

On note que (1) implique $|f'(1)| \leqslant \frac{A}{2}$ et (2) donne $|f'(0)| \leqslant \frac{A}{2}$. De plus, en soustrayant (2) à (1), on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(f''(x-\theta_1 x)x^2 - f''(x+\theta_2(1-x))(1-x)^2\right) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1.$$

D'où,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}\left(2x^2 - 2x + 1\right) < \frac{A}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

II.3.17.

(a) Pour $x \in [-c\,,c]$, on a

$$f(c) - f(x) = f'(x)(c-x) + \frac{f''(x+\theta_1(c-x))}{2}\,(c-x)^2 \qquad (*)$$

et

$$f(-c) - f(x) = -f'(x)(c+x) + \frac{f''(x-\theta_2(c+x))}{2}\,(c+x)^2\,.$$

Donc,

$$f'(x) = \frac{f(c)-f(-c)}{2} - \frac{(c-x)^2 f''(x+\theta_1(c-x)) - (c+x)^2 f''(x-\theta_2(c+x))}{4c}\,.$$

En conséquence,

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{M_0}{c} + \left(c^2+x^2\right)\frac{M_2}{2c}\,.$$

(b) Pour $x \in [-c\,,c[$, on obtient avec $(*)$ dans la solution de (a)

$$f'(x) = \frac{f(c)-f(x)}{h} - \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2}\,h,$$

où $h = c - x > 0$. Donc, $|f'(x)| \leqslant 2\frac{M_0}{h} + \frac{1}{2}\,M_2 h$. En prenant $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, on a alors $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$, ce qui implique $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

II.3.18. L'inégalité $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$ a été prouvée en **II.3.17(b)**. L'égalité est atteinte, par exemple, pour f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

On a en effet $M_0 = 1$ et $M_1 = M_2 = 4$.

II.3.19. Pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2}$$

et

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x-\theta_1 h)\frac{h^2}{2}\,.$$

Donc,

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right) - \frac{h}{4}\left(f''(x+\theta h) - f''(x-\theta_1 h)\right),$$

ce qui implique

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 \quad \text{pour} \quad h > 0.$$

Il suffit de prendre $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$ pour obtenir l'inégalité demandée.

II.3.20. Pour $p = 2$, le résultat est contenu dans le problème précédent. On procède par récurrence et on suppose que la proposition est vérifiée aux ordres $2, 3, \ldots, p$ pour la montrer à l'ordre $p+1$. On a

$$f^{(p-1)}(x+h) = f^{(p-1)}(x) + f^{(p)}(x)h + f^{(p+1)}(x+\theta h)\frac{h^2}{2}$$

et

$$f^{(p-1)}(x-h) = f^{(p-1)}(x) - f^{(p)}(x)h + f^{(p+1)}(x-\theta_1 h)\frac{h^2}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) = &\frac{1}{2h}\left(f^{(p-1)}(x+h) - f^{(p-1)}(x-h)\right) \\ &- \frac{h}{4}\left(f^{(p+1)}(x+\theta h) - f^{(p+1)}(x-\theta_1 h)\right) \end{aligned}$$

et

$$\left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{M_{p-1}}{h} + \frac{h}{2}M_{p+1}, \quad \text{pour} \quad h > 0.$$

En prenant $h = \sqrt{2\frac{M_{p-1}}{M_{p+1}}}$, on trouve $M_p \leqslant \sqrt{2M_{p-1}M_{p+1}}$. L'hypothèse de récurrence au rang $p-1$ donne par un simple calcul

$$M_p \leqslant 2^{\frac{p}{2}} M_0^{\frac{1}{p+1}} M_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}. \tag{$*$}$$

La proposition est donc prouvée pour $k = p$. On la prouve maintenant pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}},$$

ce qui, combiné à $(*)$, donne

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(p+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p+1}} M_{p+1}^{\frac{k}{p+1}}.$$

II.3.21. On suppose que $|f''(x)| \leqslant M$ $(M > 0)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la formule de Taylor, on a

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2}$$

pour $x, h \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}\,.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe x_0 tel que

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \text{pour } x > x_0,\ h > 0.$$

En prenant $h = \sqrt{2\frac{\varepsilon}{M}}$, on obtient $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2\varepsilon M}$ pour $x > x_0$, ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

II.3.22. Pour $x > 0$, on a

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}\,f''(\xi)$$

pour un $\xi \in\,]x\,, x+1[$. Donc,

$$xf'(x) = \frac{x}{x+1}\,(x+1)\,f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\xi}\cdot\xi f''(\xi)$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

II.3.23. La formule de Taylor donne, pour $u, x \in\,]0\,,1[$, $u > x$,

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}\,f''(\xi)\,(u-x)^2$$

pour un $\xi \in\,]x\,,u[$. En prenant $u = x + \varepsilon(1-x)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(u) - f(x) = \varepsilon(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 f''(x + \theta\varepsilon(1-x))\,(1-x)^2$$

pour un $\theta \in\,]0\,,1[$. En faisant tendre x vers 1^-, on voit que

$$0 = \lim_{x\to1^-}\left((1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\,\varepsilon f''(x+\theta\varepsilon(1-x))\,(1-x)^2\right).$$

Par définition de la limite, si $\varepsilon_1 > 0$, alors

$$\begin{aligned}(1-x)\left|f'(x)\right| &\leqslant \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\left|f''(x+\theta\varepsilon(1-x))\right|(1-x)^2\\ &\leqslant \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\frac{M\varepsilon}{(\theta\varepsilon-1)^2}\end{aligned}$$

pour x suffisamment proche de 1. Puisque l'on peut choisir arbitrairement $\varepsilon > 0$, on a $(1-x)\,|f'(x)| \leqslant \varepsilon_1$, ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0$.

II.3.24. On a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(x_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

et

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(x_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

pour un $x_1 \in \left]a\,,\frac{a+b}{2}\right[$ et un $x_2 \in \left]\frac{a+b}{2}\,,b\right[$. Donc,

$$|f(b)-f(a)| = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\frac{1}{2}\left|f''(x_2)-f''(x_1)\right| \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left|f''(c)\right|,$$

où $|f''(c)| = \max\{|f''(x_1)|\,,|f''(x_2)|\}$.

II.3.25. La formule de Taylor implique

$$1 = f(1) = \frac{1}{2}\,f''(0) + \frac{f'''(x_1)}{3!}\quad\text{et}\quad 0 = f(-1) = \frac{1}{2}\,f''(0) + \frac{f'''(x_2)}{3!}$$

pour un $x_1 \in \,]0\,,1[$ et un $x_2 \in \,]-1\,,0[$. Donc,

$$f'''(x_1) + f'''(x_2) = 6,$$

ce qui implique $f'''(x_1) \geqslant 3$ ou $f'''(x_2) \geqslant 3$.

On peut noter que l'égalité est atteinte, par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3+x^2\right)$.

II.3.26. On écrit

$$f(t) = f(x) + (t - x)Q(t)$$

et on dérive chaque membre de cette égalité par rapport à t pour obtenir

$$f'(t) = Q(t) + (t - x)Q'(t). \tag{1}$$

En remplaçant t par x_0, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 Q'(x_0). \tag{2}$$

En dérivant (1) par rapport à t, en prenant $t = x_0$ et en utilisant (2), on obtient

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}(x - x_0)^3 Q''(x_0).$$

Il suffit de répéter n fois le procédé pour obtenir l'égalité demandée.

II.3.27. D'après la formule de Taylor donnée en **II.3.1**, on a

$$\begin{aligned} f(y_n) &= f(0) + f'(0)y_n + o(y_n), \\ f(x_n) &= f(0) + f'(0)x_n + o(x_n). \end{aligned}$$

Donc,

$$f'(0) = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} + \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n}. \tag{$*$}$$

(a) Puisque $x_n < 0 < y_n$, on voit que

$$\left|\frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n}\right| \leqslant \frac{|o(y_n)|}{y_n - x_n} + \frac{|o(x_n)|}{y_n - x_n} \leqslant \frac{|o(y_n)|}{y_n} + \frac{|o(x_n)|}{-x_n}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n} = 0,$$

ce qui, avec $(*)$, montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = f'(0)$.

(b) D'après $(*)$, il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{o(y_n)-o(x_n)}{y_n-x_n} = 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{o(y_n)}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_n - x_n} - \frac{o(x_n)}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_n - x_n}\right) = 0,$$

la dernière égalité se déduisant du fait que $\left\{\frac{y_n}{y_n-x_n}\right\}$ et $\left\{\frac{x_n}{y_n-x_n}\right\}$ sont bornées.

(c) D'après le théorème des accroissements finis, $D_n = f'(\theta_n)$ où $x_n < \theta_n < y_n$. Le résultat se déduit alors de la continuité de f' en 0.

II.3.28. On remarque d'abord que P est un polynôme de degré au plus m. En dérivant l'égalité

$$(1-y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k y^k,$$

on obtient

$$-(m+1)(1-y)^m = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k ky^{k-1}. \qquad (1)$$

En prenant $y = 1$, on a

$$0 = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k k. \qquad (2)$$

On en déduit que $P^{(m-1)}(0) = 0$. On dérive alors (1), on prend $y = 1$ et on voit, avec (2), que $P^{(m-2)}(0) = 0$. En poursuivant ce procédé, on montre que $P^{(j)}(0) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. De plus, $P^{(m)}(0) = 0$ car

$$0 = (1-1)^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k .$$

La formule de Taylor implique alors $P(x) \equiv 0$.

II.3.29. [E. I. Poffald, *Amer. Math. Monthly* 97 (1990), 205-213]. On aura besoin de la forme suivante de la *formule de la moyenne* pour les intégrales.

Théorème. *Soit f et g des fonctions continues sur $[a\,,b]$, g étant de signe constant sur cet intervalle. Il existe alors $\xi \in\,]a\,,b[$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. On pose

$$m = \min\{f(x) : x \in [a\,,b]\} \quad \text{et} \quad M = \max\{f(x) : x \in [a\,,b]\}\,.$$

On suppose, par exemple, que $g(x) > 0$. On a $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. En intégrant membre à membre cette inégalité, on obtient

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

La proposition se déduit alors du fait que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. □

On suit maintenant E. I. Poffald pour démontrer la formule demandée. La formule de Taylor avec reste intégral (voir **II.3.4**) donne

$$f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right) = f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\frac{x}{n+1} + \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}\,x^n \\
&\quad = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} \\
&\qquad + \left(f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\frac{x}{n+1} + \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt\right)\frac{x^n}{n!} \\
&\quad = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{x^n}{n!}\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt.
\end{aligned}$$

D'autre part, la formule de Taylor avec reste intégral donne aussi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\,x^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,dt.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
&f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}\,x^n\right) \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,dt - \frac{x^n}{n!}\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt \\
&\quad = \frac{1}{n!}\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right)\right) dt \\
&\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\int_{\frac{x}{n+1}}^x f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,dt.
\end{aligned}$$

On considère la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right) \quad \text{pour} \quad t \in [0\,,x].$$

On vérifie facilement que $g'(t) > 0$ pour $t \in\,]0\,,x[$ et $g(0) = 0$. La fonction g est donc strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0\,,x[$. La formule de la moyenne pour les intégrales prouvée au début de la solution nous donne

$$\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right)\right) dt = f^{(n+2)}(\xi_1)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)\,dt$$

et

$$\int_{\frac{x}{n+1}}^{x} f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,dt = f^{(n+2)}(\xi_2)\int_{\frac{x}{n+1}}^{x} (x-t)^{n+1}\,dt.$$

Il découle de ce qui précède que

$$f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}\,x^n\right)$$
$$= \frac{1}{n!}\,f^{(n+2)}(\xi_1)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)\,dt + \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+2)}(\xi_2)\int_{\frac{x}{n+1}}^{x} (x-t)^{n+1}\,dt.$$

On voit, en posant

$$\lambda_1 = \int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \int_{\frac{x}{n+1}}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\,dt,$$

que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{x^{n+2}n}{2\,(n+1)^2\,(n+2)}\,.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)\,dt + f^{(n+2)}(\xi_2)\int_{\frac{x}{n+1}}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\,dt}{\frac{x^{n+2}n}{2(n+1)^2(n+2)}} = f^{(n+2)}(\xi),$$

ξ se trouvant entre ξ_1 et ξ_2. Donc,

$$f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}\,x^n\right)$$
$$= \frac{1}{n!}\,f^{(n+2)}(\xi)\frac{x^{n+2}n}{2\,(n+1)^2\,(n+2)} = \frac{n}{2(n+1)}\,f^{(n+2)}(\xi)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\,.$$

Il suffit pour conclure la démonstration de prendre $\theta = \frac{\xi}{x}$.

II.3.30. Les hypothèses et la formule de Taylor appliquée à $f^{(n)}$ donnent

$$f^{(n)}(x_0 + \theta(x)(x - x_0)) \\ = f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_1\theta(x)(x - x_0))}{p!} (\theta(x)(x - x_0))^p .$$

D'où,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_1\theta(x)(x - x_0))}{n!p!}(x - x_0)^{n+p}(\theta(x))^p .$$

D'autre part,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_2(x - x_0))}{(n+p)!}(x - x_0)^{n+p} .$$

On obtient en regroupant ces deux dernières égalités

$$\frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_1\theta(x)(x - x_0))}{n!p!}(\theta(x))^p = \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_2(x - x_0))}{(n+p)!} .$$

Un passage à la limite lorsque x tend vers x_0, $f^{(n+p)}$ étant continue et $f^{(n+p)}(x_0) \neq 0$, donne $\frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{n!p!} \lim\limits_{x \to x_0} (\theta(x))^p$.

On remarque que l'on retrouve le résultat donné en **II.3.15** si $p = 1$.

II.3.31. D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx) &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} \left(f'(0)kx + \frac{1}{2} f''(\theta kx)k^2x^2\right) \\ &= f'(0)x \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1\right)}{2} + \eta(x), \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f''(\theta kx)k^2x^2. \tag{2}$$

Puisque f'' est bornée dans un voisinage de 0 et

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} k^2 = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]+1\right)}{6},$$

(2) implique $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta(x) = 0$ et (1) donne alors

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx) = \frac{f'(0)}{2}.$$

II.3.32. Le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir, par exemple, **II.4.30 (vol. I)**) implique que l'ensemble des zéros de f admet au moins une valeur d'adhérence dans $[c\,,d]$; on la notera p. Clairement, $f(p) = 0$. Soit $\{x_n\}$ une suite de zéros de f convergente vers p. D'après le théorème de Rolle, entre deux zéros de f se trouve au moins un zéro de f', donc p est aussi une valeur d'adhérence de l'ensemble des zéros de f'. Puisque f' est continue, $f'(p) = 0$ et, par récurrence, $f^{(k)}(p) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En conséquence, d'après la formule de Taylor,

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{n!}(x-p)^n$$

pour un certain $\theta \in\,]0\,,1[$. Puisque $\sup\left\{\left|f^{(n)}(x)\right| : x \in\,]a\,,b[\right\} = O(n!)$, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M\,|x-p|^n$ pour n suffisamment grand. Donc, si $x \in\,]a\,,b[$ et $|x-p| < 1$, alors $f(x) = 0$.

II.3.33. Comme dans la solution du problème précédent, on peut montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de Taylor,

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour x donné, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ et on voit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II.3.34.

(a) 1.

(b) $-e/2$.

(c) $1/e$.

(d) 1.

(e) $e^{-\frac{1}{6}}$.

II.3.35. Pour prouver que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)} = e^{-\frac{a^2}{2}}$$

on peut utiliser un développement limité (voir **II.3.1**) qui donne

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$

puis appliquer **I.1.17(a)**. On peut aussi utiliser la règle de L'Hospital de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{t\to0^+}\frac{\ln f\left(a\sqrt{t}\right)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{af'\left(a\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}f\left(a\sqrt{t}\right)}\\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{a^2f''\left(a\sqrt{t}\right)}{2f\left(a\sqrt{t}\right)+2a\sqrt{t}f'\left(a\sqrt{t}\right)} = -\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

II.3.36. On suppose d'abord que $a > 1$. La règle de L'Hospital donne

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}} = a.$$

Si $0 < a < 1$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

II.3.37.

(a) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ n'existe pas, on ne peut pas appliquer la règle de L'Hospital. Clairement, la limite est égale à $1/2$.

(b) On ne peut pas appliquer la règle de L'Hospital car la dérivée de la fonction au dénominateur s'annule en $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Par ailleurs, on prouve facilement que cette limite n'existe pas.

(c) Pour trouver la limite de $f(x)^{g(x)}$ lorsque x tend vers 0^+, il suffit de déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. Cependant, cette limite ne peut pas être calculée à l'aide de la règle de L'Hospital, l'hypothèse d'existence de la limite du quotient des dérivées n'est pas vérifiée. On a prouvé en **I.1.23(a)** que la limite est égale à 1.

(d) La limite est égale à 1 (voir **I.1.23(b)**). Cependant, on ne peut pas appliquer la règle de L'Hospital pour la trouver.

II.3.38. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x\ln 2}-\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}}{x} &= \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\ln 2(2t-2\ln(1+t)-t\ln(1+t))}{2t\ln^2(1+t)}\\ &= -\frac{\ln 2}{12},\end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en appliquant successivement plusieurs fois la règle de l'Hospital. Donc, $f'(0)=-\frac{\ln 2}{12}$.

II.3.39. Comme dans la solution de **II.3.28**, on montre que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^r=\begin{cases}0 & \text{si } r=0,1,\ldots,n-1,\\ n! & r=n.\end{cases}$$

Il suffit maintenant, pour obtenir l'égalité demandée, d'appliquer n fois de suite la règle de l'Hospital.

II.3.40. On suppose d'abord que $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$ et $L\in\mathbb{R}$. D'après (iii), étant donné $\varepsilon>0$, il existe a_1 tel que

$$L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon \qquad (*)$$

pour $x\in\,]a\,,a_1[$. Puisque g' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, (i) implique que g' ne change pas de signe sur $]a\,,b[$ et g est donc strictement monotone sur $]a\,,b[$. Pour $x,y\in\,]a\,,a_1[$, $x<y$, d'après le théorème des accroissements finis généralisé, on a

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

pour un $x_0 \in]x\,,y[\subset]a\,,a_1[$. On fixe y pour l'instant. On a alors, avec $(*)$,

$$L-\varepsilon < \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} < L+\varepsilon.$$

Donc si, par exemple, g est strictement décroissante sur $]a\,,b[$, alors

$$(L-\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (L+\varepsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}\,.$$

On obtient, en faisant tendre x vers a^+,

$$L-\varepsilon \leqslant \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant L+\varepsilon,$$

ce qui conclut la démonstration dans ce cas. Les autres cas se démontrent de la même façon.

On notera que l'on a un résultat semblable pour une limite à gauche en b.

II.3.41.

(a) On a, d'après la règle de l'Hospital (voir **II.3.40**),

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}(af(x)+f'(x))}{ae^{ax}} = \frac{L}{a}\,.$$

(b) De même,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}f(x)}{e^{a\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}\left(f'(x)+\frac{a}{2\sqrt{x}}\,f(x)\right)}{\frac{a}{2\sqrt{x}}\,e^{a\sqrt{x}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right) = \frac{L}{a}\,.\end{aligned}$$

Pour voir que les propositions (a) et (b) sont fausses dans le cas où $a<0$, on considère respectivement les fonctions $f(x)=e^{-ax}$ et $f(x)=e^{-a\sqrt{x}}$.

II.3.42. En utilisant la règle de l'Hospital prouvée en **II.3.40**, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2} = c$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1-c.$$

Par hypothèse, on voit donc que $c \leqslant 1$. Clairement, si $c \neq 1$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1-c}. \tag{$*$}$$

On prouve maintenant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a, d'après la formule de Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\zeta)\frac{h^2}{2}, \quad h > 0.$$

Donc, $f(x+h) > f(x) + f'(x)h$. En faisant tendre h vers $+\infty$, on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De nouveau avec la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = 1 + \frac{1}{1-c},$$

ce qui, combiné à $(*)$, donne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{2-c}.$$

II.3.43. Pour $x \neq 0$, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x) \frac{1}{x^{n+1-k}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

On pose $g(0) = f'(0)$. Une application de la règle de l'Hospital donne

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to0} \frac{g(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2} \end{aligned}$$

et $g'(0)$ existe donc. On montre maintenant que g' est continue en 0. D'après $(*)$ et la règle de l'Hospital, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} g'(x) &= \lim_{x\to0} \frac{f'(x) - g(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{xf''(x)}{2x} = g'(0). \end{aligned}$$

La fonction g appartient donc à $\mathscr{C}^1_{]-1,1[}$. On procède alors par récurrence. On suppose que $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ et $g \in \mathscr{C}^n_{]-1,1[}$. D'après $(*)$ et la règle de l'Hospital, on a alors

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x)x^k - x^{n+1} g^{(n)}(0)}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x)x^k - x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{n!\,(-1)^n f'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}{(n+2)x^{n+1}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1} - x^n f^{(n+1)}(0)}{(n+2)x^{n+1}} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{n!\,(-1)^n f'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}{(n+2)x^{n+1}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k - x^n f^{(n+1)}(0)}{(n+2)x^{n+1}} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^n \left(f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(0) \right)}{(n+2)x^{n+1}} = \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Notre but est maintenant de prouver que $g^{(n+1)}$ est continue en 0. De nouveau à l'aide de $(*)$ et la règle de l'Hospital, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g^{(n+1)}(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k!} f^{(k)}(x) x^k}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}}{(n+2)x^{n+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+2)}(x)}{n+2} = g^{(n+1)}(0).
\end{aligned}$$

Pour résumer ce qui précède, on voit que le prolongement de g défini précédemment est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,,1[$ et $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

II.4. Fonctions convexes

II.4.1. Soit f une fonction convexe sur $\mathbf{I}$. Pour $x_1 < x < x_2$, on a

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

(voir (1) dans la solution de **I.2.33**). D'autre part, puisque

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2,$$

on voit que

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

et[9]

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ceci, combiné à (1), donne

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{2}$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_1^+, on voit que

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

[9] Cette inégalité et l'inégalité (1) forment le *lemme des trois cordes*. (N.d.T.)

De même, par passage à la limite lorsque x tend vers x_2^- dans (2), on obtient

$$f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

et $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, ce qui montre que f' est croissante.

On suppose maintenant que f' est croissante sur $\mathbf{I}$. Soit $x_1 < x < x_2$. Le théorème des accroissements finis donne

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

où $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. On obtient donc l'inégalité (2) par monotonie de f'. On prouve maintenant que (2) implique la convexité de f. On pose pour cela $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, où $x_1 < x_2$ et $\lambda \in \,]0\,,1[$. On a $x \in \,]x_1\,,x_2[$ et

$$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) \quad \text{et} \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1).$$

L'inégalité (2) donne donc $f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. On peut noter ici que l'inégalité (2) est en fait équivalente à la convexité de f.

On peut aussi noter que si f' est strictement croissante, alors f est strictement convexe sur $\mathbf{I}$.

II.4.2. Il suffit d'observer que la condition $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$ est équivalente au fait que f' est croissante et d'appliquer le résultat du problème précédent.

II.4.3. On procède par récurrence. Le cas $n = 2$ est la définition de la convexité de f sur $\mathbf{I}$. On suppose donc que l'inégalité à prouver est vérifiée à l'ordre $n \geqslant 2$ et on montre qu'elle l'est aussi à l'ordre $n+1$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. La somme $\lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}$ pouvant s'écrire sous la forme $(\lambda_n + \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\,x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\,x_{n+1}\right)$, l'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + &\lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \\ &\quad (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\,x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\,x_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la définition de la convexité de f au dernier terme.

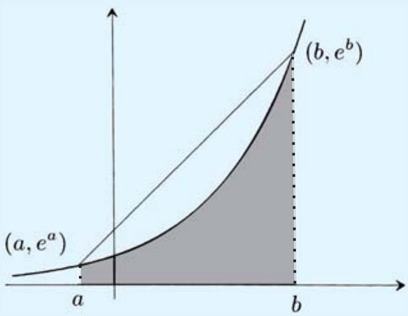
II.4.4. Puisque $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc,

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln(xy).$$

II.4.5. La fonction $x \mapsto \ln x$ étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) &\geqslant \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n)\\ &= \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n).\end{aligned}$$

II.4.6. La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.



Si, par exemple, $a < b$, l'aire sous le graphe de $y = e^x$ de $x = a$ à $x = b$ est inférieure à l'aire du trapèze de sommets $(a, 0)$, $(b, 0)$, (a, e^a) et (b, e^b). D'où,

$$e^b - e^a = \int_a^b e^t\,dt < (b-a)\frac{e^a + e^b}{2}.$$

II.4.7. On considère la fonction donnée par $f(x) = x\ln x$, $x > 0$. On a $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ et f est donc convexe. D'où,

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x}{2}\ln x + \frac{y}{2}\ln y.$$

II.4.8. Utilisez le fait que $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha > 1$, est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.4.9.

(a) La fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f''(x) > 0$ sur cet intervalle. Le résultat se déduit donc de l'inégalité de Jensen (voir **II.4.3**).

On remarque que si $p_k = \frac{1}{n}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et si $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$, on retrouve alors l'inégalité donnée en **I.2.4(a) (vol. I)**.

(b) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad 0 < x < 1.$$

On remarque que si $p_k = \frac{1}{n}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et si $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$, on retrouve alors l'inégalité donnée en **I.2.45 (vol. I)**.

II.4.10.

(a) On définit $f(x) = \ln(\sin x)$ pour $x \in \left]0\,,\pi\right[$. Puisque $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$, on voit que f est concave sur $\left]0\,,\pi\right[$. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Jensen (voir **II.4.3**) à $-f$.

(b) On considère la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\sin x) - \ln x, \quad x \in \left]0\,,\pi\right[,$$

on remarque que $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} < 0$ et on applique l'inégalité de Jensen (voir **II.4.3**) à $-f$.

II.4.11. On note que la fonction $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^a$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car

$$f''(x) = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2}\left((a-1)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) > 0.$$

D'après l'inégalité de Jensen (voir **II.4.3**), on a

$$\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^a = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right)^a \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^a}{n^{a-1}}.$$

II.4.12. On obtient, en appliquant l'inégalité de Jensen à $x \mapsto -\ln x$, $x > 0$,

$$\frac{1}{n}\left(\ln 1 + \ln\frac{2^2-1}{2} + \ln\frac{2^3-1}{2^2} + \ldots + \ln\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)$$
$$\leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\left(1 + \frac{2^2-1}{2} + \frac{2^3-1}{2^2} + \ldots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)\right) = \ln\left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n2^{n-1}}\right).$$

II.4.13.

(a) On obtient, en appliquant l'inégalité de Jensen à $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_n}.$$

D'où,

$$\frac{n^2}{x_1 + \ldots + x_n} \leqslant \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$

(b) On obtient, en appliquant l'inégalité de Jensen à $f(x) = -\ln x$, $x > 0$,

$$\begin{aligned} \ln\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right) &= \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \\ &\leqslant \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n). \end{aligned}$$

D'où,

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n. \tag{$*$}$$

On obtient la première inégalité en remplaçant x_k par $\frac{1}{x_k}$ dans $(*)$.

(c) Si un des x_k ou y_k est nul, l'inégalité est alors évidente. On peut donc supposer que $x_k, y_k > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On peut alors réécrire cette inégalité sous la forme

$$\frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1 + y_1)^{\alpha_1} (x_2 + y_2)^{\alpha_2} \cdots (x_n + y_n)^{\alpha_n}} \leqslant 1.$$

Maintenant, d'après (b),

$$\begin{aligned} &\frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1 + y_1)^{\alpha_1} (x_2 + y_2)^{\alpha_2} \cdots (x_n + y_n)^{\alpha_n}} \\ &\quad \leqslant \alpha_1 \frac{x_1}{x_1 + y_1} + \ldots + \alpha_n \frac{x_n}{x_n + y_n} + \alpha_1 \frac{y_1}{x_1 + y_1} + \ldots + \alpha_n \frac{y_n}{x_n + y_n} = 1. \end{aligned}$$

(d) Cette inégalité se déduit de (c) par récurrence sur m.

II.4.14. On suppose, contrairement à la proposition, que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$. Soit x tel que $x_1 < x_2 < x$. On a alors

$$f(x_2) = f\left(\frac{x - x_2}{x - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} x\right) \leqslant \frac{x - x_2}{x - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} f(x)$$

et

$$f(x) \geqslant \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) - \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} f(x_1). \tag{$*$}$$

Si $f(x_2) = f(x_1) + A$ avec $A > 0$, $(*)$ implique $f(x) > A\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)$, contredisant l'hypothèse que f est majorée. De même, si $f(x_1) > f(x_2)$, alors $f(x_1) = A + f(x_2)$ avec $A > 0$. En prenant alors $x < x_1 < x_2$, on obtient

$$f(x) \geqslant A\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2),$$

contredisant à nouveau le fait que f est majorée.

II.4.15. Non. Il suffit de considérer les fonctions $f(x) = e^{-x}$, $x \in \left]a\,,+\infty\right[$ et $f(x) = e^{x}$, $x \in \left]-\infty\,,a\right[$.

II.4.16. On suppose que f n'est pas monotone. Il existe alors $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ tels que

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_2) < f(x_3)$$

ou

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_2) > f(x_3).$$

La fonction f étant convexe, $f(x_2) \leqslant \max\{f(x_1), f(x_3)\}$ et la seconde possibilité ne peut donc pas être vérifiée. La continuité de f (voir **I.2.33**) implique qu'il existe $c \in [x_1\,,x_3]$ tel que $f(c) = \min\{f(x) : x \in [x_1\,,x_3]\}$. Par convexité, on voit que $f(x_1) \leqslant \max\{f(x), f(c)\}$ pour $x \in \left]a\,,x_1\right[$. Puisque $f(c) \leqslant f(x_1)$, on a donc $f(x_1) \leqslant f(x)$. Il s'ensuit que si $x, y \in \left]a\,,c\right]$, alors

- $x < y < x_1$ implique $f(y) \leqslant \max\{f(x), f(x_1)\} = f(x)$,
- $x < x_1 \leqslant y$ implique $f(y) \leqslant \max\{f(c), f(x_1)\} = f(x_1) \leqslant f(x)$,
- $x_1 \leqslant x < y$ implique $f(y) \leqslant \max\{f(x), f(c)\} = f(x)$.

On a donc prouvé que f est décroissante sur $\left]a\,,c\right]$ et on peut prouver de la même façon qu'elle est croissante sur $\left[c\,,b\right[$.

II.4.17. Il s'agit d'une conséquence immédiate du problème précédent.

II.4.18. Puisque f est bornée, d'après le problème précédent, les limites à droite en a et à gauche en b existent et sont finies. La proposition se déduit donc de **I.2.33** et **I.5.7**.

II.4.19. Soit $x_1 < x_2$ deux points de $\left]a\,,b\right[$. Pour $a < y < x_1 < x < x_2$, on a (voir (1) et (2) dans la solution de **II.4.1**)

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (*)$$

Ceci signifie que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ est croissante et minorée sur $]x_1\,, b[$. La dérivée à droite $f'_+(x_1)$ existe donc bien et

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,. \tag{$**$}$$

On note maintenant que pour $x_1 < x_2 < t < b$, on a

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}\,,$$

ce qui donne

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'_+(x_2).$$

Ceci, combiné à $(**)$, montre que $f'_+(x_1) \leqslant f'_+(x_2)$. On peut appliquer le même raisonnement pour prouver que la dérivée à gauche existe et est croissante sur $]a\,, b[$. De plus, $(*)$ implique $f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1)$ pour $x_1 \in\,]a\,, b[$. On rappelle que, d'après (2) dans la solution de **II.4.1**, si $x_1 < x < x_2$, alors

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,.$$

Ceci implique

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2).$$

Pour résumer, on a obtenu

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2) \quad \text{pour} \quad x_1 < x_2.$$

Ceci montre que si une dérivée à gauche ou à droite est continue en un point de $]a\,, b[$, les deux sont alors égales en ce point. Une fonction monotone n'ayant qu'un ensemble dénombrable de discontinuités (voir **I.2.29**), les dérivées à gauche ou à droite sont donc égales sauf sur un ensemble dénombrable.

On a aussi une proposition semblable pour les fonctions concaves.

II.4.20. Puisque f' est strictement croissante, la fonction réciproque $(f')^{-1}$ existe et

$$\xi(x) = (f')^{-1}\left(\frac{f(b+x)-f(a-x)}{b-a+2x}\right).$$

Il s'ensuit que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient, en dérivant l'égalité donnée dans le problème,

$$\frac{f'(b+x)+f'(a-x)-2f'(\xi)}{b-a+2x} = f''(\xi)\xi'(x). \tag{$*$}$$

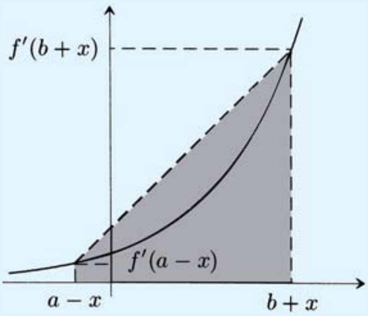
On remarque maintenant que $f'' \geqslant 0$ et, puisque f'' est strictement croissante, f' est strictement convexe (voir la solution de **II.4.1**). Donc (voir la figure ci-dessous),

$$(b-a+2x)\frac{f'(b+x)+f'(a-x)}{2} > \int_{a-x}^{b+x} f'(t)\,dt = f(b+x)-f(a-x),$$

et

$$\frac{f'(b+x)+f'(a-x)}{2} > f'(\xi).$$

On voit donc, avec (*), que $\xi'(x) > 0$ pour $x > 0$.



II.4.21. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} |y_i| > 0$. D'après **II.4.4**, on a

$$\frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q.$$

En sommant membre à membre ces inégalités pour i allant de 1 à n, on obtient

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

II.4.22. L'inégalité est évidente pour $p = 1$. Pour $p > 1$, on définit q de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $q = \frac{p}{p-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

II.4.23. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^{\frac{4}{5}}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^4\right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{16}{15}}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

II.4.24. On pose $s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $s_2 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ et $S = (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{p}}$. On a alors

$$S^p = s_1^p + s_2^p = \left(x_1 s_1^{p-1} + y_1 s_2^{p-1}\right) + \left(x_2 s_1^{p-1} + y_2 s_2^{p-1}\right) + \ldots + \left(x_n s_1^{p-1} + y_n s_2^{p-1}\right).$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
S^p &\leqslant (x_1^p + y_1^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} + (x_2^p + y_2^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \ldots + (x_n^p + y_n^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} \\
&= S^{\frac{p}{q}} \left((x_1^p + y_1^p)^{\frac{1}{p}} + (x_2^p + y_2^p)^{\frac{1}{p}} + \ldots + (x_n^p + y_n^p)^{\frac{1}{p}}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique l'inégalité cherchée.

II.4.25. On pose

$$s_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \quad \text{et} \quad S = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} S^p &= \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} s_i^{p-1} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} s_i^{p-1} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = S^{p-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

ce qui implique l'inégalité cherchée.

II.4.26. Soit $x, y \in \mathbf{I}$, on suppose que $x < y$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{T}_n = \left\{ \frac{i}{2^n} : i = 0, 1, \ldots, 2^n \right\}$ et on montre par récurrence que l'on a

$$f((1-s)x + sy) \leqslant (1-s)f(x) + sf(y)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbf{T}_n$. Clairement, si $n = 0$, alors $s = 0$ ou $s = 1$ et l'inégalité ci-dessus est évidente. On suppose que l'inégalité est vérifiée pour un $n \in \mathbb{N}$ donné et pour $s \in \mathbf{T}_n$ et on la prouve au rang $n+1$. On suppose que $s \in \mathbf{T}_{n+1}$. Clairement, il suffit de considérer le cas où $s \notin \mathbf{T}_n$. Puisqu'il existe $\zeta, \eta \in \mathbf{T}_n$ tels que $s = \frac{\zeta+\eta}{2}$, on voit que

$$\begin{aligned} (1-s)x + sy &= \left(1 - \frac{\zeta+\eta}{2}\right) x + \frac{\zeta+\eta}{2} y \\ &= \frac{(1-\zeta) + (1-\eta)}{2} x + \frac{\zeta+\eta}{2} y \\ &= \frac{((1-\zeta)x + \zeta y) + ((1-\eta)x + \eta y)}{2}. \end{aligned}$$

La mid-convexité de f donne

$$f((1-s)x + sy) \leqslant \frac{f((1-\zeta)x + \zeta y) + f((1-\eta)x + \eta y)}{2}$$

et, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f((1-s)x + sy) &\leqslant \frac{(1-\zeta)f(x) + \zeta f(y) + (1-\eta)f(x) + \eta f(y)}{2} \\ &= \left(1 - \frac{\zeta+\eta}{2}\right) f(x) + \frac{\zeta+\eta}{2} f(y) \\ &= (1-s)f(x) + sf(y). \end{aligned}$$

Soit t un point de $[0\,,1]$. L'ensemble

$$\mathbf{T} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{T}_n$$

étant dense dans $[0\,,1]$, il existe une suite $\{s_n\}$ de points de $\mathbf{T}$ telle que $t = \lim_{n\to+\infty} s_n$. On a donc, par continuité de f,

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) &= \lim_{n\to+\infty} f((1-s_n)x+s_n y) \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} ((1-s_n)f(x)+s_n f(y)) \\ &= (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

II.4.27. Il existe des fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ additives et discontinues (voir **I.6.31**). Si f est une telle fonction, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right),$$

et $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$. Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Si f était convexe sur $\mathbb{R}$, elle y serait continue (voir **I.2.33**), contradiction.

II.4.28. On suppose par exemple que $x < y$. Pour $t \in \,]0\,,1[$, on pose $z = (1-t)x+ty$. On a $x < z < y$ et il existe $a \in \,]x\,,z[$ et $b \in \,]z\,,y[$ tels que $z = \frac{a+b}{2}$. De même, il existe $t_a \in \,]0\,,t[$ et $t_b \in \,]t\,,1[$ tels que

$$a = (1-t_a)x + t_a y \quad \text{et} \quad b = (1-t_b)x + t_b y.$$

Puisque $z = \frac{a+b}{2}$, on a $t = \frac{t_a+t_b}{2}$. On sait par le résultat de **II.4.26** que f est convexe sur $\mathbf{I}$. On prouve maintenant que f est strictement convexe. On a

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) = f(z) &< \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= \frac{f((1-t_a)x+t_a y) + f((1-t_b)x+t_b y)}{2} \\ &\leqslant \frac{(1-t_a)f(x)+t_a f(y)+(1-t_b)f(x)+t_b f(y)}{2} \\ &= \left(1-\frac{t_a+t_b}{2}\right)f(x) + \frac{t_a+t_b}{2}f(y) \\ &= (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

II.4.29. La fonction f étant continue sur $\mathbf{I}$ (voir **I.2.33**), elle est localement bornée. Soit $x_0 \in \mathbf{I}$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $[x_0 - 2\varepsilon\,, x_0 + 2\varepsilon] \subset \mathbf{I}$. Le fait que f soit localement bornée implique qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{pour} \quad x \in [x_0 - 2\varepsilon\,, x_0 + 2\varepsilon]. \tag{$*$}$$

Soit x_1 et x_2 deux points distincts de $[x_0 - \varepsilon\,, x_0 + \varepsilon]$, $x_3 = x_2 + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|}(x_2 - x_1)$ se trouve dans $[x_0 - 2\varepsilon\,, x_0 + 2\varepsilon]$ et

$$x_2 = \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}\, x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}\, x_3.$$

La fonction f étant convexe, on voit que

$$f(x_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}\, f(x_1) + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}\, f(x_3)$$

et

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\leqslant \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}\, (f(x_3) - f(x_1))\,, \\ &\leqslant \frac{|x_2 - x_1|}{\varepsilon}\, |f(x_3) - f(x_1)|\,, \end{aligned}$$

ce qui, combiné à $(*)$, montre que $f(x_2) - f(x_1) \leqslant \frac{2M}{\varepsilon}\, |x_2 - x_1|$. Les rôles de x_1 et x_2 pouvant être échangés, on obtient $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \frac{2M}{\varepsilon}\, |x_2 - x_1|$.

II.4.30. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Si $0 < x < x_1$, alors

$$x_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x}\, x + \frac{x_1 - x}{x_2 - x}\, x_2.$$

La convexité de f implique

$$f(x_1) \leqslant \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x}\, f(x) + \frac{x_1 - x}{x_2 - x}\, f(x_2)$$

et, par passage à la limite lorsque x tend vers 0^+, on voit que

$$f(x_1) \leqslant \frac{x_1}{x_2}\, f(x_2).$$

II.4.31.

(a) La monotonie de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ implique

$$f(x_1 + x_2) = x_1 \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + x_2 \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leqslant f(x_1) + f(x_2)$$

pour $x_1, x_2 \geqslant 0$.

(b) Soit $0 < a < b$, on pose $p = \frac{a}{b}$ et $q = 1 - p$. La convexité et la sous-additivité de f donnent

$$\begin{aligned} f(b) = f(pa + q(a+b)) &\leqslant pf(a) + qf(a+b) \\ &\leqslant pf(a) + q(f(a) + f(b)) = f(a) + \left(1 - \frac{a}{b}\right) f(b). \end{aligned}$$

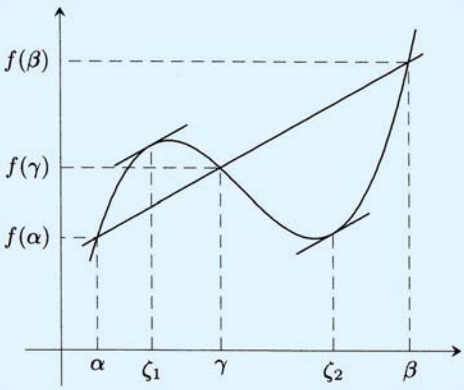
Donc,

$$\frac{f(b)}{b} \leqslant \frac{f(a)}{a}.$$

II.4.32. On suppose, contrairement à la proposition à montrer, que f n'est ni strictement convexe, ni strictement concave. Il existe alors des points α et β dans $]a\,,b[$ tels que la droite passant par $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$ rencontre le graphe de f en un point $(\gamma, f(\gamma))$, où $\alpha < \gamma < \beta$. Par hypothèse, il existe un unique $\zeta_1 \in]\alpha\,,\gamma[$ et un unique $\zeta_2 \in]\gamma\,,\beta[$ tels que

$$\frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = f'(\zeta_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = f'(\zeta_2).$$

Les points $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ et $(\gamma, f(\gamma))$ étant alignés, on en déduit que $f'(\zeta_1) = f'(\zeta_2)$, ce qui contredit l'hypothèse.



II.4.33. On note d'abord que les *dérivées de Dini*

$$D^+f(x) = \overline{\lim_{t\to0^+}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \qquad D_+f(x) = \underline{\lim_{t\to0^+}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$D^-f(x) = \overline{\lim_{t\to0^-}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \qquad D_-f(x) = \underline{\lim_{t\to0^-}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

existent toujours (finies ou infinies). De plus, g_d étant dérivable, on obtient (voir **I.4.10**)

$$D^+f(x+d) = D^+f(x) + g_d'(x), \qquad D_+f(x+d) = D_+f(x) + g_d'(x),$$
$$D^-f(x+d) = D^-f(x) + g_d'(x), \qquad D_-f(x+d) = D_-f(x) + g_d'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Chaque dérivée de Dini de f en $x+d$ est donc un translaté de la dérivée correspondante en x. Maintenant, pour $a < b$ fixés, on pose $m = (f(b) - f(a))/(b-a)$ et on pose $F(x) = f(x) - m(x-a)$. On a $F(a) = F(b) = f(a)$ et F atteint donc son maximum ou son minimum sur $[a\,,b]$ en un point $c \in \,]a\,,b[$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $F(c)$ est le maximum de F. Donc, si $c+t \in \,]a\,,b[$, alors $F(c+t) \leqslant F(c)$ ou, dit autrement, $f(c+t) - f(c) \leqslant mt$. Ceci implique $D^+f(c) \leqslant m \leqslant D_-f(c)$. Chaque dérivée de Dini de f en x étant un translaté de la dérivée correspondante en c, on voit que $D^+f(x) \leqslant D_-f(x)$ pour tout x. Si f est concave sur $[a\,,b]$, f est alors dérivable, excepté sur un ensemble au plus dénombrable (voir **II.4.19**). Il s'ensuit que f est dérivable sur $[a\,,b]$. Si f n'est pas concave sur $[a\,,b]$, elle atteint aussi son minimum sur $[a\,,b]$ en un point de l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. Comme précédemment, on montre alors que $D^-f(x) \leqslant D_+f(x)$ pour tout x. En conséquence, $D^+f(x) \leqslant D_-f(x) \leqslant D^-f(x) \leqslant D_+f(x)$ pour tout x. La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ est donc prouvée.

Notre but est maintenant de prouver que f' est continue. On suppose, au contraire, que f' est discontinue en un point x_0. Il existe alors une suite $\{z_n\}$ convergente vers x_0 telle que $\{f'(z_n)\}$ converge vers $f'(x_0)+r$ pour un certain $r \neq 0$ ou bien telle que $\{f'(z_n)\}$ ne soit pas bornée. Dans le second cas, on peut trouver une suite $\{y_n\}$ telle que $\{f'(y_n)\}$ diverge, par exemple, vers $+\infty$. On a alors

$$\frac{f(x_0) - f(y_n)}{x_0 - y_n} = f'(y_n) + o(1)$$

et, par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $f'(x_0) = +\infty$, contradiction. Dans le premier cas, il existe une suite $\{y_n\}$ telle que $f'(y_n) = f'(x_0) + r/2$ car f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (voir **II.2.31**). Clairement, on peut supposer que la suite approche x_0 d'un côté, par exemple par valeurs supérieures. Par hypothèse, on peut trouver pour tout x une telle suite avec le même r. En effet, puisque $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + d$ et

$$f'(z_n + d) - g_d'(z_n) = f'(z_n) = f'(x_0) + r = f'(x_0 + d) - g_d'(x_0) + r,$$

on a, par passage à la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} f'(z_n + d) = f'(x) + r.$$

La fonction f' vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, il existe une suite $\{\tilde{z}_n\}$ telle que $f'(\tilde{z}_n) = f'(x) + r/2$. On construit alors une suite $\{x_n\}$ comme suit. On choisit x arbitrairement et on choisit x_1 de sorte que $x < x_1 < x + 2^{-1}$ et $f'(x_1) = f'(x) + r/2$. On choisit ensuite x_2 de sorte que $x_1 < x_2 < x_1 + 2^{-2}$ et $f'(x_2) = f'(x_1) + r/2$. En poursuivant le procédé, on obtient une suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_n < x_{n+1} < x_n + 2^{-n} \quad \text{et} \quad f'(x_{n+1}) = f'(x_n) + \frac{r}{2}.$$

La suite converge donc vers une limite que l'on note a. De plus, la dernière égalité implique $f'(x_n) = f'(x_1)+(n-1)r/2$. En conséquence, la suite $\{f'(x_n)\}$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, contredisant le fait que f soit dérivable en a. Ceci conclut la démonstration de la continuité de f'. La fonction f' vérifie les mêmes hypothèses que la fonction f et est donc continûment dérivable et, par récurrence, il en est de même de toutes les dérivées.

II.4.34. Si $n = 2$, on a évidemment l'égalité. On suppose donc que $n > 2$ et que $\{a_n\}$ est une suite décroissante. On pose

$$S_n = (f(a_n)a_1 - f(a_1)a_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(f(a_k)a_{k+1} - f(a_{k+1})a_k).$$

Le but est de prouver que $S_n \geqslant 0$. La fonction f étant convexe, on voit que

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f\left(\frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}\, a_1 + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}\, a_{n+1}\right) \\ &\leqslant \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}\, f(a_1) + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}\, f(a_{n+1}). \end{aligned}$$

Donc,

$$(a_{n+1} - a_1)f(a_n) + (a_n - a_{n+1})f(a_1) + (a_1 - a_n)f(a_{n+1}) \geqslant 0,$$

ce qui signifie que $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$, d'où $S_n \geqslant S_2 = 0$.

II.4.35. [M. Kuczma, A. Smajdor, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 401-402]. La fonction f étant strictement croissante et $a < f(x) < x$, on obtient

$$a < f^{n+1}(x) < f^n(x) < x \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \,]a\,,b[.$$

La suite $\{f^n(x)\}$ converge donc vers une limite l (le cas $l = -\infty$ est possible). On montre maintenant que $l = a$. On se rappelle pour cela que, d'après le résultat de **I.2.33**, chaque itérée f^n est continue. Donc, si $l \in \,]a\,,b[$, on a alors

$$f(l) = f\left(\lim_{n\to+\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} f^{n+1}(x) = l,$$

ce qui contredit le fait que $f(x) < x$ pour tout $x \in]a\,,b[$. Ainsi, $l = a$ pour tout $x \in]a\,,b[$. Si $a < t_1 < t_0 < b$, alors (voir la solution de **II.4.19**)

$$f'_+(t_0) \leqslant \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \leqslant f'_+(t_1). \tag{1}$$

En prenant $t_0 = f^n(x)$ et $t_1 = f^{n+1}(x)$, on obtient

$$f'_+(f^n(x)) \leqslant \frac{f^{n+2}(x) - f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} \leqslant f'_+(f^{n+1}(x)).$$

Le fait que $\lim\limits_{x\to a^+} f'_+(x) = 1$ implique

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{n+2}(x) - f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} = 1,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{f^{n+i+2}(x) - f^{n+i+1}(x)}{f^{n+i+1}(x) - f^{n+i}(x)} = 1 \tag{2}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque f'_+ est décroissante, l'égalité $\lim\limits_{x\to a^+} f'_+(x) = 1$ implique $f'_+(x) \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est donc décroissante sur $]a\,,b[$ d'après (1). Puisque $f(v) - v < 0$, on a

$$\frac{f(u) - u}{f(v) - v} \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad v < u,\ u, v \in]a\,,b[\,.$$

Soit x, y tels que $a < y < x < b$. On prend $u = f^n(x)$ et $v = f^n(y)$, ce qui donne

$$\frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} \geqslant 1.$$

Par ailleurs, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x) < y < x$. Ceci implique $f^{n+k}(x) < f^n(y)$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ étant décroissante, on voit que

$$f^{n+1}(y) - f^n(y) \leqslant f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x),$$

d'où

$$1 \leqslant \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} \leqslant \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+k+1}(y) - f^{n+k}(y)}\,,$$

ce qui, combiné à (2), donne l'égalité cherchée.

II.5. Applications des dérivées

II.5.1.

(a) En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions $f(x) = 1 - \cos x$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$, on obtient

$$\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

pour $x \neq 0$.

(b) Pour $x \geqslant 0$, on considère les fonctions $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \frac{x^3}{3!}$. Le théorème des accroissements finis généralisé combiné à (a) montre que

$$\frac{x - \sin x}{\frac{x^3}{3!}} = \frac{1 - \cos \theta}{\frac{\theta^2}{2}} < 1,$$

ce qui implique que l'inégalité est bien vérifiée. On note que pour $x < 0$, on a $\sin x < x - \frac{x^3}{3!}$.

(c) On applique le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^4}{4!}$$

sur l'intervalle d'extrémités 0 et x et on utilise (b).

(d) On applique le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}, \quad g(x) = \frac{x^5}{5!}, \quad x \geqslant 0$$

et on utilise (c).

II.5.2. Utilisez une récurrence et raisonnez de la même façon que dans la solution du problème précédent.

II.5.3. En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions f et successivement $g(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$, on voit que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_1)}{1}, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

II.5.4. On pose $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ et $\alpha = a + ib$, $a > 0$. La condition $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha f(x) + f'(x)) = 0$ donne

$$\lim_{x\to+\infty} (af_1(x) + f_1'(x) - bf_2(x)) = 0 \tag{1}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} (af_2(x) + f_2'(x) + bf_1(x)) = 0. \tag{2}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} e^{ibx} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax+ibx} f(x)}{e^{ax}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_1(x)\cos bx - f_2(x)\sin bx)}{e^{ax}} \\ &\quad + i \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_2(x)\cos bx + f_1(x)\sin bx)}{e^{ax}}.\end{aligned}$$

On obtient, avec (1) et (2) et en utilisant la règle de l'Hospital (donnée en **II.3.40**),

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_1(x)\cos bx - f_2(x)\sin bx)}{e^{ax}} \\ &\quad = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos bx(af_1(x) + f_1'(x) - bf_2(x)) - \sin bx(af_2(x) + f_2'(x) + bf_1(x))}{a} \\ &\quad = 0.\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_2(x)\cos bx + f_1(x)\sin bx)}{e^{ax}} = 0.$$

On a donc prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ibx} f(x) = 0$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Finalement, on remarque que le résultat juste obtenu peut se généraliser comme suit. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha f(x) + f'(x)) = L$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L/\alpha$. En effet, on a dans ce cas $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\alpha(f(x) - L/\alpha) + (f(x) - L/\alpha)'\big) = 0$ et, d'après ce que l'on a prouvé précédemment, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - L/\alpha) = 0$.

II.5.5. On prend $\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. On a

$$\begin{aligned}f(x) + f'(x) + f''(x) &= \alpha_2\alpha_1 f(x) + (\alpha_2 + \alpha_1)f'(x) + f''(x) \\ &= \alpha_2(\alpha_1 f(x) + f'(x)) + (\alpha_1 f(x) + f'(x))'.\end{aligned}$$

D'après le résultat du problème précédent (voir la remarque à la fin de la solution), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_1 f(x) + f'(x))) = L/\alpha_2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L/(\alpha_2\alpha_1) = L$.

II.5.6. Non. Considérez, par exemple, la fonction $f(x) = \cos x$ $(x > 0)$.

II.5.7.

(a) On pose $g(x) = f(x) - e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$. On a $g(0) = 0$, $g(x) \leqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Si $g(x) \equiv 0$, alors $f'(x) = -e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose donc qu'il existe $a > 0$ tel que $g(a) < 0$. Pour x suffisamment grand, mettons $x > M$, on a alors $g(x) > \frac{1}{2}g(a)$. La fonction g atteint donc un minimum en un point $x_0 \in \,]0\,,M[$ et $g'(x_0) = 0$.

(b) Appliquez le même raisonnement qu'en (a).

II.5.8. On a

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right).$$

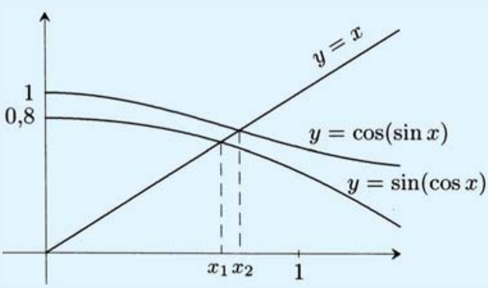
D'après le théorème des accroissements finis généralisé,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right),$$

où $0 < \theta < x \leqslant a$. La fonction f'/g' étant croissante, on voit que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' > 0 \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

II.5.9. On pose $f(x) = \sin(\cos x) - x$. On a $f(0) = \sin 1$ et $f(\pi/2) = -\pi/2$. La propriété des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $x_1 \in \,]0\,,\pi/2[$ tel que $f(x_1) = 0$. Puisque $f'(x) < 0$ sur $]0\,,\pi/2[$, f n'admet pas d'autres zéros dans cet intervalle. On montre de la même manière que l'équation $\cos(\sin x) = x$ admet une unique racine x_2 dans $]0\,,\pi/2[$.



On a de plus

$$x_1 = \sin(\cos x_1) < \cos x_1, \quad x_2 = \cos(\sin x_2) > \cos x_2,$$

donc $x_1 < x_2$.

II.5.10. On suppose, contrairement à l'énoncé, qu'il existe $x_1 \in \,]a\,,b]$ tel que $f(x_1) \neq 0$. La continuité de f implique alors que $f(x) \neq 0$ dans un voisinage $]\alpha\,,\beta[$ de x_1. Supposons, par exemple, que $f(x) > 0$ pour $x \in \,]\alpha\,,\beta[$, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \geqslant a$ et $f(\beta) > 0$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$|\ln f(\beta) - \ln f(\alpha+\varepsilon)| = \left|\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right|(\beta-\alpha-\varepsilon) \leqslant C(\beta-\alpha-\varepsilon)$$

pour $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient $+\infty \leqslant C(\beta-\alpha)$, contradiction.

II.5.11. Soit $0 < p < q$ et $x > 0$. Le théorème des accroissements finis donne

$$\frac{\ln\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{q}} = \frac{1}{1+\zeta_0} > \frac{1}{1+\zeta_1} = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{p}-\frac{x}{q}},$$

où $\zeta_0 \in \left]0\,,\frac{x}{q}\right[$ et $\zeta_1 \in \left]\frac{x}{q}\,,\frac{x}{p}\right[$. D'où,

$$\frac{x}{p}\ln\left(1+\frac{x}{q}\right) > \frac{x}{q}\ln\left(1+\frac{x}{p}\right)$$

ou, dit autrement,

$$q\ln\left(1+\frac{x}{q}\right) > p\ln\left(1+\frac{x}{p}\right).$$

II.5.12. L'inégalité $e^x \geqslant 1+x$ $(x \in \mathbb{R})$ se déduit, par exemple, du théorème des accroissements finis. On a en effet

$$\frac{e^x-1}{x} = e^{\zeta} > 1 \quad \text{pour} \quad x > 0$$

et

$$\frac{e^x-1}{x} = e^{\zeta} < 1 \quad \text{pour} \quad x < 0.$$

On obtient l'égalité si $x = 0$.

Soit

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

les *moyennes arithmétique et géométrique* des réels positifs $a_1, \ldots, a_n$. Si $A_n \neq 0$, alors

$$e^{\frac{a_k}{A_n}-1} \geqslant \frac{a_k}{A_n} \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Donc,

$$1 = e^0 = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n}-1\right)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{a_k}{A_n}-1} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_n} = \frac{G_n^n}{A_n^n},$$

ce qui donne $A_n \geqslant G_n$. Si $A_n = 0$, alors $A_n = G_n = 0$. Puisque l'égalité dans $e^x \geqslant 1 + x$ est atteinte si et seulement si $x = 0$, on voit que $A_n = G_n$ si et seulement si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

II.5.13. Si on remplace t par $x - z$ dans l'inégalité $e^t \geqslant 1 + t$, on obtient

$$xe^z \leqslant e^x + e^z(z-1) \quad \text{pour} \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Le résultat demandé s'obtient donc en remplaçant z par $\ln y$.

II.5.14. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $a \in \left]-2\,,0\right[$ tel que

$$\left|f'(a)\right| = \frac{|f(0) - f(-2)|}{2} \leqslant \frac{|f(0)| + |f(-2)|}{2} \leqslant 1.$$

De même, il existe $b \in \left]0\,,2\right[$ tel que $|f'(b)| \leqslant 1$. On pose $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$. La fonction F atteint son maximum sur $[a\,,b]$ en un point x_0. Puisque $F(0) = 4$, $F(a) \leqslant 2$ et $F(b) \leqslant 2$, x_0 se trouve dans l'intervalle ouvert $\left]a\,,b\right[$. On a alors $F'(x_0) = 2f'(x_0)(f(x_0) + f''(x_0)) = 0$. On note que $f'(x_0) \neq 0$ car $f'(x_0) = 0$ donnerait $F(x_0) = (f(x_0))^2 \leqslant 1$, contradiction. Donc, $f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

II.5.15.

(a) L'inégalité à prouver est équivalente à

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{Arctan} x - x > 0, \quad x > 0.$$

Puisque $f'(x) > 2x \operatorname{Arctan} x + 1 - 1 > 0$, on voit que $f(x) > f(0) = 0$ pour $x > 0$.

(b) D'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange, on a

$$2\tan x = 2x + \frac{2}{3}x^3 + 2\left(\frac{\sin^3\zeta_1}{\cos^5\zeta_1} + \frac{2}{3}\frac{\sin\zeta_1}{\cos^3\zeta_1}\right)x^4 > 2x + \frac{2}{3}x^3 \qquad (1)$$

et

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4!}\,\frac{e^{\zeta_2} - e^{-\zeta_2}}{2}\,x^4 < x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4!}\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{-\pi}{2}}}{2}\,x^4. \qquad (2)$$

On montre maintenant que $e^{\frac{\pi}{2}} < 8$. On note pour cela que (voir, par exemple, **II.5.3 (vol. I)**) $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$ pour $x > 0$. Ceci implique $\ln 8 = 3\ln 2 = 3\ln(1+1) > 2$. Donc, $8 > e^2 > e^{\frac{\pi}{2}}$. Il s'ensuit que

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{-\pi}{2}}}{2} < \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} < 4,$$

ce qui, combiné à (1) et (2), donne

$$\operatorname{sh} x < x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} < 2x + \frac{2}{3}\,x^3,$$

car $x + \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x^4 > 0$ pour $0 < x < 2$.

(c) On pose $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ pour $x > 0$, $x \neq e$. On a $f'(x) = \frac{e-x}{xe}$. Donc, $f'(x) > 0$ si $0 < x < e$ et $f'(x) < 0$ si $x > e$. Ainsi, $f(x) < f(e) = 0$ si $x \neq e$.

(d) Pour $x > 1$, l'inégalité à prouver est équivalente à

$$f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1 < 0.$$

Puisque $f'(x) = 2\ln x + 2 - 2x$ et $f''(x) = \frac{2}{x} - 2 < 0$, on obtient $f'(x) < f'(1) = 0$ et $f(x) < f(1) = 0$.

Pour $0 < x < 1$, l'inégalité à prouver est équivalente à

$$f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1 > 0.$$

Puisque $f''(x) = \frac{2}{x} - 2 > 0$, on a $f'(x) < f'(1) = 0$ et $f(x) > f(1) = 0$.

II.5.16.

(a) D'après (c) du problème précédent, on a $\ln\pi < \frac{\pi}{e}$, ce qui signifie que $e^\pi > \pi^e$.

(b) D'après (d) du problème précédent, on a $\sqrt{2}\ln\sqrt{2} < \frac{1}{2}$, ce qui donne $2\sqrt{2} < e$.

(c) L'inégalité $\ln 8 > 2$ est prouvée dans la solution de la question (b) du problème précédent.

II.5.17.

(a) L'inégalité à prouver est équivalente à

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)} < e^{\frac{b}{a}}.$$

Puisque $\ln(1+t) < t$ pour $t > 0$,

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)} < \left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}} = \left(\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}}\right)^{\frac{b}{a}} < e^{\frac{b}{a}}.$$

(b) On définit pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f par

$$f(x) = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1-\frac{x}{n}\right)^n, \quad |x| < \min\{m, n\}.$$

On a $f'(x) < 0$ si $x > 0$ et $f'(x) > 0$ si $x < 0$, donc $f(x) < f(0) = 1$ pour $x \neq 0$, $|x| < \min\{m, n\}$, ce qui implique le résultat cherché.

(c) On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right) - \frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$. On a

$$f'(x) = \frac{(1-x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)+x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1+x^2\right)}.$$

Clairement, $f'(x) > 0$ si $0 < x \leqslant 1$. Si $x > 1$, alors

$$(1-x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)+x^2 > 0$$

si et seulement si

$$x^2 > (1-x)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right).$$

Cette dernière inégalité est équivalente à

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 > \sqrt{1+x^2},$$

qui peut se prouver en élevant les deux membres au carré. Donc, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. De plus, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = 0,$$

on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

II.5.18.

(a) On pose
$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x > 0.$$
On a
$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} < 0$$
car $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ pour $x > 0$. Donc, $f(x) < f(0) = 0$.

(b) Pour $x > 1$, l'inégalité se déduit de (a). Il suffit, en effet, de remplacer x par $x-1$. Si $x \in \,]0\,,1[$, on applique l'inégalité déjà prouvée à $\frac{1}{x} > 1$.

II.5.19.

(a) Il suffit d'appliquer la formule de Taylor à $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$.

(b) D'après la formule de Taylor, on a
$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{\sin\zeta}{(1+\cos\zeta)^2} \cdot \frac{x^3}{3!} < \ln 2 - \frac{x^2}{4}\,.$$

II.5.20.

(a) On pose $f(x) = e^x - 1 - xe^x$. On a $f'(x) = -xe^x < 0$ et $f(x) < f(0) = 0$.

(b) On obtient, en posant $f(x) = e^x - 1 - x - x^2e^x$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 1 - 2xe^x - x^2e^x \\ &< 1 + xe^x - 1 - 2xe^x - x^2e^x = -xe^x(1+x) < 0, \end{aligned}$$
la première inégalité se déduisant de (a).

(c) Si $f(x) = xe^{\frac{x}{2}} - e^x + 1$, alors
$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right) < 0$$
car $e^x > 1 + x$ pour $x > 0$.

(d) L'inégalité à prouver est équivalente à l'inégalité facile à vérifier
$$x < (1+x)\ln(1+x).$$

(e) On prouve l'inégalité équivalente $(x+1)(\ln(1+x) - \ln 2) \leqslant x\ln x$. On considère pour cela la fonction $f(x) = (x+1)(\ln(1+x) - \ln 2) - x\ln x$. Cette fonction atteint son maximum global en $x = 1$ et $f(x) \leqslant f(1) = 0$.

II.5.21. On prend le logarithme de chacun des membres de l'inégalité à prouver pour la réécrire sous la forme $(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x)$. On considère alors la fonction $f(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x)$. On a $f''(x) > 0$ pour $x \in]0\,,e[$, d'où $f'(x) > f'(0) = 0$, ce qui implique $f(x) > f(0) = 0$.

II.5.22. En posant $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$, on obtient

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} - 2.$$

On a donc, pour $x > 1$, $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2} > 0$ car $e^{x-1} > 1$ et $\frac{1}{x^2} < 1$.

II.5.23.

(a) On pose $f(x) = \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x - x$. On a

$$f'(x) = \frac{2\,(1-\cos x)^2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{3\cos^2 x} > 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[.$$

La fonction f est donc strictement croissante et $f(x) > f(0)$ pour $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

(b) On définit $f(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$. On a

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2}{(2+\cos x)^2} \geqslant 0.$$

(c) On voit, en posant $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$ pour $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, que

$$f'(x) = \frac{1+\cos^2 x - 2\sqrt{\cos x}\cos x}{2\sqrt{\cos x}\cos x} > \frac{(1-\cos x)^2}{2\sqrt{\cos x}\cos x} > 0.$$

II.5.24. On pose $f(x) = x^\alpha + (1-x)^\alpha$. La dérivée f' ne s'annule qu'en $x = \frac{1}{2}$. De plus, la fonction atteint son minimum global $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ en ce point et elle atteint son maximum global égal à 1 aux extrémités.

II.5.25. En divisant chaque membre par x^α, on voit qu'il suffit de prouver

$$(1+t)^\alpha < 1 + t^\alpha \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Si $f(t) = (1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha$, alors $f'(t) < 0$, d'où $f(t) < f(0)$ pour $t > 0$.

II.5.26. On considère la fonction

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\,x^2, \quad x \in [-1\,,1].$$

On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et, pour $x \in \left]-1\,,1\right[$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\alpha(1-\alpha)\,(1+x)^{\alpha-2} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \\ &< -2^{\alpha-2}\alpha(1-\alpha) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \\ &= \frac{1}{4}\,\alpha(1-\alpha)\,(1-2^\alpha) < 0. \end{aligned}$$

La dérivée f' est donc décroissante sur l'intervalle $\left]-1\,,1\right[$, ce qui implique $f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-1\,,0\right[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]0\,,1\right[$. Il s'ensuit que f atteint son maximum en 0. Puisque $f(0) = 0$, on voit que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [-1\,,1]$.

II.5.27. [D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* 42 (1993), 317-337]. On considère la fonction

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,(1+B)^{\alpha-2}\,x^2, \quad x \in [-1\,,B].$$

On a

$$f'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1} - \alpha - \alpha(\alpha-1)\,(1+B)^{\alpha-2}\,x$$

et

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\left((1+x)^{\alpha-2} - (1+B)^{\alpha-2}\right).$$

(a) Si $0 < \alpha < 1$ et $x \in \left]-1\,,B\right[$, alors $f''(x) < 0$ ce qui signifie que f' est décroissante. Donc, $0 = f'(0) < f'(x)$ si $x \in \left]-1\,,0\right[$ et $0 = f'(0) > f'(x)$ si $x \in \left]0\,,B\right[$. La fonction f atteint son maximum en 0 et $f(x) \leqslant f(0) = 0$ pour $x \in [-1\,,B]$. Finalement, puisque $(1+B)^\alpha \geqslant 1$, on voit que

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,(1+B)^2}\,x^2 \leqslant f(x) \leqslant f(0) = 0.$$

(b) Comme en (a), si $1 < \alpha < 2$ et $x \in [-1\,,B]$, alors $f(x) \geqslant f(0) = 0$ et

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,(1+B)^2}\,x^2 \geqslant f(x) \geqslant f(0) = 0.$$

II.5.28.

(a) On pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On montre que f est décroissante sur $\left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - \frac{\sin x}{x}}{x} = \frac{\cos x - \cos\theta}{x},$$

où $0 < \theta < x$. Ceci implique $f'(x) < 0$ sur $\left]0\,, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, l'inégalité cherchée suit.[10]

(b) L'inégalité à prouver peut s'écrire sous la forme

$$\sin x \geqslant \frac{3}{\pi}x - 4\frac{x^3}{\pi^3}.$$

On pose

$$f(x) = \sin x - \frac{3}{\pi}x + 4\frac{x^3}{\pi^3}, \quad \mathbf{I} = \left[0\,, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \left[\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{2}\right].$$

On a $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$. De plus, $f''(0) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ et $f^{(4)}(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$. Ceci implique $f'' \leqslant 0$ sur $\mathbf{I}$ et f est donc concave sur $\mathbf{I}$. Puisque $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, on voit que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$. On montre maintenant que f' est convexe sur $\mathbf{J}$. En effet, puisque $f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ et $f^{(4)}(x) > 0$ pour $x \in \left]\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{2}\right[$, on voit que la dérivée troisième de f est positive sur $\mathbf{J}$. On a de plus $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \mathbf{J}$, ce qui, combiné à $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donne $f \geqslant 0$ sur $\mathbf{J}$.

II.5.29. On suppose d'abord que $x \in \left]0\,, \frac{1}{2}\right[$. On a alors $\frac{\pi^3 x^3}{3!} < \pi x^2$. L'inégalité $\sin \pi x > \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!}$ (voir **II.5.1(b)**) montre donc que

$$\sin \pi x > \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} > \pi x(1 - x).$$

Pour prouver la seconde inégalité, on considère la fonction définie par $f(x) = 4x - 4x^2 - \sin \pi x$ pour $x \in \left[0\,, \frac{1}{2}\right]$. On a $f'(x) = 4 - 8x - \pi\cos \pi x$ et $f''(x) = -8 + \pi^2 \sin \pi x$. Ainsi,

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x_0 = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{8}{\pi^2}$$

[10] On peut prouver cette inégalité plus rapidement en remarquant que $x \mapsto \sin x$ est concave sur $\left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$. (N.d.T.)

et $f''(0) = -8$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^2 - 8 > 0$. Donc $f''(x) < 0$ pour $x \in \left]0\,, x_0\right[$ et $f''(x) > 0$ pour $x \in \left]x_0\,, \frac{1}{2}\right[$ ou, dit autrement, f' est strictement décroissante sur $x \in \left]0\,, x_0\right[$ et strictement croissante pour $x \in \left]x_0\,, \frac{1}{2}\right[$. De plus, puisque $f'(0) = 4 - \pi > 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on voit que $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]x_0\,, \frac{1}{2}\right[$ et donc aussi que $f'(x_0) < 0$. Ceci implique qu'il existe $x_1 \in \left]0\,, x_0\right[$ tel que $f'(x_1) = 0$. La monotonie de f' implique que f croît sur $\left]0\,, x_1\right[$ et décroît sur $\left]x_1\,, \frac{1}{2}\right[$. Puisque $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]0\,, \frac{1}{2}\right[$. On a donc montré que l'inégalité est vérifiée pour $x \in \left]0\,, \frac{1}{2}\right[$ et on vérifie facilement qu'elle est aussi valide pour $x = \frac{1}{2}$. Finalement, on note que les deux inégalités ne changent pas si on remplace x par $1 - x$. Elles sont donc vérifiées pour $x \in \left]0\,, 1\right[$.

II.5.30. On pose $f(x) = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x}{n}\left(e^x - 1\right)$ pour $x > 0$. On a

$$f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{x}{n}\,e^x - \frac{1}{n}\,e^x + \frac{1}{n}$$

et

$$f^{(l)}(x) = e^x - \sum_{k=l}^{n} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} - \frac{x}{n}\,e^x - \frac{l}{n}\,e^x, \quad l = 2, 3, \ldots, n.$$

De plus, $f^{(l)}(0) = -\frac{l}{n} < 0$ pour $l = 2, 3, \ldots, n$, $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$. Puisque $f^{(n)}(x) < 0$ pour $x > 0$, la dérivée $f^{(n-1)}$ est strictement décroissante, ce qui implique $f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(0) < 0$. Ceci implique alors la monotonie de $f^{(n-2)}$ et $f^{(n-2)}(x) < 0$ pour $x > 0$. En répétant le même raisonnement, on arrive à $f(x) < f(0) = 0$ pour $x > 0$.

II.5.31. Puisque $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}\,e^{-x}$, on voit que la dérivée ne s'annule qu'en 0. De plus, si n est pair, alors $f'(x) < 0$ pour $x \neq 0$. Dans ce cas, f n'a donc pas d'extrema locaux. D'autre part, si n est impair, alors $f'(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 0$ et, dans ce cas, $f(0) = 1$ est un maximum (global) de f.

II.5.32. La dérivée $f'(x) = (m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\frac{m}{m+n} - x\right)$ ne s'annule qu'en $x_0 = 0$ (si $m > 1$), $x_1 = 1$ (si $n > 1$) et en $x_2 = \frac{m}{m+n}$. On vérifie facilement que $f(x_2) = \frac{m^n n^m}{(m+n)^{m+n}}$ est un maximum local. De plus, si m est pair, alors $f(x_0) = 0$ est un minimum local de f. Si m est impair, il n'y a pas d'extremum local en 0. La même analyse montre que si n est pair, alors $f(x_1) = 0$ est un minimum local et si n est impair, il n'y a pas d'extremum local en x_1.

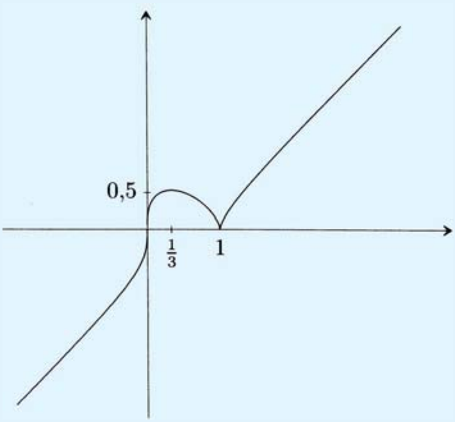
II.5.33. Le résultat du problème précédent implique que f atteint sa valeur maximale $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ en un x vérifiant l'équation

$$\sin^2 x = \frac{m}{m+n}.$$

II.5.34. Pour $x \neq 0, 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

La dérivée f' s'annule donc en $x = \frac{1}{3}$. De plus, $f'(x) > 0$ si $x \in \left]0\,,\frac{1}{3}\right[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{1}{3}\,,1\right[$. Donc, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ est un maximum local de f. La fonction n'est dérivable ni en 0 ni en 1. Puisque $f(x) > 0$ pour $x \in \left]0\,,1\right[$ et $f(x) < 0$ pour $x < 0$, f n'atteint pas d'extremum local en 0. En revanche, $f(1) = 0$ est un minimum local de f car $f(x) > 0$ pour $x > 1$ et pour $x \in \left]0\,,1\right[$.



II.5.35. On a $f'(x) = \operatorname{Arcsin} x$. Seul 0 est donc un point critique de f. Puisque $f(0) = 1$ et $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ est donc un maximum global et 1 un minimum global de f sur $[-1\,,1]$.

II.5.36. On a $f' < 0$ pour $x > 1$ et $f(x) < f(1) = \frac{3}{2}$. On a $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right[$ et $f'(x) > 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}\,,1\right[$, donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ est un minimum local de f. La dérivée f' est strictement positive pour $x < 0$ et $\frac{3}{2} = f(0) > f(x)$.

La fonction f atteint donc son maximum global en 0 et 1 et $f(0) = f(1) = 1$. D'autre part, puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et

$f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la borne inférieure de $f(\mathbb{R})$ est égale à 0 mais la fonction n'atteint pas de minimum global sur $\mathbb{R}$.

II.5.37.

(a) Le maximum global de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, $x \geqslant 0$, est $f(1) = \frac{1}{e}$. Donc,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leqslant \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

(b) Comme en (a), il suffit de trouver le maximum global de

$$x \mapsto x^2 e^{-x}, \quad x \geqslant 0.$$

(c) Si un des réels a_k est nul, l'inégalité est évidente. On suppose donc que tous les a_k sont strictement positifs. En prenant le logarithme de chaque membre, on obtient l'inégalité suivante, équivalente à celle donnée :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln a_k - \frac{a_k}{3}\right) \leqslant \ln 3 - 1.$$

Il suffit maintenant de trouver le maximum global de

$$x \mapsto \ln x - \frac{x}{3}, \quad x > 0.$$

II.5.38. On a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)\operatorname{sgn} x - \cos\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puisque

$$\left|\sin\frac{1}{x} \pm \cos\frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{2},$$

on voit que $f'(x) \geqslant 0$ si $x > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x < 0$. La fonction f n'a donc pas d'extrema locaux sur $\mathbb{R}^*$. Enfin, $0 = f(0)$ est un minimum global de f, car $f(x) > f(0) = 0$ pour $x \neq 0$.

II.5.39. On note d'abord que $f(x) > f(0)$ pour $x \neq 0$. De plus,

$$f'(x) = \begin{cases} x^2\left(8x + 4x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Donc, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, alors

$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left(\frac{4}{n\pi} - 1\right) < 0$$

et si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, alors

$$f'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\frac{8}{(2n+1)\pi} + 1\right) > 0.$$

II.5.40. On observe que $\operatorname{sh} x > 0$ et $\operatorname{th} x > 0$ pour $x > 0$. On peut donc réécrire l'inégalité

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh} x^2 + \operatorname{ch} x^2}} < \operatorname{th} x$$

sous la forme équivalente

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x^2 + \operatorname{ch} x^2}} < \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

et cette inégalité est évidente. Les autres inégalités peuvent se démontrer avec des arguments classiques.

II.5.41. Pour $0 < a < b$, on pose $x = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}$. On a alors

$$\frac{b-a}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} < \frac{b-a}{b+a} < \ln\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2-a^2}{2ab}.$$

On obtient le résultat demandé en divisant les inégalités précédentes par $\frac{b-a}{2}$.

II.5.42.

(a) D'après la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to 0} e^{\frac{1}{p}\ln\frac{x^p+y^p}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln xy} = \sqrt{xy}$$

car

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\ln\frac{x^p+y^p}{2} = \lim_{p\to 0}\frac{\left(\ln\frac{x^p+y^p}{2}\right)'}{(p)'} = \frac{1}{2}\ln xy.$$

(b) Pour $p \neq 0$, on pose $f(p) = \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$. Il suffit de prouver que

$$F(p) = \ln f(p) = \frac{1}{p} \ln \frac{x^p + y^p}{2}$$

est une fonction strictement croissante. On a

$$F'(p) = \frac{1}{p^2} \left(\frac{p}{x^p + y^p} \left(x^p \ln x + y^p \ln y\right) - \ln \frac{x^p + y^p}{2} \right).$$

On pose

$$G(p) = \frac{p}{x^p + y^p} \left(x^p \ln x + y^p \ln y\right) - \ln \frac{x^p + y^p}{2}$$

et on a

$$G'(p) = \frac{p \left[\left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right) \left(x^p + y^p\right) - \left(x^p \ln x + y^p \ln y\right)^2 \right]}{\left(x^p + y^p\right)^2}.$$

Notre but est donc de prouver que

$$\left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right) \left(x^p + y^p\right) - \left(x^p \ln x + y^p \ln y\right)^2 \geqslant 0.$$

On applique l'inégalité de Cauchy

$$\left(x_1 y_1 + x_2 y_2\right)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2\right) \left(y_1^2 + y_2^2\right)$$

en prenant

$$x_1 = x^{\frac{p}{2}}, \qquad x_2 = y^{\frac{p}{2}}, \qquad y_1 = x^{\frac{p}{2}} \ln x, \qquad y_2 = y^{\frac{p}{2}} \ln y$$

pour obtenir

$$\left(x^{\frac{p}{2}} \cdot x^{\frac{p}{2}} \ln x + y^{\frac{p}{2}} \cdot y^{\frac{p}{2}} \ln y \right)^2 \leqslant \left(x^p + y^p\right) \left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right),$$

d'où

$$\left(x^p \ln x + y^p \ln y\right)^2 \leqslant \left(x^p + y^p\right) \left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right).$$

Ceci implique $G'(p) \geqslant 0$ pour $p > 0$ et $G(p) = p^2 F'(p) > G(0) = 0$. Si $p < 0$, on a alors $G'(p) < 0$ et $G(p) = p^2 F'(p) > G(0) = 0$. On voit donc, pour résumer, que la fonction $p \mapsto f(p)$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 0[$ et $]0\,, +\infty[$. Il s'ensuit, par définition de $M_0(x, y)$, que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II.5.43. Pour $\lambda \geqslant 0$, on définit

$$f(\lambda) = \frac{x^n + y^n + \lambda\left((x+y)^n - x^n - y^n\right)}{2 + \lambda\left(2^n - 2\right)}.$$

On peut montrer, en utilisant l'inégalité

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\left(x^n + y^n\right),$$

que $f'(\lambda) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $[1\,,+\infty[$ et, puisque $f(1) = (x+y)^n/2^n$, la seconde inégalité suit. Pour prouver la première inégalité, il suffit de montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) \geqslant \left(\sqrt{xy}\right)^n$. L'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique donne

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) &= \frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{2^n - 2} \\
&= \frac{\binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y}{2^n - 2} \\
&\geqslant \sqrt[2^n-2]{\left(xy^{n-1}\right)^{\binom{n}{1}}\left(x^2y^{n-2}\right)^{\binom{n}{2}}\cdots\left(x^{n-1}y\right)^{\binom{n}{1-1}}} = \left(\sqrt{xy}\right)^n,
\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de l'identité

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} = n\left(2^{n-1} - 1\right)$$

qui peut se prouver en utilisant le fait que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

II.5.44.

(a) On pose $f(x) = \sin(\tan x) - x$ pour $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$. On a alors

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \cos(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

et

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \cos(\tan x) \geqslant \cos^2 x.$$

On remarque que $\cos(\tan x) \geqslant 1 - \frac{\tan^2 x}{2}$ (voir **II.5.1(a)**). Il suffit donc de montrer que $1 - \frac{\tan^2 x}{2} \geqslant \cos^2 x$ pour $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$. On peut réécrire cette dernière inégalité sous la forme

$$2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 \leqslant 0$$

qui est clairement vérifiée pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.

(b) On pose $f(x) = \tan(\sin x) - x$ pour $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$. On a alors

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - 1.$$

Donc, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si

$$\cos x \geqslant \cos^2(\sin x) = \frac{1+\cos(2\sin x)}{2}\,.$$

Pour prouver cette dernière inégalité, on remarque que, d'après **II.5.1(c)**,

$$1+\cos(2\sin x) \leqslant 2 - 2\sin^2 x + \frac{2}{3}\sin^4 x \leqslant 2\cos x,$$

des arguments classiques pouvant être utilisés pour montrer que cette dernière inégalité est bien vérifiée pour $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{3}\right]$.

II.5.45. On pose $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. On a alors, pour tout $x \in \left]0\,,\pi/2\right[$, $f'(x) > 0$ si et seulement si

$$\frac{1}{x^3} > \frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

ou, dit autrement, si et seulement si

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0.$$

Si maintenant on pose

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x,$$

on a alors

$$g'(x) = (\cos x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{4}{3}}\sin^2 x - 1$$

et

$$g''(x) = \frac{4}{9}(\cos x)^{-\frac{7}{3}}\sin^3 x.$$

On voit donc, puisque $g''(x) > 0$ pour $x \in \left]0\,,\pi/2\right[$, que $g'(x) > g'(0) = 0$ et $g(x) > g(0) = 0$ sur cet intervalle. Ceci implique alors que f est croissante sur $\left]0\,,\pi/2\right[$ et $f(x) \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

II.5.46. Il suffit de remarquer que

$$\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)^2}{(1+x^2)\left(1+2\sqrt{1+x^2}\right)^2} > 0.$$

II.5.47. Si $a_k = b_k$ pour tout k, la proposition est alors évidente. On suppose donc que $a_k \neq b_k$ pour au moins une valeur de l'indice k et on pose

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} (xa_k + (1-x)b_k) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln f(x).$$

On a alors

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{xa_k + (1-x)b_k} \quad \text{et} \quad g''(x) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - b_k}{xa_k + (1-x)b_k} \right)^2.$$

Puisque $g''(x) < 0$, la fonction g (et donc aussi f) atteint son maximum sur $[0\,,1]$ en une des extrémités de l'intervalle si et seulement si $g'(0)$ et $g'(1)$ ont le même signe, c'est-à-dire si $g'(0)g'(1) \geqslant 0$. Cette dernière inégalité s'écrit aussi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{a_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{b_k} \right) \geqslant 0.$$

II.5.48. D'après **II.5.1(a)** et **(c)**, on a

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il suffit donc, pour prouver notre inégalité, de montrer que

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \leqslant 1 + 1 - \frac{x^2y^2}{2}$$

ou, de façon équivalente,

$$x^4 + y^4 + 12x^2y^2 - 12\left(x^2 + y^2\right) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 \leqslant \pi.$$

On peut écrire cette dernière inégalité en coordonnées polaires (r, θ) comme suit :

$$r^2\left(2 + 5\sin^2 2\theta\right) \leqslant 24 \quad \text{pour} \quad r^2 \leqslant \pi \quad \text{et} \quad \theta \in [0\,,2\pi]. \qquad (*)$$

Puisque

$$r^2\left(2 + 5\sin^2 2\theta\right) \leqslant 7\pi < 24,$$

l'inégalité $(*)$ est bien vérifiée.

II.5.49. L'inégalité est évidente si $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$. On suppose donc que $x, y \in \left]0\,,1\right[$ et on pose $t = xy$. L'inégalité étant symétrique, il suffit de considérer le cas où $0 < t \leqslant 1$. On a

$$x^y + y^x = x^{tx} + (tx)^x = (x^x)^t + t^x x^x.$$

La fonction $x \mapsto x^x$ atteint son minimum $e^{-1/e} = a$ en $\frac{1}{e}$ et, puisque $t^x \geqslant t$, on voit que $x^y + y^x \geqslant a^t + ta$. De plus, $F(t) = a^t + ta$, $t \in \mathbb{R}$, n'a qu'un minimum local en $t_0 = 1 - e < 0$, F est strictement croissante sur $\left]t_0\,,+\infty\right[$ et $F(0) = 1$. Il s'ensuit que $x^y + y^x > 1$.

II.5.50. Pour $0 < x < 1$, on peut réécrire l'inégalité à prouver sous la forme

$$1 - 2x^n + x^{n+1} < (1 - x^n)\,\sqrt[n]{1 - x^n}$$

ou

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} < \frac{1 - (1 - x^n)}{1 - \sqrt[n]{1 - x^n}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1-t^n}{1-t}$ étant strictement croissante sur $\left]0\,,1\right[$, il suffit donc de montrer que $x < \sqrt[n]{1 - x^n}$ ou, de façon équivalente, $0 < x < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. On note pour finir que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ pour $n \geqslant 2$, ce qui implique $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} > \frac{n}{n+1}$.

II.5.51. Pour $0 < x < 1$, on considère la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \sin \frac{1}{x}.$$

Puisque $g'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$, on voit que g est strictement décroissante sur $\left]0\,,1\right[$. Donc $g(y+z) < g(y)$, $g(y+z) < g(z)$ et

$$yg(y+z) + zg(y+z) < yg(y) + zg(z),$$

ce qui implique $f(y+z) < f(y) + f(z)$.

II.5.52. On part de la formule bien connue du binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1}$$

On dérive (1) par rapport à x puis on multiplie l'égalité obtenue par x pour obtenir

$$nx\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

On dérive deux fois (1) par rapport à x puis on multiplie l'égalité obtenue par x^2 pour obtenir

$$n(n-1)x^2\,(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3}$$

Si on remplace dans (1), (2) et (3) y par $1-x$, on obtient

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k},$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}$$

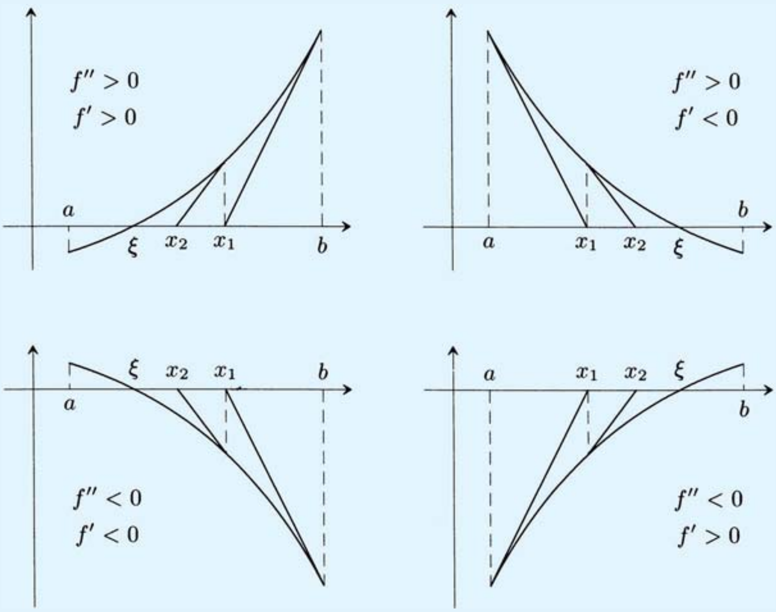
et

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}.$$

II.5.53. Par hypothèse, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine, notée ξ, dans $[a\,,b]$.



On suppose, par exemple, que $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in [a\,,b]$. On pose donc $x_0 = a$. D'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange, on a

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}\, f''(c_n)\,(\xi - x_n)^2\,,$$

où c_n est un élément de l'intervalle ouvert d'extrémités ξ et x_n. Par définition de la suite $\{x_n\}$,

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\,(\xi - x_n)^2 > 0.$$

La suite $\{x_n\}$ est donc majorée par ξ et $f(x_n) < 0$. D'où

$$\xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < \xi - x_n,$$

ce qui signifie que la suite $\{x_n\}$ est strictement croissante, donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Les autres cas se traitent de la même façon.

II.5.54. Clairement m et M sont strictement positifs. La solution du problème précédent implique

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}\, f''(c_n)\,(\xi - x_n)^2\,,$$

où ξ est l'unique racine de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a\,,b]$ et c_n est un élément de l'intervalle ouvert d'extrémités ξ et x_n. Donc,

$$|x_{n+1} - \xi| = \left| x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = \frac{|f''(c_n)|}{2\,|f'(x_n)|}\,(\xi - x_n)^2 \leqslant \frac{M}{2m}\,(x_n - \xi)^2 .$$

II.5.55. On montre que $\sup\left\{2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} : x > 0\right\} = 1$. Pour cela, on pose $f(x) = 2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$. Clairement $f(1) = 1$ et $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Il suffit donc de montrer que $f(x) < 1$ si $x > 1$ ou, dit autrement,

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}} < 1 - \frac{1}{2^x} \quad \text{pour} \quad x > 1. \tag{1}$$

D'après **II.3.7(a)**, on a

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^x > 1 - \frac{x}{2^x} .$$

On montre maintenant que

$$1 - \frac{x}{2^x} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2. \tag{2}$$

On écrit pour cela (2) sous la forme $g(x) = 2^{x-1} - x \geqslant 0$ et on remarque que g est strictement croissante sur $[2\,,+\infty[$ et $g(2) = 0$. L'inégalité (1) est donc prouvée pour $x \geqslant 2$ et $f(x) < 1$ pour $x \geqslant 2$. Notre but est maintenant de montrer que $f(x) < 1$ pour $x \in\,]1\,,2[$. On définit pour ce faire la fonction h en posant

$$h(x) = \ln f(x) = \ln\left(2^x + 2^{\frac{1}{x}}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln 2.$$

Puisque

$$h'(x) = \ln 2 \frac{-2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\,2^x}{2^x + 2^{\frac{1}{x}}} ,$$

il s'ensuit que $h'(x) < 0$ si et seulement si $\left(x^2 - 1\right)\ln 2 < 2x \ln x$. On considère, pour prouver cette dernière inégalité, la fonction

$$k(x) = \left(x^2 - 1\right)\ln 2 - 2x\ln x, \quad x \in\,]1\,,2[\,.$$

On a $k'(x) = 2x\ln 2 - 2\ln x - 2$ et $k''(x) = 2(\ln 2 - 1/x)$. Donc, $k''(x) < 0$ si $x \in\,]1\,,1/\ln 2[$ et $k''(x) > 0$ si $x \in\,]1/\ln 2\,,2[$. Puisque $k'(1) = k'(2) < 0$, on obtient $k'(x) < 0$ pour tout $x \in\,]1\,,2[$, ce qui signifie que k est décroissante sur cet intervalle et $k(x) < k(1) = 0$. Donc, $h'(x) < 0$ si $x \in\,]1\,,2[$ et $h(x) < h(1) = 0$, ce qui donne $f(x) < 1$ pour $x \in\,]1\,,2[$. On conclut donc que l'inégalité (1) est vérifiée pour tout $x \in\,]1\,,+\infty[$.

II.5.56. [4]. La démonstration est basée sur le théorème des catégories de Baire[(11)]. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathbf{A}_n = \{x \in [0\,,1] : f^{(n)}(x) = 0\}$. Par hypothèse, $[0\,,1]$ est l'union des $\mathbf{A}_n$ et, d'après le théorème de Baire, au moins un des $\mathbf{A}_n$ n'est pas nulle part dense. Il existe donc un intervalle fermé $\mathbf{I}$ et un entier n tels que $\mathbf{I} \subset \overline{\mathbf{A}_n}$. Puisque $f^{(n)}$ est continue, on a $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{I}$ et f coïncide donc sur $\mathbf{I}$ avec un polynôme. La démonstration est complète si $\mathbf{I} = [0\,,1]$. Si ce n'est pas le cas, on peut répéter le même raisonnement sur les intervalles restants de $[0\,,1]$. On obtient en poursuivant ce procédé une collection d'intervalles dont l'union est dense dans $[0\,,1]$. De plus, f coïncide sur chacun de ces intervalles avec un polynôme. Notre but est de prouver que f coïncide avec le même polynôme sur tous ces intervalles. On considère pour cela l'ensemble $\mathbf{B}$ obtenu lorsqu'on retire l'intérieur des intervalles de la collection. Clairement, $\mathbf{B}$ est fermé. De plus, si $\mathbf{B}$ n'est pas vide, alors chaque élément de $\mathbf{B}$ est aussi un point d'accumulation de $\mathbf{B}$. En effet, si $x_0 \in \mathbf{B}$ n'est pas un point d'accumulation de $\mathbf{B}$, alors x_0 est une extrémité commune à deux intervalles $\mathbf{I}_1$ et $\mathbf{I}_2$ telle que $f^{(n_1)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{I}_1$ et $f^{(n_2)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{I}_2$. Donc, $f^{(n)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$ et $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$. Puisque $f^{(n)}$ est continue, f coïncide avec un polynôme sur l'union de $\mathbf{I}_1$ et $\mathbf{I}_2$ et x_0 n'appartient donc pas a $\mathbf{B}$, contradiction. $\mathbf{B}$ étant fermé, s'il n'est pas vide, on peut appliquer à nouveau le théorème de Baire. Il existe donc un $\mathbf{A}_n$ tel que $\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}$ est dense dans $\mathbf{B} \cap \mathbf{J}$, où $\mathbf{J}$ est un intervalle. Ceci implique que $f^{(n)}$ s'annule sur $\mathbf{B} \cap \mathbf{J}$. Il existe d'autre part un sous-intervalle $\mathbf{K}$ de $\mathbf{J}$ complémentaire de $\mathbf{B}$ et un entier m tel que $f^{(m)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{K}$. Si $m \leqslant n$, alors $f^{(n)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{K}$. Si $m > n$, $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{J}$ car chaque point de $\mathbf{B}$ est un point d'accumulation. En particulier, $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = f^{(m)}(x) = 0$ aux extrémités a et b de $\mathbf{K}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{K}$,

$$0 = \int_a^x f^{(m)}(t)\,dt = f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(a) = f^{(m-1)}(x).$$

En répétant le procédé, on obtient donc aussi $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{K}$ dans le cas où $m > n$. Bien sûr, le raisonnement s'applique à tout sous-intervalle $\mathbf{K}$ de $\mathbf{J}$ complémentaire de $\mathbf{B}$. Il s'ensuit que $f^{(n)}(x) = 0$ pour $x \in \mathbf{J}$ et aucun point de $\mathbf{B}$ ne se trouve donc dans $\mathbf{J}$, contradiction. L'ensemble $\mathbf{B}$ est donc vide ce qui signifie que $\mathbf{I} = [0\,,1]$ était le seul intervalle au départ.

(11) On pourra trouver une démonstration n'utilisant pas le théorème de Baire, par exemple, dans S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'Agrégation - Calcul différentiel*, Ellipse, 1998. (N.d.T.)

II.5.57. On pose

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,,1/2], \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si } x \in \,]1/2\,,1]. \end{cases}$$

On a alors $f'(x) = 0$ pour $x \in [0\,,1/2]$ et $f^{(3)}(x) = 0$ pour $x \in \,]1/2\,,1]$.

L'exemple suivant montre que la conclusion de **II.5.56** est fausse si on a seulement $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in [0\,,1]$:

$$f(x) = \sin\frac{x}{2}, \quad x \in [0\,,1].$$

II.6. Dérivabilité forte et dérivabilité au sens de Schwarz

II.6.1. Il suffit de prendre $x_2 = a$ dans la définition **5**. La réciproque est fausse (voir, par exemple, **II.1.13**).

II.6.2. [M. Esser, O. Shisha, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 904-906]. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\mathbf{B} = \{x : |x - a| < \delta\} \subset \mathbf{A}$$

et

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - f^*(a)\right| < \varepsilon$$

si $x_1, x_2 \in \mathbf{B}$ et $x_1 \neq x_2$. Si maintenant $x \in \mathbf{A}^1$ (autrement dit, si $f'(x)$ existe) et si $|x - a| < \frac{\delta}{2}$, on a alors

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - f^*(a)\right| < \varepsilon$$

pour tout x_2 tel que $|x_2 - a| < \frac{\delta}{2}$. En faisant tendre x_2 vers x, on obtient $|f'(x) - f^*(a)| \leqslant \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbf{A}^1}} f'(x) = f^*(a) = f'(a)$. Puisque $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}^1$, il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbf{A}^*}} f^*(x) = f^*(a) = f'(a).$$

II.6.3. [M. Esser, O. Shisha, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 904-906]. La fonction f' étant continue en a, le théorème des accroissements finis donne

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a) \\ x_1\neq x_2}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a) \\ x_1\neq x_2}} f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = f'(a).$$

II.6.4. [M. Esser, O. Shisha, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 904-906]. Non. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,,1[$ par

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt,$$

où

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in\,]-1\,,0]\cup\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2k+1}\,,\frac{1}{2k}\right[,\\ t & \text{si } t\in\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2k}\,,\frac{1}{2k-1}\right[.\end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-1\,,1[$ et

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_1\neq x_2}}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_1\neq x_2}}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_2}^{x_1}g(t)\,dt=0.$$

Cette égalité se déduit du fait que

$$0\leqslant\int_{x_2}^{x_1}g(t)\,dt\leqslant\frac{x_1^2-x_2^2}{2}\quad\text{pour}\quad x_2<x_1.$$

La fonction f est donc fortement dérivable en 0, mais f' n'est pas définie en $\frac{1}{n}$, $n=3,4,5,\ldots$

II.6.5. Le résultat se déduit immédiatement de **II.6.2** et **II.6.3**.

II.6.6. [C.L. Belna, M.J. Evans, P.D. Humke, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), 121-123]. On note d'abord que f' appartient à la première classe de Baire car

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

L'ensemble des points de discontinuité de f' est donc un ensemble de première catégorie (voir **I.7.20**). La proposition se déduit alors du résultat de **II.6.3**.

II.6.7. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)<\alpha<f(b)$, on pose

$$c=\inf\left\{x\in\,]a\,,b[\;:\;f(x)>\alpha\right\}.$$

Clairement, $c\neq a$ et $c\neq b$. Par définition de la borne inférieure, $f(x)\leqslant\alpha$ pour $x\in[a\,,c]$ et il existe une suite strictement positive $\{h_n\}$ convergente vers 0 telle que $f(c+h_n)>\alpha$. La fonction f étant Schwarz-dérivable en c, on a

$$f^s(c)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c-h_n)}{2h_n}\geqslant 0.$$

On peut noter que, de la même manière, si $f(a) > f(b)$, il existe $c \in]a\,,b[$ tel que $f^s(c) \leqslant 0$.

II.6.8. [C.E. Aull, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 708-711]. La proposition est évidente si f est identiquement nulle sur $[a\,,b]$. On suppose donc qu'il existe $c \in]a\,,b[$ tel que, par exemple, $f(c) > 0$. Le résultat précédent implique qu'il existe x_1 et x_2 tels que $a < x_1 < c < x_2 < b$, $f^s(x_1) \geqslant 0$ et $f^s(x_2) \leqslant 0$.

II.6.9. [C.E. Aull, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 708-711]. On voit facilement que la fonction auxiliaire

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

vérifie les hypothèses du problème précédent.

II.6.10. [C.E. Aull, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 708-711]. Puisque f^s est bornée sur $]a\,,b[$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f^s(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a\,,b[$. Le résultat du problème précédent donne alors

$$-M \leqslant \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leqslant M \quad \text{si} \quad x, t \in]a\,,b[\,, x \neq t.$$

En conséquence, $|f(x) - f(t)| \leqslant M\,|x - t|$.

II.6.11. [C.E. Aull, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 708-711]. D'après **II.6.9**, il existe x_1 et x_2 entre x et $x + h$ ($x, x + h \in]a\,,b[$) tels que

$$f^s(x_2) \leqslant \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leqslant f^s(x_1).$$

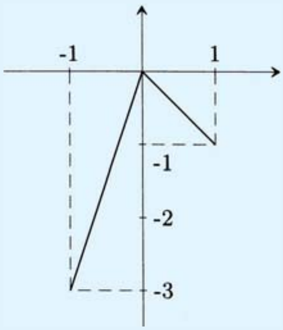
D'autre part, par continuité de f^s, il existe x_3 entre x et $x + h$ tel que $f^s(x_3) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En faisant tendre h vers 0, on obtient $f^s(x) = f'(x)$.

II.6.12. Si x et z ($x < z$) se trouvent dans $\mathbf{I}$, d'après **II.6.9**, il existe alors $x_2 \in]x\,,z[$ tel que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geqslant f^s(x_2) \geqslant 0.$$

II.6.13. Comme précédemment, il suffit d'appliquer le résultat de **II.6.9**.

II.6.14. Non. Considérez, par exemple, la fonction f définie sur $x \in]-1\,,1[$ par $f(x) = x - 2\,|x|$. On vérifie facilement que $f^s(0) = 1$ et $f(0)$ est le maximum de f sur $]-1\,,1[$.



II.6.15. [C.L. Belna, M.J. Evans, P.D. Humke, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), 121-123]. Il suffit de prouver qu'il existe un ensemble résiduel sur lequel la première égalité est vérifiée, la seconde pouvant s'obtenir en remplaçant f par $-f$ dans la première. Par définition, $D_s f(x) \geqslant D_* f(x)$. Notre but est donc de montrer que l'ensemble

$$\mathbf{A}(f) = \{x : D_s f(x) > D_* f(x)\}$$

est un ensemble de première catégorie. On observe que $\mathbf{A}(f)$ est l'union dénombrable des ensembles

$$\mathbf{A}(f, \alpha) = \{x : D_s f(x) > \alpha > D_* f(x)\}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Il suffit donc de montrer que chacun de ces ensembles est de première catégorie. Puisque $\mathbf{A}(f, \alpha) = \mathbf{A}(g, 0)$, où $g(x) = f(x) - \alpha x$, il suffit de montrer que $\mathbf{A}(f, 0)$ est de première catégorie. On note pour ceci que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(f,0) &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbf{A}_n(f,0) \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\left\{ x : f(x-h) \leqslant f(x+h) \text{ pour } 0 < h < \frac{1}{n} \right\} \cap \mathbf{A}(f,0) \right).\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que tous les ensembles $\mathbf{A}_n(f, 0)$ sont de première catégorie. On suppose, au contraire, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{A}_n(f, 0)$ soit de seconde catégorie. Il existe alors un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ tel que $\mathbf{A}_n(f, 0)$ est aussi de seconde catégorie dans tout sous-intervalle ouvert de $\mathbf{I}$. On suppose de plus que la longueur de $\mathbf{I}$ est inférieure à $\frac{1}{n}$ et que $a, b \in \mathbf{I}$, $a < b$. Soit $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}$ un ensemble résiduel tel que $f_{|\mathbf{S}}$ soit continue, $c \in \mathbf{S} \cap \left]a, b\right[$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un sous-intervalle ouvert $\mathbf{J}$ de l'intervalle $\left]a, b\right[$ tel que $c \in \mathbf{J}$ et

$$f(x) > f(c) - \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{S} \cap \mathbf{J}. \tag{$*$}$$

Soit $\mathbf{K}$ un sous-intervalle ouvert de l'intervalle $]a\,,b[$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{K}} = 2\mathbf{K} - b = \{y : y = 2x - b, x \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{J}.$$

Puisque l'ensemble

$$\mathbf{S}_n = \left\{x : f(x-h) \leqslant f(x+h) \text{ pour } 0 < h < \frac{1}{n}\right\}$$

est de seconde catégorie dans $\mathbf{K}$ et $\mathbf{S}$ est résiduel dans $\widetilde{\mathbf{K}}$, on voit que l'ensemble $(2\mathbf{S}_n - b) \cap \left(\mathbf{S} \cap \widetilde{\mathbf{K}}\right)$ est de seconde catégorie, donc non vide. On peut choisir $\widetilde{x} \in \mathbf{S} \cap \widetilde{\mathbf{K}}$ tel que $\frac{\widetilde{x}+b}{2} \in \mathbf{S}_n$. En prenant $h = \frac{b-\widetilde{x}}{2}$ (clairement, $0 < h < 1/n$), on voit que $f(\widetilde{x}) \leqslant f(b)$. De plus, $(*)$ implique $f(c) - \varepsilon < f(\widetilde{x})$ et, $\varepsilon > 0$ pouvant être choisi arbitrairement petit, on conclut que $f(c) \leqslant f(b)$. On peut montrer de la même manière que $f(a) \leqslant f(c)$. On a donc prouvé que f est croissante sur $\mathbf{I}$, d'où $D_* f(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbf{I}$. On a alors $\mathbf{A}(f, 0) \cap \mathbf{I} = \varnothing$, contradiction.

II.6.16. Le résultat se déduit immédiatement du problème précédent. Notez qu'il s'agit d'une généralisation de **II.6.6**.

II.6.17. [J. Swetits, *Amer. Math. Monthly* 75 (1968), 1093-1095]. On peut supposer que f est localement bornée sur $[x_1\,, x_0[$ et $x_0 - x_1 < \delta < 1$. On note x_2 le milieu de $[x_1\,, x_0[$. Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [x_1\,, x_2]$. On choisit h, $0 < h < \frac{\delta}{2}$, tel que

$$|f(x_2 + h)| > 1 + M + |f^s(x_2)|\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_2+h) - f(x_2-h)}{2h} - f^s(x_2)\right| &\geqslant \left|\frac{f(x_2+h) - f(x_2-h)}{2h}\right| - |f^s(x_2)| \\ &\geqslant |f(x_2+h)| - |f(x_2-h)| - |f^s(x_2)| \\ &\geqslant |f(x_2+h)| - M - |f^s(x_2)| > 1.\end{aligned}$$

La fonction f n'est donc pas uniformément Schwarz-dérivable sur $[a\,,b]$.

II.6.18. On peut utiliser le résultat de **II.6.9** et procéder comme dans la solution de **II.2.26**.

II.6.19. On considère la fonction définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La dérivée de Schwarz f^s est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ mais f n'est uniformément Schwarz-dérivable sur aucun intervalle contenant 0.

II.6.20. [J. Swetits, *Amer. Math. Monthly* 75 (1968), 1093-1095]. On suppose d'abord que la fonction f est uniformément Schwarz-dérivable sur tout intervalle $[a\,,b] \subset \mathbf{I}$. Soit $x_0 \in]a\,,b[$ et $\delta_1 > 0$ tel que $[x_0 - \delta_1\,, x_0 + \delta_1] \subset]a\,,b[$. On pose $\mathbf{I}_1 =]x_0 - \delta_1\,, x_0 + \delta_1[$. Puisque f est localement bornée sur $\mathbf{I}$, il existe $M > 0$, tel que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{I}_1.$$

Soit $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^s(x) \right| < 1$$

pour $|h| < \delta$ et $x \in [a\,,b]$. On a alors

$$|f^s(x)| < 1 + \left| \frac{f(x+h_1) - f(x-h_1)}{2h_1} \right| < 1 + \frac{2M}{2\,|h_1|}$$

pour $x \in \mathbf{I}_2 = \left]x_0 - \frac{\delta_1}{2}\,, x_0 + \frac{\delta_1}{2}\right[$ et $|h_1| < \min\{\delta, \delta_1/2\}$. La dérivée de Schwarz f^s est donc localement bornée sur $\mathbf{I}$. On prouve maintenant que f est continue sur $\mathbf{I}$. Supposons, au contraire, que f est discontinue en $x_0 \in [a\,,b] \subset \mathbf{I}$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x' \in [a\,,b] \cap]x_0 - \delta\,, x_0 + \delta[$ pour lequel $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon$. Puisque f^s est localement bornée, il existe $M_1 > 0$ tel que $|f^s(x)| \leqslant M_1$ pour x dans l'intervalle d'extrémités x' et x_0. En conséquence,

$$\left| \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} - f^s\left(\frac{x' + x_0}{2}\right) \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{|x' - x_0|} - M_1,$$

ce qui contredit l'uniforme Schwarz-dérivabilité de f sur $[a\,,b]$. On a donc prouvé que f est continue sur $\mathbf{I}$ et, d'après le résultat de **II.6.18**, il en est de même pour f^s. Ceci, combiné avec **II.6.11**, montre que f' existe et est continue sur $\mathbf{I}$. Le fait que la condition soit suffisante se déduit immédiatement du résultat de **II.6.18**.

III

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Énoncés

III.1. Suites de fonctions, convergence uniforme

On adopte la définition suivante :

Définition. Une suite de fonctions $\{f_n\}$ *converge uniformément* sur $\mathbf{A}$ vers une fonction f si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0$ implique $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{A}$. On notera ceci $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$.

III.1.1. Prouver qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ définies sur $\mathbf{A}$ est uniformément convergente sur $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ vers $f \colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si la suite réelle $\{d_n\}$,

$$d_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers 0.

III.1.2. Soit $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ deux suites telles que $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$ et $g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} g$. Prouver que $f_n + g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f + g$. A-t-on $f_n \times g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f \times g$?

III.1.3. Soit $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ deux suites telles que $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$, $g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} g$ et telles qu'il existe $M > 0$ vérifiant $|f(x)| < M$ et $|g(x)| < M$ pour tout $x \in \mathbf{A}$. Prouver que $f_n \times g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f \times g$.

III.1.4. Soit $\{a_n\}$ une suite réelle convergente et $\{f_n\}$ une suite de fonctions vérifiant

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in \mathbf{A}\} \leqslant |a_n - a_m|, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.1.5. Montrer que la limite d'une suite de fonctions bornées et uniformément convergente sur $\mathbf{A}$ est bornée sur $\mathbf{A}$. Cette proposition est-elle vraie dans le cas de la convergence simple ?

III.1.6. Montrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est simplement convergente mais n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Trouver une sous-suite uniformément convergente.

III.1.7. Prouver le *critère* suivant *de convergence uniforme de Cauchy*. La suite de fonctions $\{f_n\}$, définies sur $\mathbf{A}$, converge uniformément sur $\mathbf{A}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > n_0$ implique $|f_{m+n}(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbf{A}$.

III.1.8. Étudier la convergence uniforme sur $[0\,,1]$ de la suite de fonctions définie par

(a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (nx-1)^2}$,

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (nx-1)^2}$,

(c) $f_n(x) = x^n(1-x)$,

(d) $f_n(x) = nx^n(1-x)$,

(e) $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)^4$,

(f) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$,

(g) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

III.1.9. Étudier la convergence uniforme de $\{f_n\}$ sur $\mathbf{A}$ et sur $\mathbf{B}$ lorsque

(a) $f_n(x) = \cos^n x\,(1 - \cos^n x)$, $\mathbf{A} = [0\,,\pi/2]$, $\mathbf{B} = [\pi/4\,,\pi/2]$,

(b) $f_n(x) = \cos^n x \sin^{2n} x$, $\mathbf{A} = \mathbb{R}$, $\mathbf{B} = [0\,,\pi/4]$.

III.1.10. Déterminer si la suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ lorsque

(a) $\quad f_n(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{2x}{x^2 + n^3}\,, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(b) $\quad f_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right), \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(c) $\quad f_n(x) = n \ln \dfrac{1 + nx}{nx}\,, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R}_+^*,$

(d) $\quad f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(e) $\quad f_n(x) = \sqrt[n]{2^n + |x|^n}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(f) $\quad f_n(x) = \sqrt{n+1} \sin^n x \cos x, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(g) $\quad f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right), \quad \mathbf{A} = [1\,,a],\ a > 1.$

III.1.11. Soit f une fonction définie sur $[a\,,b]$. On pose $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ pour $x \in [a\,,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.

III.1.12. Vérifier que la suite $\{f_n\}$,

$$f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2},$$

converge uniformément sur $[0\,,a]$, $a > 0$. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

III.1.13. Prouver que la suite de polynômes $\{P_n\}$ définie par la relation de récurrence

$$P_0(x) = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

converge uniformément sur l'intervalle $[0\,,1]$ vers $f(x) = \sqrt{x}$.

En déduire qu'il existe une suite de polynômes uniformément convergente sur l'intervalle $[-1\,,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

III.1.14. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right) \quad \text{tend vers} \quad f'(x)$$

uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer sur un exemple que l'hypothèse d'uniforme de continuité de f' est essentielle.

III.1.15. Soit $\{f_n\}$ une suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ de fonctions uniformément continues. Prouver que la limite est aussi uniformément continue.

III.1.16. Prouver le *théorème* suivant *de Dini*. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues sur un ensemble compact $\mathbf{K}$ qui converge simplement vers une fonction f aussi continue sur $\mathbf{K}$. Si $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{K}$.

Montrer sur des exemples que chaque hypothèse du théorème de Dini (compacité de $\mathbf{K}$, continuité de la limite, continuité des f_n, monotonie de la suite $\{f_n\}$) est essentielle.

III.1.17. Une suite de fonctions $\{f_n\}$, définies sur un ensemble $\mathbf{A}$, est *équicontinue* sur $\mathbf{A}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ dès que $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in \mathbf{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $\{f_n\}$ est une suite uniformément convergente de fonctions continues sur un ensemble compact $\mathbf{K}$, alors $\{f_n\}$ est équicontinue sur $\mathbf{K}$.

III.1.18. Une suite de fonctions $\{f_n\}$, définies sur un ensemble $\mathbf{A}$, *converge continûment* sur $\mathbf{A}$ si la suite $\{f_n(x_n)\}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{A}$ convergente vers x. Prouver que si la suite $\{f_n\}$ converge continûment sur $\mathbf{A}$, on a alors

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$$

pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de $\mathbf{A}$ convergente vers $x \in \mathbf{A}$ et pour toute sous-suite $\{f_{n_k}\}$.

III.1.19. Prouver que si $\{f_n\}$ converge continûment sur $\mathbf{A}$ vers f, alors f est continue sur $\mathbf{A}$ (même si les fonctions f_n ne sont pas elles-mêmes continues).

III.1.20. Prouver que si $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ vers une fonction f continue, alors $\{f_n\}$ converge continûment sur $\mathbf{A}$. La réciproque est-elle vraie ?

III.1.21. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble compact $\mathbf{K}$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{K}$ vers $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{K}}$.

(ii) La suite $\{f_n\}$ converge continûment sur $\mathbf{K}$ vers f.

III.1.22. Soit $\{f_n\}$ une suite simplement convergente vers une fonction continue sur $[a\,,b]$ de fonctions définies sur $[a\,,b]$, toutes croissantes ou toutes décroissantes. Prouver que $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[a\,,b]$.

III.1.23. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, toutes croissantes ou toutes décroissantes et uniformément bornées sur $\mathbb{R}$. Prouver que $\{f_n\}$ contient une sous-suite simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

III.1.24. Montrer que sous les hypothèses du problème précédent, si la limite simple f de la sous-suite simplement convergente $\{f_{n_k}\}$ est continue, alors $\{f_n\}$ converge vers f uniformément sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$. La convergence doit-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

III.1.25. Démontrer que la limite d'une suite de polynômes uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.

III.1.26. Soit $\{P_n\}$ une suite de polynômes de la forme

$$P_n(x) = a_{n,p}x^p + a_{n,p-1}x^{p-1} + \cdots + a_{n,0}.$$

Prouver que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\{P_n\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$,

(ii) il existe $p+1$ réels distincts $c_0, c_1, \ldots, c_p$ tels que $\{P_n\}$ converge sur $\{c_0, c_1, \ldots, c_p\}$,

(iii) la suite des coefficients $\{a_{n,i}\}$ converge pour $i = 0, 1, 2, \ldots, p$.

III.1.27. Prouver que si $\{f_n\}$ est simplement convergente et équicontinue sur un ensemble compact $\mathbf{K}$, alors $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{K}$.

III.1.28. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle fermé $[a\,,b]$ et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a\,,b[$. On suppose de plus que la suite $\{f_n'\}$ est uniformément bornée sur $]a\,,b[$, autrement dit, qu'il existe $M > 0$ tel que $|f_n'(x)| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]a\,,b[$. Prouver que si $\{f_n\}$ converge simplement sur $[a\,,b]$, elle converge alors uniformément sur cet intervalle.

III.1.29. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\{f_n\}$ et $\{f_n'\}$ sur $\mathbf{A}$, où

(a) $\qquad f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\,, \qquad \mathbf{A} = \mathbb{R},$

(b) $\qquad f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}\,, \qquad \mathbf{A} = [-1\,,1].$

III.1.30. Soit $\{f_n\}$ une suite uniformément convergente sur $\mathbf{A}$ vers une fonction f. Soit x_0 un point d'accumulation de $\mathbf{A}$ tel que, à partir d'une certaine valeur de l'indice n, la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ existe. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Prouver aussi que si $\{f_n\}$ est uniformément convergente sur $]a\,,+\infty[$ vers f et qu'à partir d'une certaine valeur de l'indice n, la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Les égalités précédentes signifient que si la limite dans un membre de l'égalité existe, la limite dans l'autre membre existe aussi et ces deux limites sont égales.

III.1.31. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a\,,b]$ telle que $\{f_n(x_0)\}$ converge pour un $x_0 \in [a\,,b]$. Prouver que si la suite $\{f_n'\}$ converge uniformément sur $[a\,,b]$, alors $\{f_n\}$ converge aussi uniformément sur $[a\,,b]$ vers une fonction f dérivable sur $[a\,,b]$ et

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \quad \text{pour} \quad x\in[a\,,b].$$

III.1.32. On définit pour $f\colon [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ le *polynôme de Berstein* $B_n(f,x)$ d'ordre n de la fonction f par

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k\,(1-x)^{n-k}\,.$$

Prouver que si f est continue sur $[0\,,1]$, $\{B_n(f)\}$ converge alors uniformément vers f sur $[0\,,1]$.

III.1.33. Utiliser le résultat du problème précédent pour démontrer le *théorème d'approximation de Weierstrass*. Si $f\colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a\,,b]$.

III.2. Séries de fonctions, convergence uniforme

III.2.1. Trouver où les séries suivantes convergent simplement.

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,, \qquad x \neq -1,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}\,, \qquad x \neq -1,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + x^n}{1+3^n x^n}\,, \qquad x \neq -\frac{1}{3}\,,$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)\,(1-x^{n+1})}\,, \qquad x \neq -1, 1,$$

(e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}\,, \qquad x \neq -1, 1,$$

(f) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{x},$$

(g) $$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\ln n}, \qquad x > 0,$$

(h) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^2\left(2\pi\sqrt{n^2+x^2}\right).$$

III.2.2. Étudier la convergence uniforme des séries suivantes sur l'ensemble $\mathbf{A}$ donné :

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(n^2\left(1+x^2\right)\right)\right), \quad \mathbf{A}=\mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \quad \mathbf{A}=[2\,,+\infty[\,,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^2e^{-n^2|x|}, \quad \mathbf{A}=\mathbb{R},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty}x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}, \quad \mathbf{A}=[-1\,,1],$$

(e) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right), \quad \mathbf{A}=\{x\in\mathbb{R} : 1/2\leqslant|x|\leqslant 2\}\,,$$

(f) $$\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}\,, \mathbf{A}=\mathbb{R}_+^*,$$

(g) $$\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), \quad \mathbf{A}=\left]-a\,,a\right[\,,\ a>0.$$

III.2.3. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, f_n étant définie par

- $f_n(x)=0$ si $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n+1}$ ou si $\frac{1}{2n-1}\leqslant x\leqslant 1$,
- $f_n(x)=\frac{1}{n}$ si $x=\frac{1}{2n}$,
- f_n est continue et est affine sur chacun des intervalles $\left[\frac{1}{2n+1}\,,\frac{1}{2n}\right]$ et $\left[\frac{1}{2n}\,,\frac{1}{2n-1}\right]$,

converge uniformément sur $[0\,,1]$ bien que le test de Weierstrass ne s'applique pas.

III.2.4. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}\,.$$

III.2.5. Étudier la continuité de la somme des séries suivantes sur leur domaine de convergence simple :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n(x+1)$.

III.2.6. Déterminer où la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x|^{\sqrt{n}}$ converge simplement et étudier la continuité de la somme.

III.2.7. Démontrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ converge simplement vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.8. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbf{A}$, une série uniformément convergente sur $\mathbf{A}$ et $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x)f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

Montrer sur un exemple que le fait que f soit bornée est essentiel. Sous quelles hypothèses sur f la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x)f_n(x)$ implique-t-elle la convergence uniforme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbf{A}$?

III.2.9. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbf{A}$ telle que

(1) $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(2) $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(3) $\sup\limits_{x\in\mathbf{A}} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.2.10. Prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des séries suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+x^2}+x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+\cos x}$.

III.2.11. Prouver que si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^2(x)$ converge simplement sur $\mathbf{A}$, si

$$\sup_{x\in\mathbf{A}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^2(x)\right) < +\infty$$

et si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n^2$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.2.12. Déterminer le domaine de convergence simple $\mathbf{A}$ et le domaine de convergence absolue $\mathbf{B}$ des séries suivantes. De plus, étudier la convergence uniforme sur l'ensemble $\mathbf{C}$ donné.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}(3x-1)^n$, $\quad\mathbf{C} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n$, $\quad\mathbf{C} = [-2, -1]$.

III.2.13. Soit $f_n, g_n\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions vérifiant les conditions suivantes :

(1) la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$,

(2) $\sup\limits_{x\in\mathbf{A}} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

(3) la suite $\{G_n(x)\}$, où $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$, est uniformément bornée sur $\mathbf{A}$.

Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

En déduire le *test de convergence uniforme de Dirichlet*. Soit $f_n, g_n : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions vérifiant les conditions suivantes :

(1') pour tout $x \in \mathbf{A}$, la suite $\{f_n(x)\}$ est monotone,

(2') $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{A}$,

(3') la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est uniformément bornée sur $\mathbf{A}$.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ converge alors uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.2.14. Montrer que les séries suivantes convergent uniformément sur l'ensemble $\mathbf{A}$ indiqué :

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \mathbf{A} = [0\,,1],$$

(b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad \mathbf{A} = [\delta\,,2\pi-\delta],\ 0<\delta<\pi,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2x\right)\sin(nx)}{n+x^2}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\operatorname{Arctan}(nx)}{n}, \quad \mathbf{A} = [\delta\,,2\pi-\delta],\ 0<\delta<\pi,$$

(e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}, \quad \mathbf{A} = [a\,,+\infty[\,,\ a>0,$$

(f) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R}_+.$$

III.2.15. Soit $f_n, g_n : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions vérifiant les conditions suivantes :

(1) la fonction f_1 est bornée sur $\mathbf{A}$,

(2) la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ converge simplement sur $\mathbf{A}$ et

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \right) < +\infty,$$

(3) la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

En déduire le *test de convergence uniforme d'Abel*. On considère les fonctions $f_n, g_n \colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :

(1') pour tout $x \in \mathbf{A}$, la suite $\{f_n(x)\}$ est monotone,

(2') la suite $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur $\mathbf{A}$,

(3') la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ converge alors uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.2.16. Montrer que les séries suivantes convergent uniformément sur l'ensemble $\mathbf{A}$ donné.

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \operatorname{Arctan}(nx), \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos\frac{x}{n}}{\sqrt{n} + \cos x}, \quad \mathbf{A} = [-R\,, R],\ R > 0,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R}_+.$$

III.2.17. Soit f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions continues sur $\mathbf{A}$ telles que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$. Prouver que si $x_0 \in \mathbf{A}$ est un point d'accumulation de $\mathbf{A}$, alors

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0).$$

III.2.18. Vérifier les propositions suivantes :

(a) $$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln 2,$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \ln 2,$$

(c) $$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = 1,$$

(d) $$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x} = 1,$$

(e) $$\lim_{x\to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

III.2.19. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente. Déterminer

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

III.2.20. Soit f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions continues sur $[0\,,1]$ telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0\,,1[$. Prouver que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(1)$ converge.

III.2.21. Trouver le domaine de convergence simple $\mathbf{A}$ de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\cos(nx)$. La série converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{A}$?

III.2.22. Soit $f_n \colon [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions continues telles que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ soit continue sur $[a\,,b]$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur cet intervalle.

III.2.23. Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ une série normalement convergente sur $\mathbf{A}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ doit-elle être uniformément convergente sur $\mathbf{A}$?

III.2.24. Soit f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions monotones sur $[a\,,b]$. Prouver que si $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est absolument convergente aux extrémités de $[a\,,b]$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est normalement convergente sur tout l'intervalle $[a\,,b]$.

III.2.25. Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_n|}$ une série convergente. Prouver que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x-a_n}$ converge normalement sur chaque ensemble borné $\mathbf{A}$ ne contenant aucun des a_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

III.2.26. Soit $\{a_n\}$ une suite réelle. Démontrer que si la *série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ converge en $x = x_0$, elle converge alors uniformément sur $[x_0\,,+\infty[$.

III.2.27. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x\frac{\sin\left(n^2x\right)}{n^2}.$$

III.2.28. Soit f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions dérivables sur $[a\,,b]$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge en un point $x_0 \in [a\,,b]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformément sur $[a\,,b]$. Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a\,,b]$ vers une fonction dérivable et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \quad \text{pour} \quad x \in [a\,,b].$$

III.2.29. Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

III.2.30. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$$

est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}\,,\frac{11\pi}{6}\right]$.

III.2.31. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(0)$, $f'(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

III.2.32. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prouver que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

III.2.33. Prouver que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(nx^2\right)}{1 + n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

III.2.34. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, (\tan x)^n, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Prouver que f est continûment dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

III.2.35. On définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Prouver que $f \in \mathscr{C}_{[0,+\infty[}$, $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]0,+\infty[}$ et $f'(0)$ n'existe pas.

III.2.36. Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{x^2 + n^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

III.2.37. Prouver que la *fonction* ζ *de Riemann* définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

appartient à $\mathscr{C}^{\infty}_{]1,+\infty[}$.

III.2.38. Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]0,1[}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :

(1) $f \not\equiv 0$,

(2) $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(3) la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n f^{(n)}(x)$ converge uniformément sur $[0\,,1]$ pour une suite réelle $\{a_n\}$.

Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n!a_n = 0.$$

III.2.39. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x)$ la distance de x au plus proche nombre rationnel de dénominateur égal à n (le numérateur et le dénominateur n'ont pas à être premiers entre eux). Trouver pour quelles valeurs de x la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

III.2.40. On pose $g(x) = |x|$ pour $x \in [-1\,,1]$. On prolonge la fonction g à $\mathbb{R}$ en posant $g(x+2) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver que la *fonction de Weierstrass* f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g\left(4^n x\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

III.3. Séries entières

III.3.1. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ une série entière. Démontrer qu'il existe $R \in [0\,,+\infty]$ tel que

(1) la série converge absolument si $|x-x_0| < R$ et diverge si $|x-x_0| > R$,

(2) R est la borne supérieure de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\{|a_n| r^n\}$ est une suite bornée,

(3) $1/R = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

R est appelé le *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$.

III.3.2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}}\right)^n x^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{n^2}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n^2} x^{n!}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$.

III.3.3. Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} (\tan x)^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)^{n^2}$.

III.3.4. Prouver que si les rayons de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sont respectivement égaux à R_1 et R_2, alors

(a) le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ est égal à $\min\{R_1, R_2\}$ si $R_1 \neq R_2$. Que peut-on dire de R si $R_1 = R_2$?

(b) le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$ vérifie $R \geqslant R_1 R_2$. Montrer sur un exemple que l'inégalité peut être stricte.

III.3.5. Soit R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Prouver que

(a) si $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+^*$, alors le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n, \quad b_n \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

vérifie $R \leqslant \frac{R_1}{R_2}$,

(b) le rayon de convergence R du produit de Cauchy (voir, par exemple, **III.6.1 (vol. I)**) des deux séries vérifie $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$.

Montrer sur des exemples que les inégalités données en (a) et (b) peuvent être strictes.

III.3.6. Trouver le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si :

(a) il existe α et $L > 0$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n n^\alpha| = L$,

(b) il existe $\alpha, L > 0$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n \alpha^n| = L$,

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n n!| = L$, $L \in \mathbb{R}_+^*$.

III.3.7. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Évaluer le rayon de convergence de :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^n a_n x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 x^n$.

III.3.8. Trouver toutes les séries entières uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

III.3.9. Trouver le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

et montrer que sa somme vérifie l'équation $f'(x) = 1 + xf(x)$, $x \in]-R\,, R[$.

III.3.10. Prouver que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge sur $\mathbb{R}$ et que sa somme f vérifie l'équation $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

III.3.11. Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si f est la somme de la série et si $x_0 \in]-R\,, R[$ est tel que $S_n(x_0) < f(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x_0) \neq 0$.

III.3.12. Soit $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. On pose $T_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$. Prouver que si $\{T_n\}$ est bornée, alors les séries entières $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) T_n x^n$ convergent pour $|x| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) T_n x^n.$$

III.3.13. On note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$, $|x| < 1$. Prouver qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\left|f'(x)\right| < \frac{M}{1-|x|} \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

III.3.14. Prouver le *théorème d'Abel*. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge vers L, alors

(a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,,1]$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = L$.

III.3.15. Prouver la généralisation suivante du théorème d'Abel. Si $\{S_n\}$ est la suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et si le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est égal à 1, alors

$$\varliminf_{n\to+\infty} S_n \leqslant \varliminf_{x\to 1^-} f(x) \leqslant \varlimsup_{x\to 1^-} f(x) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} S_n.$$

III.3.16. Démontrer le *théorème de Tauber*. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge vers L.

III.3.17. Montrer sur un exemple que l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$ est essentielle dans le théorème de Tauber.

III.3.18. Soit $\{a_n\}$ une suite strictement positive telle que le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit égal à 1. Prouver que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe et est finie si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

III.3.19. Démontrer la généralisation suivante du théorème de Tauber. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = L, \ L \in \mathbb{R},$$

alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge vers L.

III.3.20. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Prouver que si $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n^2$ converge et si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et a pour somme L.

III.3.21. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières de même rayon de convergence égal à 1 telles que $a_n, b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose de plus que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. Prouver que si $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}_+$, on a alors aussi $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

III.3.22. Prouver la généralisation suivante du problème précédent. On considère deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ de même rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et $T_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sont strictement positifs et que les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n$ divergent. Prouver que si $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{T_n} = A \in \mathbb{R}_+$, on a alors aussi $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

III.3.23. Montrer sur un exemple que la réciproque du théorème précédent est fausse, en clair, le fait que $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ n'implique pas l'existence de $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{T_n}$.

III.3.24. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients positifs de rayon de convergence égal à 1 telle que $\lim_{x \to 1^-} f(x)(1-x) = A \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver qu'il existe A_1 et A_2 strictement positifs tels que

$$A_1 n \leqslant S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \leqslant A_2 n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

III.3.25. Démontrer le *théorème de Hardy et Littlewood*. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients positifs de rayon de convergence égal à 1 telle que $\lim_{x\to 1^-} f(x)(1-x) = A \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = A$$

où $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

III.3.26. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Prouver que si la suite $\{na_n\}$ est bornée et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et a pour somme L.

III.3.27. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Prouver que si $\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x)$ existe et n'est pas nulle, alors la suite $\{a_n\}$ ne peut pas converger vers 0.

III.4. Séries de Taylor

III.4.1. Soit f une fonction appartenant à $\mathscr{C}^{\infty}_{[a,b]}$. Prouver que si toutes les dérivées $f^{(n)}$ sont uniformément bornées sur $[a\,,b]$, on a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

pour x et x_0 dans $[a\,,b]$.

III.4.2. On pose

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

A-t-on l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

pour $x \neq 0$?

III.4.3. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2x)}{e^n}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f appartient à $\mathscr{C}^{\infty}_{\mathbb{R}}$ et que l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

n'est vérifiée qu'en 0.

III.4.4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ et $|x| < 1$, on a alors

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

On appelle cette identité la *formule du binôme de Newton*.

III.4.5. Montrer que, pour $|x| \leqslant 1$, on a

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(1-x^2\right)^n.$$

III.4.6. Prouver que si la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \left]-R\,, R\right[$, alors $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]-R,R[}$ et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

III.4.7. Prouver que si x_0 appartient à l'intervalle de convergence $\left]-R\,, R\right[$ $(R > 0)$ de la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{pour} \quad |x-x_0| < R - |x_0|\,.$$

III.4.8. Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ des séries entières convergentes sur le même intervalle $\left]-R\,, R\right[$. Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des $x \in \left]-R\,, R\right[$ pour lesquels

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Prouver[(1)] que si $\mathbf{A}$ admet un point d'accumulation dans $]-R\,,R[$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.4.9. Trouver la série de Taylor de f en 0 lorsque

(a) $f(x) = \sin x^3, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \sin^3 x, \quad x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = \sin x \cos 3x, \quad x \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x, \quad x \in \mathbb{R}$,

(e) $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \quad x \in \,]-1\,,1[\,$,

(f) $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right), \quad x \in \,]-1\,,1[\,$,

(g) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 5x + 6x^2}, \quad x \in \,]-1/3\,,1/3[\,$,

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}, \quad x \in \,]-1\,,1[\,$.

III.4.10. Trouver la série de Taylor de la fonction f en 1 lorsque

(a) $f(x) = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}, \quad x \neq 0$,

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0$,

(d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x > 0$.

III.4.11. Établir pour $|x| < 1$ les égalités suivantes :

(a) $$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\, x^{2n+1},$$

(b) $$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Montrer, en utilisant les identités précédentes, que

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}\,.$$

[(1)] Cette propriété est appelée le *principe de prolongement analytique*. (N.d.T.)

III.4.12. Trouver la série de Taylor de f en 0 lorsque

(a) $f(x) = x \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right), \quad x \in \left]-1\,,1\right[,$

(b) $f(x) = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in \left]-1\,,1\right[.$

III.4.13. Trouver la somme des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n} n}{(2n+1)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2+n-2}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{(2n)!!}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$.

III.4.14. Trouver la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ pour $|x| \leqslant 1$.

III.4.15. Démontrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral (voir **II.3.4**), le *théorème* suivant *de Berstein*. Soit f une fonction infiniment dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ telle que toutes ses dérivées $f^{(n)}$ soient positives sur $\mathbf{I}$. Prouver que f est une *fonction analytique réelle* sur $\mathbf{I}$, autrement dit une fonction telle que, pour tout $x_0 \in \mathbf{I}$, il existe un voisinage $\left]x_0 - r\,, x_0 + r\right[\subset \mathbf{I}$ où

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{pour} \quad |x-x_0| < r.$$

III.4.16. Soit f une fonction infiniment dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$. Prouver que si, pour tout $x_0 \in \mathbf{I}$, il existe un intervalle ouvert $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ tel que $x_0 \in \mathbf{J}$ et s'il existe des constantes $C > 0$ et $\rho > 0$ telles que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant C\frac{n!}{\rho^n} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{J},$$

alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{pour} \quad x \in \left]x_0-\rho\,, x_0+\rho\right[\cap \mathbf{J}.$$

III.4.17. Soit f une fonction analytique réelle sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$. Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbf{I}$, il existe un intervalle ouvert $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ tel que $x_0 \in \mathbf{J}$ et des constantes strictement positives A et B telles que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant A\frac{n!}{B^n} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{J}.$$

III.4.18. Appliquer la formule de Faà di Bruno (voir **II.1.38**) pour prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $A > 0$, on a

$$\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} A^k = A\,(1+A)^{n-1}$$

où $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ et la somme est prise sur l'ensemble des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

III.4.19. Soit $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ des intervalles ouverts et $f\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{J}$, $g\colon \mathbf{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions analytiques réelles, respectivement sur $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$. Démontrer que $h = g \circ f$ est une fonction analytique réelle sur $\mathbf{I}$.

III.4.20. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ telle que $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{I}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que f est une fonction analytique réelle sur $\mathbf{I}$.

III.4.21. Appliquer la formule de Faà di Bruno pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum \frac{(-1)^k\, k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1} \binom{\frac{1}{2}}{2}^{k_2} \cdots \binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n} = 2(n+1)\binom{\frac{1}{2}}{n+1}$$

où $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ et la somme est prise sur l'ensemble des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$ et $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

III.4.22. Soit f une fonction analytique réelle sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$. Prouver que si $f'(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in \mathbf{I}$, il existe alors un intervalle ouvert $\mathbf{J}$ contenant x_0 et une fonction analytique réelle g définie sur un intervalle ouvert $\mathbf{K}$ contenant $f(x_0)$ tels que $(g \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{J}$ et $(f \circ g)(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{K}$.

III.4.23. Prouver que si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $f^{-1} = f'$, f est alors analytique réelle sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.4.24. Prouver qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f^{-1} = f'$.

III.4.25. Prouver que l'unique fonction vérifiant les hypothèses du problème précédent est $f(x) = ax^c$, où $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $a = c^{1-e}$.

III.4.26. Appliquer le résultat de **II.3.10** pour montrer que, pour $x \in]0\,,2[$,

$$\ln(1+x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1}.$$

III.4.27. Soit $M_p(x,y)$ et $L(x,y)$ la moyenne des puissances et la moyenne logarithmique des réels strictement positifs x et y (voir **II.5.41** et **II.5.42**). Prouver que $L(x,y) < M_p(x,y)$ pour $x, y > 0$ et $x \neq y$ si $p \geqslant \frac{1}{3}$.

III.4.28. Avec les notations de **III.4.27**, prouver qu'il existe des réels strictement positifs x et y tels que $L(x,y) > M_p(x,y)$ si $p < \frac{1}{3}$.

III.4.29. Avec les notations de **III.4.27**, prouver que $L(x,y) > M_p(x,y)$ pour $x, y > 0$ et $x \neq y$ si $p \leqslant 0$.

III.4.30. Avec les notations de **III.4.27**, prouver qu'il existe des réels strictement positifs x et y tels que $L(x,y) < M_p(x,y)$ si $p > 0$.

Solutions

III.1. Suites de fonctions, convergence uniforme

III.1.1. On suppose d'abord que $f_n \underset{\mathbf{B}}{\rightrightarrows} f$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in \mathbf{B}$. Donc, pour $n \geqslant n_0$,

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\} \leqslant \varepsilon$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

On suppose maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$. On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\} < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand et pour tout $x \in \mathbf{B}$, ce qui signifie que $\{f_n\}$ est uniformément convergente vers f sur $\mathbf{B}$.

III.1.2. Étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour n suffisamment grand et pour tout $x \in \mathbf{A}$. Donc,

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand et pour tout $x \in \mathbf{A}$. Pour voir que la proposition analogue pour le produit de deux suites uniformément convergentes est fausse, on considère les fonctions suivantes :

$$f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \left]0\,,1\right[.$$

On a $f_n \underset{]0,1[}{\rightrightarrows} f$ et $g_n \underset{]0,1[}{\rightrightarrows} g$ avec $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. De plus,

$$f_n(x)g_n(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

La suite $\{f_ng_n\}$ est donc simplement convergente sur $]0\,,1[$ vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Mais

$$d_n = \sup\left\{\left|f_ng_n(x) - \frac{1}{x}\right| : x \in \left]0\,,1\right[\right\} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et la convergence n'est pas uniforme.

III.1.3. On remarque d'abord que si $\{g_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ vers une fonction bornée g, il existe alors $C > 0$ tel que $|g_n(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et pour n suffisamment grand. Étant donné $\varepsilon > 0$, la convergence uniforme de $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ donne

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{et} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

pour n suffisamment grand et pour tout $x \in \mathbf{A}$. Donc, pour n suffisamment grand et pour tout $x \in \mathbf{A}$,

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)|\,|f(x)| < \varepsilon.$$

III.1.4. Le critère de Cauchy pour la convergence des suites réelles implique que $\{f_n\}$ est simplement convergente sur $\mathbf{A}$ vers une limite que l'on note f. Notre but est de prouver que la convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $x \in \mathbf{A}$ si $m, n > n_0$. Par continuité de la valeur absolue, on obtient

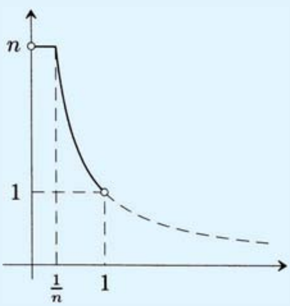
$$\lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \geqslant n_0$.

III.1.5. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions bornées et uniformément convergente sur $\mathbf{A}$ vers f. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| < \varepsilon + |f_{n_0}(x)|$$

pour tout $x \in \mathbf{A}$. Puisque f_{n_0} est bornée sur $\mathbf{A}$, il en est de même pour f.



La limite simple d'une suite convergente de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée comme le montre, par exemple, la suite

$$f_n(x) = \min\left\{\frac{1}{x}, n\right\}, \quad x \in]0, 1[, n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite $\{f_n\}$ converge vers la fonction non bornée $x \mapsto 1/x$ pour $x \in]0, 1[$.

III.1.6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car $d_{2n} = +\infty$. Clairement, la sous-suite $\{f_{2n-1}\}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

III.1.7. La démonstration se mène comme en **III.1.4**.

III.1.8.

(a) On a

$$\frac{1}{1+(nx-1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x),$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in]0, 1], \\ \frac{1}{2} & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

La limite n'étant pas continue, la convergence n'est pas uniforme (voir **I.2.34**).

(b) On a

$$\frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $d_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0, 1]\} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. D'après **III.1.1**, la convergence n'est pas uniforme.

(c) Puisque

$$x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $d_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0, 1]\} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, on voit que $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(d) La convergence n'est pas uniforme car

$$d_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}.$$

(e) Puisque $d_n = f_n\left(\frac{n}{n+4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la convergence est uniforme.

(f) La suite est uniformément convergente car

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - x| : x \in [0\,,1]\} = 1 - f_n(1) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(g) La suite converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0\,,1[, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

La limite n'est pas une fonction continue et la convergence n'est donc pas uniforme (voir **I.2.34**).

III.1.9.

(a) On prouve facilement que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $d_n = \frac{1}{4}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbf{A}$. D'autre part,

$$\sup\{|f_n - (x)| : x \in \mathbf{B}\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

pour $n \geqslant 2$ et la suite converge donc uniformément sur $\mathbf{B}$.

(b) La suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et elle converge aussi uniformément sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

III.1.10.

(a) Puisque $d_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

(b) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$ et, puisque $f_n(\sqrt{n}) - n = n(\ln 2 - 1)$, la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

(c) On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x}$. La suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_n\left(\frac{1}{n}\right) - n = n(\ln 2 - 1)$.

(d) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ |x| & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

On pose $u_n = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$. On a alors, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}\sqrt[2n]{1+x^{2n}} - x &= u_n - x \\ &= \frac{u_n^{2n} - x^{2n}}{u_n^{2n-1} + u_n^{2n-2}x + \cdots + x^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{u_n^{2n-1} + u_n^{2n-2}x + \cdots + x^{2n-1}} \leqslant \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$d_n \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sqrt[2n]{2} - 1 + \frac{1}{2n},$$

ce qui montre que $\{f_n\}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(e) Comme en (d), on peut montrer que la suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } |x| \leqslant 2, \\ |x| & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

(f) On a

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sqrt{n+1}\sin^n x \cos x\right| = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

(g) La suite converge simplement vers $\ln x$ (voir, par exemple, **II.5.4 (vol. I)**). D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} d_n &= \sup_{x\in[1,a]} \left|n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) - \ln x\right| \\ &= \sup_{x\in[1,a]} \left|n\left(e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1\right) - \ln x\right| \\ &= \sup_{x\in[1,a]} \left|n\left(1 + \frac{1}{n}\ln x - \frac{\ln^2 x}{2n^2}e^{\zeta_n} - 1\right) - \ln x\right| \\ &\leqslant \frac{\ln^2 a}{2n} a^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

car $0 < \zeta_n < \frac{\ln a}{n}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, ce qui prouve que $f_n \underset{[1,a]}{\rightrightarrows} f$ où $f(x) = \ln x$.

III.1.11. On a $[nf(x)] = nf(x) - p_n(x)$, où $0 \leqslant p_n(x) < 1$. Donc,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{p_n(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

et $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.

III.1.12. Puisque

$$\begin{aligned}
\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} &= \sin\left(2n\pi\sqrt{1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}} + 2n\pi - 2n\pi\right)\\
&= \sin 2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}} - 1\right)\\
&= \sin\frac{x^2}{\sqrt{4n^2\pi^2+x^2}+2n\pi},
\end{aligned}$$

on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} = \frac{x^2}{4\pi}$. De plus, si $x \in [0\,,a]$, on obtient alors, en utilisant le fait que $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}$,

$$\left|n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} - \frac{x^2}{4\pi}\right| \leqslant \frac{a^2}{4\pi}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4\pi^2n^2}}+1}\right) + \frac{n}{3!}\,\frac{a^6}{8n^3\pi^3}.$$

Ceci établit la convergence uniforme de la suite sur $[0\,,a]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ donne

$$\left|n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} - \frac{x^2}{4\pi}\right| \geqslant \frac{x^2}{4\pi}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}}+1}\right),$$

ce qui montre que la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

III.1.13. On montre d'abord par récurrence que

$$0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} < \frac{2}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,,1]$. Les inégalités sont évidentes pour $n = 1$. On suppose qu'elles sont vérifiées au rang n et on les prouve au rang $n+1$. L'hypothèse de récurrence donne

$$0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$$

et on a donc, par définition de P_{n+1},

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right)$$

et $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &\leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\\
&\leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $|x| = \sqrt{x^2}$, les inégalités prouvées impliquent que la suite de polynômes $\left\{P_n\left(x^2\right)\right\}$ converge uniformément sur $[-1\,,1]$ vers la fonction valeur absolue $|x|$.

III.1.14. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\left|\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} - f'(x)\right| = \left|f'(\zeta_n) - f'(x)\right|,$$

où $\zeta_n \in \left]x\,, x+\frac{1}{n}\right[$. La dérivée f' étant uniformément continue sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors

$$\left|f'(\zeta_n) - f'(x)\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ est donc prouvée.

On considère $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} - f'(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = +\infty,$$

ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme. L'hypothèse de continuité uniforme de f' est donc essentielle.

III.1.15. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de la suite sur $\mathbb{R}$ implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La continuité uniforme de f_{n_0} implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $|x - x'| < \delta$. Donc,

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\right| + \left|f_{n_0}(x') - f(x')\right| < \varepsilon$$

pour $|x - x'| < \delta$.

III.1.16. On pose $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ pour $x \in \mathbf{K}$ et on montre que $\{g_n\}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{K}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{g_n\}$ est simplement convergente vers 0 sur $\mathbf{K}$, pour tout $x \in \mathbf{K}$, il existe n_x tel que

$$0 \leqslant g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Par continuité de g_{n_x} et monotonie de la suite $\{g_n\}$, il existe un voisinage $\mathbf{O}(x)$ de x tel que

$$0 \leqslant g_n(t) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_x \text{ et } t \in \mathbf{O}(x). \tag{$*$}$$

$\mathbf{K}$ étant compact, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$ tels que $\mathbf{K} \subset \mathbf{O}(x_1) \cup \mathbf{O}(x_2) \cup \cdots \cup \mathbf{O}(x_n)$. Si maintenant,

$$n_0 = \max\left\{n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_n}\right\},$$

alors $(*)$ est vérifiée pour $n > n_0$ et tout $x \in \mathbf{K}$.

Pour voir que la compacité de $\mathbf{K}$ est essentielle, on considère

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad x \in \left]0\,,1\right[, n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $d_n = \sup\limits_{]0,1[} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et la convergence n'est donc pas uniforme.

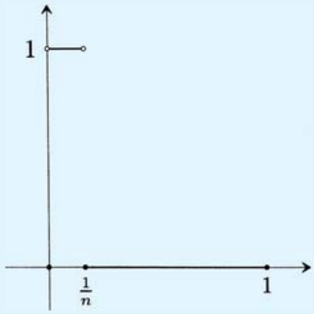
La continuité de la limite est aussi essentielle. En effet, la suite

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0\,,1], n \in \mathbb{N}^*,$$

ne converge pas uniformément sur $[0\,,1]$.

L'hypothèse de continuité de f_n ne peut pas être omise comme le montre l'exemple suivant. Les fonctions

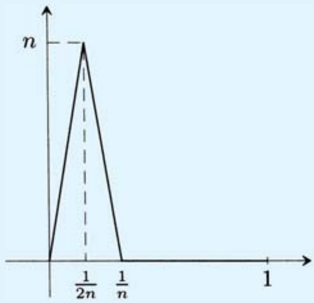
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$



ne sont pas continues. Elles forment une suite monotone simplement convergente vers 0 sur $[0\,,1]$, mais la convergence n'est pas uniforme.

Finalement, les fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{si } \frac{1}{2n} < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$



sont continues et forment une suite simplement convergente vers la fonction nulle sur $[0\,,1]$. On note que la suite $\{f_n\}$ n'est pas monotone et la convergence n'est pas uniforme.

III.1.17. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues uniformément convergente sur un ensemble compact $\mathbf{K}$ vers une limite f. On se donne $\varepsilon > 0$. On choisit n_0 tel que (voir **III.1.7**)

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour } n > n_0 \text{ et tout } x \in \mathbf{K}.$$

Ensuite, chaque fonction f_n étant uniformément continue sur $\mathbf{K}$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que si $x, x' \in \mathbf{K}$ et $|x - x'| < \delta$, alors

$$\left|f_k(x) - f_k(x')\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n_0. \tag{$*$}$$

On obtient ainsi

$$\left|f_n(x) - f_n(x')\right| \leqslant |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\right| + \left|f_{n_0}(x') - f_n(x')\right| < \varepsilon$$

pour $|x - x'| < \delta$ et $n > n_0$. Ceci, combiné à $(*)$, prouve l'équicontinuité de la suite $\{f_n\}$ sur $\mathbf{K}$.

III.1.18. Soit $\{f_{n_k}\}$ une sous-suite de $\{f_n\}$ et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ convergente vers $x \in \mathbf{A}$. On définit la suite $\{y_m\}$ en posant

$$y_m = \begin{cases} x_1 & \text{pour } 1 \leqslant m \leqslant n_1, \\ x_2 & \text{pour } n_1 < m \leqslant n_2, \\ \dots & \\ x_k & \text{pour } n_{k-1} \leqslant m \leqslant n_k. \\ \dots & \end{cases}$$

La suite $\{y_m\}$ converge vers x donc $\lim\limits_{m \to +\infty} f_m(y_m) = f(x)$ et

$$\lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

III.1.19. On note d'abord que si $\{f_n\}$ converge continûment sur $\mathbf{A}$ vers f, alors $\{f_n\}$ converge simplement vers la même limite. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer des suites constantes dont tous les termes sont égaux à un élément de $\mathbf{A}$. Soit $x \in \mathbf{A}$ et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ convergente vers x. Étant donné $\varepsilon > 0$, la convergence simple de la suite implique qu'il existe n_1 (pouvant dépendre de x_1) tel que

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe n_2 (pouvant dépendre de x_2), $n_2 > n_1$, tel que

$$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En poursuivant le procédé, on obtient une suite $\{n_k\}$ telle que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, d'après le problème précédent,

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0.$$

En conséquence, $|f(x_k) - f(x)| \leqslant |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ pour $k \geqslant k_0$.

III.1.20. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ convergente vers $x \in \mathbf{A}$ et $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $\{f_n\}$ implique

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| \leqslant \sup_{y\in\mathbf{A}} |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

La fonction f étant continue,

$$|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_1.$$

On a donc, pour $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

La réciproque de la proposition prouvée ici est fausse comme le montre l'exemple suivant. On prend $\mathbf{A} =]0\,,1[$ et $f_n(x) = x^n$. On voit facilement que $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0\,,1[$. En revanche, elle converge continûment sur cet intervalle. En effet, si $\{x_n\}$ est une suite de points de $]0\,,1[$ convergente vers $x \in]0\,,1[$, il existe alors $0 < a < 1$ tel que $x_n < a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 0$.

III.1.21. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) a été prouvée au problème précédent. Notre but est de prouver (ii) $\Rightarrow$ (i). On sait (voir **III.1.19**) que la limite f est continue sur $\mathbf{K}$. On suppose, contrairement à l'énoncé, que $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{K}$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$, une suite $\{n_k\}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et une suite $\{x_k\}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ tels que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0.$$

$\mathbf{K}$ étant compact, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\{x_k\}$ converge vers un élément $x \in \mathbf{K}$. D'autre part, d'après **III.1.18**,

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{pour} \quad k > k_0.$$

De plus, la continuité de f implique

$$|f(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{pour} \quad k > k_1.$$

Donc, pour k suffisamment grand, on a

$$\varepsilon_0 < |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leqslant |f_{n_k}(x_k) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| < \frac{2}{3}\,\varepsilon_0,$$

contradiction.

III.1.22. On suppose, par exemple, que les fonctions f_n sont croissantes sur $[a\,,b]$. Évidemment, f est uniformément continue sur $[a\,,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|f(x) - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [a\,,b]$. On choisit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ de sorte que $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

il existe n_0 tel que

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{$*$}$$

si $n > n_0$. Clairement, pour $x \in [a\,,b]$, il existe i tel que $x_{i-1} \leqslant x < x_i$. La monotonie de f_n et $(*)$ impliquent alors

$$f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_{i-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(x_i) < f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n > n_0$. La fonction f devant être croissante, on a $f(x_{i-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_i)$, ce qui, combiné à la continuité uniforme de f, donne

$$-\varepsilon < f(x_{i-1}) - f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

La convergence uniforme de $\{f_n\}$ sur $[a\,,b]$ est donc prouvée.

III.1.23. On suppose, par exemple, que les fonctions f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$. On prouve d'abord qu'il existe une sous-suite f_{n_k} convergente sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on peut écrire $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. La suite $\{f_n(r_1)\}$ est bornée et contient donc une sous-suite convergente $\{f_{n,1}(r_1)\}$. Puis, puisque $\{f_{n,1}(r_2)\}$ est bornée, il existe une sous-suite convergente $\{f_{n,2}(r_2)\}$. Clairement, $\{f_{n,2}(r_1)\}$ est aussi convergente. En répétant le procédé, on obtient la suite de suites $\{f_{n,1}\}, \{f_{n,2}\}, \ldots$, ayant les propriétés suivantes :

- $\{f_{n,k+1}\}$ est une sous-suite de $\{f_{n,k}\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$,
- la suite $\{f_{n,k}(r_i)\}$ est convergente pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1, 2, \ldots, k$.

La suite diagonale $\{f_{n,n}\}$ est donc convergente dans $\mathbb{Q}$. On a construit de cette façon une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ simplement convergente sur $\mathbb{Q}$ vers une limite que l'on note f. Clairement, f est croissante sur $\mathbb{Q}$. On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \sup\{f(r) : r \in \mathbb{Q}, r \leqslant x\}.$$

Ce prolongement de f est croissant sur $\mathbb{R}$. On montre que si f est continue en x, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. On considère pour ce faire deux suites de rationnels $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ convergentes vers x et telles que $p_n < x < q_n$. La monotonie de f_{n_k} implique $f_{n_k}(p_n) \leqslant f_{n_k}(x) \leqslant f_{n_k}(q_n)$. On obtient alors, en faisant tendre k vers $+\infty$,

$$f(p_n) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) \leqslant f(q_n).$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (voir **I.1.35**), on obtient

$$f(x^-) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) \leqslant f(x^+).$$

Il s'ensuit que $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$ en tout point x où f est continue. On sait que l'ensemble $\mathbf{D}$ des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable (voir **I.2.29**). On a donc $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$ sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbf{D}$ et, $\{f_{n_k}\}$ étant bornée sur l'ensemble dénombrable $\mathbf{D}$, on peut utiliser à nouveau le procédé d'extraction diagonale pour choisir une sous-suite de $\{f_{n_k}\}$ simplement convergente sur $\mathbf{D}$. Clairement, cette sous-suite est convergente sur $\mathbb{R}$.

III.1.24. Si $\mathbf{K}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, il existe alors un intervalle fermé $[a\,,b]$ tel que $\mathbf{K}\subset[a\,,b]$. Clairement, f est uniformément continue sur $[a\,,b]$. D'après le résultat de **III.1.22**, $\{f_{n_k}\}$ converge uniformément sur $[a\,,b]$ et converge donc aussi uniformément sur $\mathbf{K}$.

L'exemple suivant montre que $\{f_{n_k}\}$ peut ne pas converger uniformément sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^n, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Chaque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $0 < f_n(x) < 1$. La suite $\{f_n\}$ est simplement convergente vers $f \equiv 0$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme.

III.1.25. On montre d'abord que si $\{P_n\}$ est une suite de polynômes uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, alors tous les polynômes P_n sont du même degré à partir d'une certaine valeur de l'indice n. En effet, si ce n'était pas le cas, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existerait alors $n_k > k$ tel que le degré de P_k différerait de celui de P_{n_k} et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P_{n_k}(x) - P_k(x)| = +\infty,$$

contredisant le critère de convergence uniforme de Cauchy (voir **III.1.7**). Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P_n(x) = a_{n,p}x^p + a_{n,p-1}x^{p-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}$$

si $n \geqslant n_0$. De nouveau avec le critère de convergence uniforme de Cauchy, on voit que si $n \geqslant n_0$, alors les coefficients $a_{n,i}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ sont constants (ils ne dépendent pas de n), autrement dit,

$$P_n(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_{n,0}.$$

Clairement, une telle suite de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers le polynôme

$$P_n(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où $a_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,0}$.

III.1.26. Clairement, (i) $\Rightarrow$ (ii). On prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii). En effet,

$$\begin{cases} a_{n,0} + a_{n,1}c_0 + \cdots + a_{n,p}c_0^p = P_n(c_0), \\ a_{n,0} + a_{n,1}c_1 + \cdots + a_{n,p}c_1^p = P_n(c_1), \\ \qquad\vdots \\ a_{n,0} + a_{n,1}c_p + \cdots + a_{n,p}c_p^p = P_n(c_p). \end{cases} \tag{1}$$

Le *déterminant de Vandermonde*

$$\begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \ldots & c_0^p \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & c_p & c_p^2 & \ldots & c_p^p \end{vmatrix}$$

n'étant pas nul, le système d'équations linéaires (1) admet une unique solution et on peut déterminer les $a_{n,i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, p)$ à l'aide des formules de Cramer. En conséquence, (ii) implique la convergence de chaque suite $\{a_{n,i}\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, p$. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est facile à prouver.

III.1.27. La suite $\{f_n\}$ étant équicontinue, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

dès que $|x - y| < \delta$, $x, y \in \mathbf{K}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

(On remarque que ceci montre que f est uniformément continue sur $\mathbf{K}$.) L'ensemble $\mathbf{K}$ étant compact, il existe un recouvrement fini de $\mathbf{K}$ par des intervalles ouverts $]x_i - \delta\,, x_i + \delta[$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $x_i \in \mathbf{K}$. Par convergence simple de $\{f_n\}$, il existe n_0 tel que

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{3}$$

si $n > n_0$. Clairement, pour $x \in \mathbf{K}$, il existe un indice i tel que $|x - x_i| < \delta$. Donc, d'après (1), (2) et (3), si $n > n_0$, alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon.$$

III.1.28. On observe que $\{f_n\}$ est équicontinue sur $[a\,, b]$. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left|f_n'(\zeta)\right| |x - y| \leqslant M\,|x - y|$$

pour tous $x, y \in [a\,, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat cherché se déduit maintenant du problème précédent.

III.1.29.

(a) Puisque $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, la suite est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. On a $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et, si $x \neq 0$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$ n'existe pas. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = l$, alors pour n suffisamment grand, $|\cos nx| < \frac{1}{2}$. Donc, $|\cos 2nx| = 1 - 2\cos^2 nx > \frac{1}{2}$, contradiction. On voit donc que $\{f_n'\}$ ne converge en aucun point.

(b) Puisque $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$, la suite converge uniformément sur $[-1\,, 1]$. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n^2x^2}{\left(1 + n^2x^2\right)^2} = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0, \\ 0 & \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

La limite simple de $\{f_n'\}$ est discontinue en 0 et la convergence ne peut donc pas être uniforme.

III.1.30. On suppose d'abord que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. La convergence uniforme de $\{f_n\}$ sur $\mathbf{A}$ implique

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0, x \in \mathbf{A}.$$

Donc,

$$|f_n(x) - l| < \varepsilon$$

dès que $0 < |x - x_0| < \delta$ et $n \geqslant n_0$. Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, ceci implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l$.

On suppose maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l$. On pose

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = g_n(x_0).$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x_0) = l$. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de $\{f_n\}$, il existe n_1 tel que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x \in \mathbf{A}) \tag{1}$$

si $n > n_1$. De ce qui précède, il existe n_2 tel que

$$|g_n(x_0) - l| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

si $n > n_2$. On fixe $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$. Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = g_{n_0}(x_0)$, on a

$$|f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

si $|x - x_0| < \delta_{n_0}$. Les relations (1), (2) et (3) donnent $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ peut s'établir de la même façon.

III.1.31. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit n_0 tel que

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

si $n, m \geqslant n_0$ et

$$\left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad t \in [a\,, b]. \tag{2}$$

Ceci, combiné au théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_n - f_m$, donne

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| < \frac{\varepsilon\,|x-t|}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

pour $m, n \geqslant n_0$ et $x, t \in [a\,,b]$. D'après (3) et (1), on a alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy pour la convergence uniforme est donc vérifié (voir **III.1.7**). Soit $x \in [a\,,b]$. On définit les fonctions h et h_n par

$$h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad t \in [a\,,b],\ t \neq x.$$

On a $\lim_{t \to x} h_n(t) = f_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (3),

$$|h_n(t) - h_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad m, n \geqslant n_0,$$

ce qui signifie que $\{h_n\}$ est uniformément convergente (évidemment vers h) sur $[a\,,b] \setminus \{x\}$. En appliquant le résultat du problème précédent à la suite $\{h_n\}$ et à l'ensemble $[a\,,b] \setminus \{x\}$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} f_n'(x) = \lim_{t \to x} h(t) = f'(x)$.

III.1.32. L'égalité

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Donc,

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, par continuité uniforme de f sur $[0\,,1]$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon$$

dès que $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [0\,,1]$. Clairement, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [0\,,1]$. On fixe x dans $[0\,,1]$. L'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ peut se décomposer en deux ensembles

$$\mathbf{A} = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \delta \right\}.$$

Si $k \in \mathbf{A}$, alors

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon$$

et

$$\sum_{k\in\mathbf{A}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\varepsilon\sum_{k\in\mathbf{A}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\varepsilon. \quad (2)$$

Si $k\in\mathbf{B}$, alors

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1$$

et, d'après l'inégalité donnée en **II.5.52**, on a

$$\sum_{k\in\mathbf{B}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\mathbf{B}}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{M}{2n\delta^2}.$$

Ceci, combiné à (1) et (2), donne

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{M}{2n\delta^2},\quad x\in[0\,,1].$$

III.1.33. Si $[a\,,b]=[0\,,1]$, on prend alors $P(x)=B_n(f,x)$. Si $[a\,,b]\neq[0\,,1]$, on peut alors appliquer le résultat du problème précédent à la fonction $g(y)=f(a+y(b-a))$, $y\in[0\,,1]$. Donc, étant donné $\varepsilon>0$, il existe un polynôme de Bernstein $B_n(g,y)$ tel que

$$|g(y)-B_n(g,y)|<\varepsilon,\quad y\in[0\,,1].$$

En posant $x=a+y(b-a)$, on obtient

$$\left|f(x)-B_n\left(g,\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon.$$

III.2. Séries de fonctions, convergence uniforme

III.2.1.

(a) Si $x\in\,]-1\,,1]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}\neq 0$. La condition nécessaire de convergence n'est donc pas vérifiée. Pour $|x|>1$, on a $|x|^n\geqslant 2^n$ pour n suffisamment grand. Donc,

$$\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\leqslant\frac{1}{|x|^n-1}\leqslant\frac{2}{|x|^n}$$

et la série converge d'après le test de comparaison.

(b) Clairement, la série converge si $x = 0$. Si $x \neq 0$, alors

$$\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}}.$$

Donc, d'après (a), la série converge pour $-1 < x < 1$.

(c) Si $x = 0$, la série diverge. Si $x \neq 0$,

$$\frac{2^n + x^n}{1+3^n x^n} = \frac{\left(\frac{2}{3x}\right)^n + \frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n x^n}}.$$

Le n-ième terme de la série converge donc vers 0 si et seulement si $\left|\frac{2}{3x}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{2}{3}$. Le test de comparaison montre que la série converge si $x \in]-\infty\,, -2/3[\cup]2/3\,, +\infty[$.

(d) On a

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)\,(1-x^{n+1})} = \frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)\,(1-x^{n+1})} \\ &= \frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}\right). \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{x(1-x)^2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

La série converge donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(e) On a

$$\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

La série converge donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(f) Si $x \leqslant 0$, la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée. Pour $x > 0$, d'après le test de condensation de Cauchy (voir, par exemple, **III.2.28 (vol. I)**), la série étudiée converge si et seulement si $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^x}{2^{n(x-1)}}$ converge. Le test de la racine montre que cette dernière série converge si $x > 1$ et diverge si $x < 1$. Si $x = 1$, la série est alors divergente. En résumé, on voit que le domaine de convergence est $]1\,,+\infty[$.

(g) Puisque $x^{\ln n} = n^{\ln x}$, la série converge si $\ln x < -1$ et diverge si $\ln x \geqslant -1$. Le domaine de convergence est donc $\left]0\,,\frac{1}{e}\right[$.

(h) On a

$$\sin^2\left(2\pi\sqrt{n^2+x^2}\right) = \sin^2\left(2n\pi\frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}+1}\right) \leqslant \frac{\pi^2 x^4}{n^2}\,.$$

Le test de comparaison montre que la série converge pour tout x.

III.2.2.

(a) Puisque $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$, on voit que

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(n^2\left(1+x^2\right)\right) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)} < \frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

La série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ d'après le *test de Weierstrass*[2].

(b) Pour $x \in [2\,,+\infty[$, on a

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

la convergence uniforme de la série se déduit donc du test de Weierstrass.

(c) Puisque $\sup\left\{n^2x^2e^{-n^2|x|} : x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{4}{n^2e^2}$, le test de Weierstrass montre que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

[2] Il s'agit du *test de convergence normale* suivant : si les fonctions f_n sont définies sur $\mathbf{A}$, s'il existe une suite $\{a_n\}$ de réels positifs telle que $|f_n(x)| \leqslant a_n$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $\mathbf{A}$. (N.d.T.)

(d) La série converge simplement vers

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1\,,1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La limite S n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

(e) On note que

$$\sup_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 2} \left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(x^n + x^{-n}\right) \right| \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(2^n + 2^n\right) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}}\, 2^{n+1}.$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}\, 2^{n+1}$ converge (par exemple, d'après le test de d'Alembert), le test de Weierstrass montre que la série converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

(f) La série ne converge pas uniformément sur $\mathbf{A}$ puisque le critère de convergence uniforme de Cauchy n'est pas vérifié. En effet, si $0 < \frac{1}{3^n x} \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| &= 2^{n+1} \sin \frac{1}{3^{n+1}x} + \cdots + 2^{n+m} \sin \frac{1}{3^{n+m}x} \\ &\geqslant 2^{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{3^{n+1}x} + \cdots + 2^{n+m} \frac{2}{\pi} \frac{1}{3^{n+m}x} \\ &\geqslant 2^{n+1} \frac{2}{\pi 3^{n+1} x}\,. \end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{1}{3^n}$, on obtient

$$\left| S_{n+m}\left(\frac{1}{3^n}\right) - S_n\left(\frac{1}{3^n}\right) \right| \geqslant \frac{2^{n+2}}{3\pi} \geqslant \frac{2^3}{3\pi}\,.$$

(g) La convergence uniforme de la série se déduit du test de Weierstrass. On a

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

et le test de condensation de Cauchy (voir, par exemple, **III.2.28 (vol. I)**) montre que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ converge.

III.2.3. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. On a

$$\sup\{S(x) - S_n(x) : x \in [0\,,1]\} = \frac{1}{n+1}\,,$$

ce qui montre que la série converge uniformément sur $[0\,,1]$, mais les hypothèses du test de Weierstrass ne sont pas vérifiées puisque $\sup\{f_n(x) : x \in [0\,,1]\} = \frac{1}{n}$.

III.2.4. On a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1}\,. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Clairement, f n'est pas continue en 0.

III.2.5.

(a) La série est absolument convergente sur $\mathbb{R}$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x^n \sin(nx)}{n!} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}.$$

Clairement, la convergence est uniforme sur chaque intervalle borné. La continuité de la somme se déduit donc du résultat de **I.2.34**.

(b) Puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^{n^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|}\,,$$

la série converge absolument sur $]-1\,,1[$. De plus, la convergence est uniforme sur chaque sous-ensemble compact de $]-1\,,1[$. La somme est donc continue sur $]-1\,,1[$.

(c) La série est absolument convergente pour $-1/2 < x < 1/2$ et, comme en (a), on peut montrer que sa somme est continue sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

(d) La série est absolument convergente pour $1/e - 1 < x < e - 1$ et sa somme est continue sur $\left]\frac{1}{e} - 1, e - 1\right[$.

III.2.6. Clairement la série converge pour $x = 0$. En utilisant, par exemple, le résultat de **III.2.16 (vol. I)**, on voit que la série converge si $0 < |x| < 1$. Si $|x| \geqslant 1$, la série diverge. Un raisonnement semblable à celui utilisé dans la solution du problème précédent montre que la somme est continue sur le domaine de convergence.

III.2.7. On note d'abord que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme $\widetilde{S}$ y est donc continue. De plus, si $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x \sin\left(k^2 x\right)}{k^2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = x\widetilde{S}(x)$. La somme de la série étudiée est donc aussi continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.8. On suppose que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ vers S. Ceci signifie que

$$d_n = \sup_{x\in\mathbf{A}} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

où $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. La fonction f étant bornée, on a aussi

$$d'_n = \sup_{x\in\mathbf{A}} |f(x)S_n(x) - f(x)S(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour voir que le fait que f soit bornée est essentiel, prenez $\mathbf{A} =]0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$, ce qui n'est pas le cas de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x} f_n(x)$ car

$$\sup_{x\in]0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x} f_k(x) \right| = \sup_{x\in]0,1]} \frac{2}{x2^n} = +\infty.$$

On voit facilement que si $\frac{1}{f}$ est bornée sur $\mathbf{A}$, la réciproque est alors vraie.

III.2.9. Pour $x \in \mathbf{A}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ converge d'après la règle de Leibniz. De plus, d'après le résultat donné en **III.4.14 (vol. I)**,

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} |r_n(x)| = \sup_{x\in\mathbf{A}} \left| \sum_{k=n+1}^{n} (-1)^{k+1} f_k(x) \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{A}} f_{n+1}(x).$$

Ceci, combiné à la condition (c), montre la convergence uniforme de la série sur $\mathbf{A}$.

III.2.10. Les trois séries (a), (b) et (c) vérifient les hypothèses de la proposition du problème précédent.

III.2.11. D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} c_k f_k(x) \right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \right)^{1/2} \sup_{x\in\mathbf{A}} \left(\sum_{k=n}^{n+m} f_k^2 \right)^{1/2}.$$

Il suffit donc d'appliquer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.

III.2.12.

(a) $\mathbf{A} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$, $\mathbf{B} = \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$. La série converge uniformément sur $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ car

$$\sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{k} (3x-1)^k \right| \leqslant \sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]} \frac{|6x-2|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) $\mathbf{A} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $\mathbf{B} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$. La série converge uniformément sur $[-2, -1]$ car

$$\sup_{x\in[-2,-1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x+1}{x} \right)^k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

III.2.13. Une sommation par parties donne

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_n(x) f_n(x).$$

Ceci, combiné à (3), implique

$$\begin{aligned}
&|S_{n+m}(x) - S_n(x)| \\
&\quad = \left| \sum_{k=n}^{n+m-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_{n+m}(x) f_{n+m}(x) - G_n(x) f_n(x) \right| \\
&\quad \leqslant M \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| + |f_{n+m}(x)| + |f_n(x)| \right).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Les conditions (1) et (2) impliquent

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbf{A}} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| \\
&\quad \leqslant M \sup_{x\in\mathbf{A}} \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| + |f_{n+m}(x)| + |f_n(x)| \right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

pour $m \in \mathbb{N}^*$ et pour n suffisamment grand. On peut donc appliquer le critère de convergence uniforme de Cauchy à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) g_n(x)$.

Pour prouver le test de convergence uniforme de Dirichlet, on note que la monotonie et la convergence uniforme de $\{f_n(x)\}$ impliquent (1) et (2). De plus, puisque la suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est uniformément bornée sur $\mathbf{A}$, on voit que la condition (3) est aussi vérifiée. En conséquence, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

III.2.14. On applique le test de convergence uniforme de Dirichlet.

(a) On prend

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad g_n(x) = (-1)^{n+1} x^n.$$

(b) On prend ici

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sin(nx)$$

et on note que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

(c) Le test de Dirichlet montre que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car

$$\begin{aligned}2\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k^2x\right)\sin(kx)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(\cos(k(k-1)x)-\cos(k(k+1)x))\right|\\ &= |1-\cos(n(n+1)x)| \leqslant 2\end{aligned}$$

et $\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\}$ est décroissante et uniformément convergente vers 0.

(d) On a

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)\,\mathrm{Arctan}(nx)}{n}\\ &\qquad=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(nx)\left(\mathrm{Arctan}(nx)-\frac{\pi}{2}\right)}{n}+\frac{\frac{\pi}{2}\sin(nx)}{n}\right).\end{aligned} \qquad (*)$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\delta\,,2\pi-\delta]$ (voir (b)), la suite des sommes partielles est uniformément bornée. De plus, la suite $\left\{\mathrm{Arctan}(nx)-\frac{\pi}{2}\right\}$ est croissante et vérifie le critère de convergence uniforme de Cauchy sur $[\delta\,,2\pi-\delta]$ car

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}((m+n)x)-\mathrm{Arctan}(nx) &= \mathrm{Arctan}\,\frac{mx}{1+(m+n)nx^2}\\ &\leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{mx}{(m+n)nx^2}\\ &\leqslant \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n\delta}\,.\end{aligned}$$

La suite $\left\{\mathrm{Arctan}(nx)-\frac{\pi}{2}\right\}$ converge donc uniformément vers 0. Il s'ensuit, d'après $(*)$, que la série étudiée converge uniformément sur $\mathbf{A}$.

(e) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{x-\frac{a}{2}}}\,\frac{1}{n^{\frac{a}{2}}}\,.$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{a}{2}}}$ converge, la suite de ses sommes partielles est bornée. De plus, la suite $\left\{\frac{1}{n^{x-\frac{a}{2}}}\right\}$ décroît et converge uniformément vers 0 sur $[a\,,+\infty[$.

(f) On note que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{e^{kx}}\right| = \left|\frac{1-\frac{(-1)^n}{e^{nx}}}{e^x+1}\right| \leqslant 1$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$. De plus, la suite $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\right\}$ décroît et converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

III.2.15. Une sommation par parties donne

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_n(x)f_n(x),$$

où $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$. Puisque f_1 est bornée sur $\mathbf{A}$, la condition (2) implique qu'il existe $M > 0$ tel que $|f_n(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\{G_n\}$ converge uniformément sur $\mathbf{A}$ vers une limite que l'on note G, on obtient

$$\begin{aligned} S_{n+m}(x) - S_n(x) & \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_{n+m}(x)f_{n+m}(x) - G_n(x)f_n(x) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} (f_k(x) - f_{k+1}(x))(G_k(x) - G(x)) \\ &\quad + (G_{n+m}(x) - G(x))f_{n+m}(x) - (G_n(x) - G(x))f_n(x) \end{aligned}$$

Ceci, combiné avec (2) et le fait que $\{f_n(x)\}$ soit uniformément bornée, montre que $\{S_n\}$ vérifie le critère de convergence uniforme de Cauchy.

Pour prouver le test de convergence uniforme d'Abel, il suffit de noter que la monotonie de $\{f_n(x)\}$ et le fait que $\{f_n(x)\}$ soit uniformément bornée impliquent la convergence simple vers une fonction bornée et les conditions (1) et (2) sont donc vérifiées.

III.2.16.

(a) La suite $\{\operatorname{Arctan}(nx)\}$ vérifie les conditions (1') et (2') du test de convergence uniforme d'Abel. De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (voir **III.2.10(a)**).

(b) Le test de convergence uniforme d'Abel s'applique car la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + \cos x}$$

est uniformément convergente sur $\mathbf{A}$ (voir **III.2.10(c)**) et la suite $\left\{\cos\frac{x}{n}\right\}$ est bornée et monotone pour $n > \frac{2R}{\pi}$.

(c) La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

converge (voir, par exemple, **III.4.8 (vol. I)**) et la suite $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+x}}\right\}$ est monotone et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Le test de convergence uniforme d'Abel s'applique donc.

III.2.17. Le résultat découle immédiatement de **III.1.30**.

III.2.18. Pour prouver (a) et (b), on peut utiliser les résultats de **III.2.14**, **III.2.17** et **III.1.32(a) (vol. I)**.

(c) Puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0\,,1[, \\ 0 & \text{pour } x = 1, \end{cases}$$

on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = 1.$$

(d) On note d'abord que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ d'après le test de Weierstrass. Donc, d'après le problème précédent, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

(e) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2}\,.$$

En utilisant maintenant le résultat de **III.1.30**, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

III.2.19. On observe d'abord que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,,1]$. Ceci se déduit du test de convergence uniforme d'Abel énoncé en **III.2.15** en prenant $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = a_n$. On voit alors, avec **III.2.17**, que la limite est égal à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

III.2.20. Les fonctions f_n étant continues sur $[0\,,1]$, on voit que

$$\sup_{x\in[0,1[} \sum_{k=n}^{n+m} f_k(x) = \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{n+m} f_k(x).$$

D'après le critère de Cauchy, la convergence uniforme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[0\,,1[$ implique donc la convergence uniforme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[0\,,1]$.

III.2.21. $\mathbf{A} = \mathbb{R}_+^*$. La convergence n'est pas uniforme. En effet, si elle l'était, d'après le résultat du problème précédent, la série convergerait en $x = 0$, contradiction.

III.2.22. On note que

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = f(x) - S_n(x),$$

où $S_n(x)$ représente la n-ième somme partielle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Par hypothèse, la suite $\{r_n(x)\}$ est monotone et convergente vers 0 en tout point de $[a\,,b]$. Le théorème de Dini (voir **III.1.16**) implique donc la convergence uniforme de $\{r_n(x)\}$, d'où celle de la série sur $[a\,,b]$.

III.2.23. Non. On considère

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,(1-x)x^n, \quad \mathbf{A} = [0\,,1].$$

D'après le résultat de **III.2.9**, la série converge uniformément sur $\mathbf{A}$. D'autre part, la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ est égale à

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0\,,1[, \\ 0 & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

La limite S n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

III.2.24. Les fonctions f_n étant monotones sur $[a\,,b]$, on a

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \max\{|f_k(a)|\,,|f_k(b)|\}\,.$$

Ceci montre que si la série converge absolument aux extrémités de l'intervalle $[a\,,b]$, elle converge alors normalement sur tout l'intervalle $[a\,,b]$.

III.2.25. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble borné ne contenant aucun élément de la suite $\{a_n\}$. Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|a_n|}$ converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$. On peut donc choisir un indice n_0 tel que $|x-a_n| \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ si $n \geqslant n_0$. D'où, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{|x-a_n|} = \frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|\frac{x}{a_n}-1\right|} \leqslant \frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{M}{|a_n|}}$$

où $M = \sup\limits_{x\in\mathbf{A}}|x|$. On remarque enfin que si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|a_n|}$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{M}{|a_n|}}\right)$ converge aussi.

III.2.26. On écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\times\frac{1}{n^{x-x_0}}$$

et on applique le test de convergence uniforme d'Abel (voir **III.2.15**).

III.2.27. On a prouvé dans la solution de **III.2.7** que la série étudiée converge vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On montre que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

On observe d'abord que la somme

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

est différente de 0 en chaque $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ si n_0 est impair. De plus,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x_k\right)}{n^2} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(n_0^2 \frac{\pi}{2}\right)}{\left(n_0 + 2l\right)^2}. \qquad (*)$$

Si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers une limite f, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 impair tel que

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{n_0 - 1} x \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2} \right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on a

$$\left| \frac{f(x_k)}{x_k} - \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{\sin\left(n^2 \frac{\pi}{2}\right)}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

et

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_k)}{x_k} = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{\sin\left(n^2 \frac{\pi}{2}\right)}{n^2}.$$

Par ailleurs, d'après $(*)$,

$$\frac{f(x_k)}{x_k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2 x_k\right)}{n^2} = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} \frac{\sin\left(n^2 \frac{\pi}{2}\right)}{n^2} + \sin\left(n_0^2 \frac{\pi}{2}\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(n_0 + 2l\right)^2},$$

contredisant le fait que

$$\sin\left(n_0^2 \frac{\pi}{2}\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(n_0 + 2l\right)^2} \neq 0.$$

III.2.28. Cette proposition se déduit immédiatement du résultat de **III.1.31**.

III.2.29. D'après le test de Weierstrass, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right| = \left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^3},$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le résultat du problème précédent, f est dérivable sur chaque intervalle compact et donc sur $\mathbb{R}$.

III.2.30. On note d'abord que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{1+n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n\sin(nx)}{1+n^2}$$

converge uniformément sur l'intervalle considéré d'après le test de convergence uniforme de Dirichlet énoncé en **III.2.13**. La dérivabilité de f se déduit donc de **III.2.28**.

III.2.31. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ converge, par exemple, pour $x=0$. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+x}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ d'après le résultat énoncé en **III.2.9**. Le résultat de **III.2.28** montre donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2, \quad f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} = 1 - \ln 2.$$

Enfin, on obtient, en appliquant **III.1.30**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

III.2.32. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après le test de convergence uniforme d'Abel (voir **III.2.15**). La série dérivée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ est aussi uniformément sur $\mathbb{R}$ (voir **III.2.10(a)**). On peut donc appliquer **III.2.28**.

III.2.33. Clairement, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx^2)}{1+n^3}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La série dérivée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2xn\cos(nx^2)}{1+n^3}$ converge uniformément sur tout intervalle borné. Donc, d'après **III.2.28**, f' est continue sur tout intervalle borné et donc continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.34. Le test de Weierstrass montre que la série et la série dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\sqrt{n}\,(\tan x)^{n-1}\,\frac{1}{\cos^2 x}$$

sont uniformément convergentes sur chaque sous-intervalle compact de $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[$. Donc, d'après **III.2.28**, f' est continue sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right[$.

III.2.35. Le test de Weierstrass montre que la série étudiée converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. On voit, de nouveau avec le test de Weierstrass, que la série dérivée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$$

est uniformément convergente sur chaque intervalle $[a\,,+\infty[$, $a>0$. La fonction f appartient donc à $\mathscr{C}^1_{]0,+\infty[}$. On conclut en répétant k fois le procédé précédent que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ converge uniformément sur chaque intervalle $[a\,,\infty[$, $a>0$. Ceci montre que $f \in \mathscr{C}^\infty_{]0,+\infty[}$.

Puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}-1}{x\,(1+n^2)} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-nx}-1}{x\,(1+n^2)}$$

pour $x>0$ et $N>1$, si $f'(0)$ existe, on a alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{1+n^2}\,.$$

Par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient $f'(0) \leqslant -\infty$, contradiction.

III.2.36. Clairement, la série converge uniformément sur chaque intervalle borné et f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{x^2+n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \operatorname{sgn}(x) - x\,|x|}{(x^2+n^2)^2} .$$

La série dérivée est donc uniformément convergente sur chaque intervalle borné ne contenant pas 0 et f' est continue en tout $x \neq 0$. On montre maintenant que $f'(0)$ n'existe pas. Puisque

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \left(\frac{|h|}{h}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2+n^2}$$

et (voir **III.2.17**)

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} ,$$

la limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas.

III.2.37. On remarque d'abord que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur tout intervalle $[x_0\,, +\infty[$, $x_0 > 1$ (voir **III.2.26**). La fonction ζ de Riemann est donc continue sur $]1, +\infty[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}$$

est aussi uniformément convergente sur tout intervalle $[x_0\,, +\infty[$, $x_0 > 1$, car

$$\frac{\ln^k n}{n^x} \leqslant \frac{x^{\frac{x_0-1}{2}}}{n^{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$$

pour n suffisamment grand. Toutes les dérivées de la fonction ζ de Riemann sont donc continues sur $]1, +\infty[$.

III.2.38. D'après (a), il existe $x_0 \in \,]0\,,1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. D'après (b) et la formule de Taylor avec reste Lagrange, on a

$$f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\theta_n) x_0^n}{n!}$$

où $\theta_n \in \,]0\,,1[$. Donc,

$$f^{(n)}(\theta_n) = \frac{n!\, f(x_0)}{x_0^n} . \qquad (*)$$

La condition (c) implique alors $\sup_{x\in[0,1]} \left|a_n f^{(n)}(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui signifie que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\left|a_n f^{(n)}(\theta_n)\right| < \varepsilon$ si $n > n_0$. L'égalité $(*)$ donne maintenant

$$|n!a_n| < \frac{\varepsilon x_0^n}{|f(x_0)|}\,.$$

III.2.39. Clairement, pour $x \in \mathbb{Z}$, on a $f_n(x) = 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 0$. On pose maintenant $x = \frac{r}{s}$, où r et s sont des entiers premiers entre eux et $s > 1$. Si p est un nombre premier différent de s, alors $f_p(x) \geqslant \frac{1}{ps}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\frac{r}{s} - \frac{a}{p}\right| = \frac{|rp - as|}{sp} \geqslant \frac{1}{sp}\,.$$

En conséquence,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant \sum_{p\in\mathbf{P}} \frac{1}{sp}\,,$$

où $\mathbf{P}$ représente l'ensemble des nombres premiers différents de s. Donc (voir, par exemple, **III.2.72 (vol. I)**), la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ diverge pour tout $x \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Pour x irrationnel, on pose

$$\mathbf{A} = \left\{n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{4} < nx - [nx] < \frac{1}{2}\right\},$$
$$A(m) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{A} : n < m\}\,,$$

où $\operatorname{card}\mathbf{B}$ représente le cardinal de l'ensemble $\mathbf{B}$. Le fait que les nombres $nx - [nx]$ sont uniformément distribués modulo 1 pour x irrationnel (voir, par exemple, théorème 25.1 dans P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, New York, 1979, pp. 282-283), implique $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{A(m)}{m} = \frac{1}{4}$. En conséquence, $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{4n} = +\infty$. On note que

$$f_n(x) = x - \frac{[nx]}{n} \geqslant \frac{1}{4n}$$

pour $n \in \mathbf{A}$. Il s'ensuit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ diverge pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

III.2.40. La fonction g étant bornée, la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f et f est donc continue sur $\mathbb{R}$. Notre but est maintenant de prouver que f n'est nulle part dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. S'il y a un entier dans $\left]4^m x\,, 4^m x + \frac{1}{2}\right[$, il n'y en a alors pas dans $\left]4^m x - \frac{1}{2}\,, 4^m x\right[$. On peut donc toujours trouver $\delta_m = \pm\frac{1}{2}\,4^{-m}$ tel qu'il n'y ait aucun entier dans l'intervalle ouvert d'extrémités $4^m x$ et $4^m(x+\delta_m)$. Par définition de g,

$$\left|\frac{g\left(4^n(x+\delta_m)\right) - g\left(4^n x\right)}{\delta_m}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m, \\ 4^n & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant m. \end{cases}$$

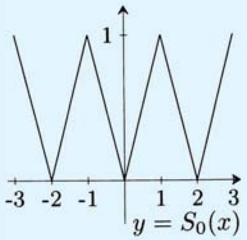
On note ici que, pour m fixé,

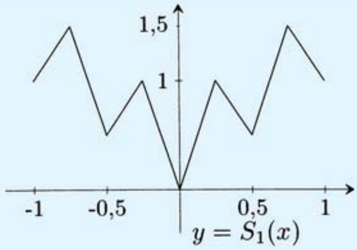
$$\frac{g\left(4^n(x+\delta_m)\right) - g\left(4^n x\right)}{\delta_m}$$

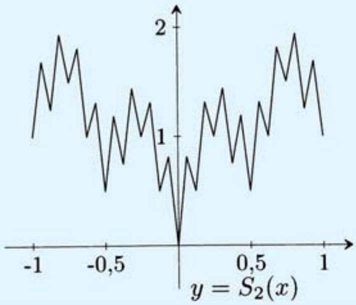
a le même signe pour $n = 0, 1, \ldots, m$. Donc,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g\left(4^n(x+\delta_m)\right) - g\left(4^n x\right)}{\delta_m}\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g\left(4^n(x+\delta_m)\right) - g\left(4^n x\right)}{\delta_m}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n \\
&= \frac{3^{m+1}-1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} \delta_m = 0$, ce qui précède implique que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'existe pas et f est donc nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$. Les graphes des trois premières sommes partielles $S_0(x)$, $S_1(x)$ et $S_2(x)$ de la série définissant f sont tracés ci-dessous.







III.3. Séries entières

III.3.1. Soit R la borne supérieure de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\{|a_n|\, r^n\}$ soit une suite bornée. Si $R > 0$, il existe alors une constante strictement positive C_ρ telle que $|a_n| \leqslant C_\rho$ pour $0 \leqslant \rho < R$. Donc, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{\rho}$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\rho \in [0\,, R[$, on obtient

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{1}$$

On note que l'inégalité (1) est aussi vérifiée pour $R = 0$. Pour prouver que l'inégalité opposée est aussi vérifiée, on suppose que $R < +\infty$. Pour $\rho > R$, la suite $\{|a_n|\, \rho^n\}$ n'est pas bornée et elle contient donc une sous-suite telle que $|a_{n_k}|\, \rho^{n_k} \geqslant 1$. D'où,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{\rho}.$$

Puisque l'on peut choisir $\rho > R$ arbitrairement, on obtient

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{R}. \tag{2}$$

On note que (2) est évidemment vérifiée pour $R = +\infty$. En combinant (1) et (2), on voit que $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Le test de la racine montre alors que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ est absolument convergente pour $|x - x_0| < R$ et divergente pour $|x - x_0| > R$.

III.3.2.

(a) Le rayon de convergence de la série est égal à 1. Elle converge donc pour $|x| < 1$ et elle diverge pour $|x| > 1$. Pour $x = 1, -1$, la série diverge. L'intervalle de convergence est donc l'intervalle ouvert $]-1\,,1[$.

(b) Le rayon de convergence de la série est égal à $+\infty$ et la série converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Le domaine de convergence est l'intervalle fermé $\left[-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right]$.

(d) On a

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{(2 + (-1)^n)^n} = 3.$$

La série converge donc sur $\left]-\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\right[$. Clairement la série diverge aux extrémités de l'intervalle de convergence.

(e) Puisque

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

la série converge sur $\left]-\frac{4}{3}\,,\frac{4}{3}\right[$. La série diverge aux extrémités.

(f) Puisque

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{2^n} = 1,$$

on voit facilement que l'intervalle de convergence est $]-1\,,1[$.

(g) Puisque

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n!]{2^{n^2}} = 1,$$

on voit facilement que l'intervalle de convergence est $]-1\,,1[$.

(h) On a

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} = e.$$

La série converge donc sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. La série diverge grossièrement aux extrémités. En effet, si $x = 1/e$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n}x^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n^2}}{e^{2n}} = e^{-1/2}$$

et si $x = -1/e$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|a_{2n}x^{2n}\right| = e^{-1/2}$.

III.3.3.

(a) Le rayon de convergence est égal à $\sqrt{2}$ et l'intervalle de convergence est $\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$.

(b) Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\, y^n$ est égal à 1. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$ converge donc sur $\left]-1, -\frac{1}{3}\right[$. Clairement, elle diverge en $x = -1$ et en $x = -1/3$.

(c) Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n4^n}{3^n}\, y^n$ est égal à $3/4$. En conséquence, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n4^n}{3^n}\, x^n\,(1-x)^n$ converge sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$. On voit facilement qu'elle diverge aux extrémités.

(d) Puisque que le rayon de convergence est égal à 4, la série converge sur $]-3, 5[$. La série diverge pour $x = 5$ car la suite de ses termes $\left\{\frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n\right\}$ est croissante. Pour $x = -3$, on obtient la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n$ qui est grossièrement divergente.

(e) Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} y^n$ est égal à 1. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,(\tan x)^n$ converge donc sur l'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi\right[.$$

Si $x = -\frac{\pi}{4}+n\pi$ ou si $x = \frac{\pi}{4}+n\pi$, la série diverge.

(f) Le domaine de convergence est

$$]-\infty, -\tan 1[\,\cup\,]\tan 1, +\infty[.$$

III.3.4.

(a) On suppose, par exemple, que $R_1 < R_2$. Pour $|x| < R_1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)\, x^n$ converge alors comme somme de deux séries convergentes. Pour $R_1 < |x| < R_2$, la série diverge comme somme d'une série divergente et d'une série convergente. Donc $R = R_1 = \min\{R_1, R_2\}$. Si $R_1 = R_2$, clairement, $R \geqslant R_1$. Pour montrer que l'inégalité peut être stricte, on considère $a_n = -1$ et $b_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $R_1 = R_2 = 1$ et $R = +\infty$.

(b) Puisque (voir, par exemple, **II.4.17 (vol. I)**)

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leqslant \varlimsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \varlimsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_1} \times \frac{1}{R_2},$$

on a $R \geqslant R_1 R_2$. L'exemple suivant montre que l'inégalité peut être stricte. On pose

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = 1, b_{2n} = 1, b_{2n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a alors $R_1 = R_2 = 1$ et $R = +\infty$.

III.3.5.

(a) Il découle de

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n$$

et de la question (b) du problème précédent que $R_1 \geqslant R R_2$. Pour voir que l'inégalité peut être stricte, on considère, par exemple, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ définies par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 2^n & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$b_n = \begin{cases} 2^n & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 1 & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

On a alors $R_1 = R_2 = R = 1/2$.

(b) Il suffit d'observer que si $|x| < \min\{R_1, R_2\}$, alors le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ converge d'après le théorème de Mertens (voir, par exemple, **III.6.1 (vol. I)**). L'exemple suivant montre que l'inégalité $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ peut être stricte. Le produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, où

$$a_0 = 1,\ a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ b_0 = 1,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

est $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n x^n$ (voir, par exemple, **III.6.11 (vol. I)**). Ici, $R_1 = 2/3$, $R_2 = 1/3$ et $R = 4/3$. L'exemple suivant montre que R peut être infini même si R_1 et R_2 sont finis. Si

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{pour } n = 0, \\ 2^n & \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{pour } n = 0, \\ 1 & \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

alors $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$ et $R = +\infty$.

III.3.6. On va utiliser **III.3.1**(b).

(a) Pour $0 < \varepsilon < L$, il existe n_0 tel que

$$\sqrt[n]{\frac{L-\varepsilon}{n^\alpha}} \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{\frac{L+\varepsilon}{n^\alpha}}$$

si $n \geqslant n_0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ et $R = 1$.

(b) On montre comme en (a) que $R = \alpha$.

(c) $R = +\infty$.

III.3.7.

(a) Puisque $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|2^n a_n|} = \frac{2}{R}$, le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{2}R$.

(b) Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit pour que $\frac{1}{R} - \varepsilon > 0$, on a alors

$$n\sqrt[n]{|a_n|} > n\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)$$

pour une infinité de valeurs de n. Donc, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ et $R = 0$.

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, on voit que le rayon de convergence est égal à R/e (voir, par exemple, **II.4.20 (vol. I)**).

(d) Puisqu'il existe une suite d'entiers strictement positifs $\{n_k\}$ telle que

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|},$$

on conclut que le rayon de convergence est égal à R^2.

III.3.8. Le résultat de **III.1.25** implique immédiatement que les seules séries entières répondant au problème sont les polynômes.

III.3.9. Le rayon de convergence de la série est égal à $+\infty$. Une dérivation terme à terme donne

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)' = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!} = 1 + xf(x).$$

III.3.10. Comme dans la solution du problème précédent, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

III.3.11. Pour $x \in \left]-1\,,1\right[$, on pose

$$g(x) = \frac{f(xx_0) - f(x_0)}{x-1}.$$

On a alors $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = x_0 f'(x_0)$. De plus (voir, par exemple, **III.6.4 (vol. I)**),

$$g(x) = \frac{1}{1-x} f(x_0) - \frac{1}{1-x} f(x_0 x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f(x_0) - S_n(x_0))x^n.$$

Donc, si $0 < x < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f(x_0) - S_n(x_0))x^n > (f(x_0) - S_m(x_0))x^m.$$

En conséquence, $x_0 f'(x_0) = \lim\limits_{x\to1^-} g(x) \geqslant f(x_0) - S_m(x_0) > 0$.

III.3.12. On montre d'abord que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) T_n x^n$ convergent pour $|x| < 1$. Puisque $\{T_n\}$ est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|T_n| \leqslant C$ pour tout n. On a alors, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left|T_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) C \left|x^n\right| = \frac{C}{(1-|x|)^2}\,.$$

La convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ pour $|x| < 1$ se déduit de l'égalité

$$\sum_{n=0}^{N} S_n x^n = S_0 + \sum_{n=1}^{N} ((n+1)T_n - nT_{n-1}) x^n.$$

De même, puisque $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n$, la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ implique celle de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < 1$.

L'égalité énoncée dans l'énoncé se déduit du théorème de Mertens (voir, par exemple, **III.6.1 (vol. I)**).

III.3.13. On a

$$\begin{aligned}
\frac{|x|}{1-|x|} \left|f'(x)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^{2^k} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{2^k \leqslant n} 2^k \right) |x|^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]} 2^k \right) |x|^n \\
&\leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|x|^n = 2 \frac{|x|}{(1-|x|)^2}\,.
\end{aligned}$$

L'inégalité cherchée est donc vérifiée pour $M = 2$.

III.3.14. La convergence uniforme de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $[0\,,1]$ se déduit du test de convergence uniforme d'Abel (voir la solution de **III.2.19**). Pour prouver (b), il suffit d'appliquer **III.1.30** (voir aussi la solution de **III.2.19**).

III.3.15. On montre d'abord que

$$\varlimsup_{x\to 1^-} f(x) \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} S_n. \tag{1}$$

On a (voir **III.3.12**)

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)x^n \quad \text{pour} \quad |x| < 1. \tag{2}$$

Si $\varlimsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, (1) est alors évidente. Si $\varlimsup_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, (2) donne alors

$$S - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S - S_n)x^n. \tag{3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $S_n < S + \varepsilon$ pour $n > n_0$. Donc, d'après (3), pour $x \in \left]0\,,1\right[$,

$$\begin{aligned} S - f(x) &\geqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon(1-x)\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon x^{n_0+1} \\ &\geqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$f(x) \leqslant S + \varepsilon - (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n.$$

Puisqu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n\right| < \varepsilon$$

si $x \in \,]1-\delta\,,1[$, on voit que $f(x) \leqslant S + 2\varepsilon$ et (1) est prouvée dans le cas où $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} S_n$ est finie. Si maintenant $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} S_n = -\infty$, alors clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$. Pour $M \in \mathbb{R}$, on peut choisir n_1 tel que $S_n < M$ si $n > n_1$. On a donc, pour $x \in \,]0\,,1[$,

$$M - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n + (1-x)\sum_{n=n_1+1}^{+\infty}(M-S_n)x^n$$

$$\geqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n$$

et $f(x) \leqslant M - (1-x)\sum\limits_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n$. Puisqu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n\right| < \varepsilon$$

si $x \in \,]1-\delta\,,1[$, on voit que $f(x) \leqslant M + \varepsilon$ et

$$\underline{\lim_{x\to1^-}} f(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to1^-}} f(x) \leqslant M.$$

M pouvant être choisi arbitrairement, ceci montre que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et prouve donc (1) dans ce cas. L'inégalité

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} S_n \leqslant \underline{\lim_{x\to1^-}} f(x)$$

se prouve de la même façon.

III.3.16. On pose

$$A_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k\,|a_k|}{n}\,.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$ (voir, par exemple, **II.3.2 (vol. I)**). Par hypothèse, si $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$|f(x_n) - L| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad A_n < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad n\,|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $n \geqslant n_0$. En posant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on obtient

$$S_n - L = f(x) - L + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 - x^k\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k, \quad |x| < 1.$$

On remarque alors que

$$1 - x^k = (1 - x)\left(1 + 1 + \cdots + x^{k-1}\right) \leqslant k(1 - x)$$

si $x \in]0\,,1[$. Donc,

$$|S_n - L| \leqslant |f(x) - L| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}\,.$$

Finalement, en prenant $x = x_n$, on a

$$|S_n - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

III.3.17. Considérez, par exemple, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

III.3.18. Le théorème d'Abel (voir **III.3.14**) implique que si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, alors la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ existe. Pour montrer que l'implication réciproque est correcte, on suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, pour $0 < x < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x^n \leqslant f(x) \leqslant g, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n x^n \leqslant g$, ce qui implique la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

III.3.19. On définit

$$b_0 = 0, \quad b_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{n} x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)} \right) \\
&= a_0 + (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} x^n.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n+1} = 0$, on peut montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} x^n = 0.$$

En appliquant alors le théorème de Tauber, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} = L - a_0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n(n+1)} &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n - b_{n-1}}{n} - \frac{b_N}{N+1} \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n,
\end{aligned}$$

d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

III.3.20. La convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n^2$ et le résultat de **III.5.9(b) (vol. I)** impliquent

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \cdots + n^2 a_n^2}{n} = 0.$$

D'après l'inégalité de Cauchy (voir, par exemple, I.2.12 (vol. I)), on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2\right).$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k}{n}\right)^2 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k^2}{n} = 0.$$

Le résultat cherché se déduit alors du problème précédent.

III.3.21. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|a_n - Ab_n| < \varepsilon b_n \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

On a donc, pour $x \in]0\,,1[$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - Ag(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - Ab_n)x^n\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=0}^{n_0}(a_n - Ab_n)x^n\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(a_n - Ab_n)x^n\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| + \varepsilon\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} b_n x^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| + \varepsilon g(x).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| < \varepsilon g(x)$$

pour x suffisamment proche de 1 et $|f(x) - Ag(x)| < 2\varepsilon g(x)$ pour x suffisamment proche de 1.

III.3.22. On note que, d'après le théorème de Mertens (voir, par exemple, III.6.1 (vol. I)), on a

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} T_n x^n$$

pour $|x| < 1$. Le résultat énoncé au problème précédent donne donc

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{f(x)}{1-x}}{\frac{g(x)}{1-x}} = A.$$

III.3.23. On considère

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

et

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$. D'autre part, puisque $S_{2n+1} = 0$, $S_{2n} = n+1$ et $T_n = n$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{T_n}$ n'existe pas.

III.3.24. Pour $x \in \,]0\,,1[$, on a

$$f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geqslant x^n S_n \tag{1}$$

car tous les coefficients a_n sont positifs. En prenant $x = e^{-\frac{1}{n}}$, on obtient

$$e^{-1} S_n \leqslant f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc n_0 tel que

$$e^{-1} S_n \leqslant \frac{A+\varepsilon}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} < 2(A+\varepsilon)n$$

si $n \geqslant n_0$. La dernière inégalité se déduit du fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = -\frac{1}{2} > -1.$$

On a donc

$$S_n \leqslant A_2 n \quad \text{pour un certain} \quad A_2 \geqslant 2(A+\varepsilon)e. \tag{2}$$

On obtient alors avec (2)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \\ &< (1-x)S_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k + A_2(1-x)\sum_{k=n}^{+\infty} kx^k \\ &< S_n + A_2 n x^n + \frac{A_2 x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

En prenant $x = e^{-\alpha/n}$ dans (2), $\alpha > 0$, on obtient comme précédemment

$$f\left(e^{-\frac{\alpha}{n}}\right) > \frac{A-\varepsilon}{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}} > (A-\varepsilon)\frac{n}{\alpha}.$$

Cette dernière inégalité se déduit de $e^{-\frac{\alpha}{n}} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Donc,

$$(A-\varepsilon)\frac{n}{\alpha} < S_n + A_2 n e^{-\alpha} + \frac{2A_2 n e^{-\alpha}}{\alpha}$$

ou, dit autrement,

$$S_n > n\frac{A-\varepsilon-2A_2e^{-\alpha}-A_2\alpha e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

En prenant α suffisamment grand, on obtient $S_n > A_1 n$ pour un certain A_1 strictement positif.

III.3.25. On commence par quelques considérations dont on aura besoin pour la démonstration du théorème. Soit φ une fonction continue sur $[0\,,1]$ excepté en un point $c \in \,]0\,,1[$ où les limites à gauche et à droite $\varphi(c^-)$ et $\varphi(c^+)$ existent et $\varphi(c^-) = \varphi(c)$ ou $\varphi(c^+) = \varphi(c)$. Notre but est de montrer que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe des polynômes P_1 et P_2 tels que

$$\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\,dx < \varepsilon.$$

On suppose pour cela, par exemple, que $\varphi(c^-) < \varphi(c^+)$ et $\varphi(c) = \varphi(c^+)$. Clairement, on peut choisir $\delta_1 > 0$ suffisamment petit pour que l'inégalité $|\varphi(c-\delta_1) - \varphi(x)| < \varepsilon/4$ soit vérifiée pour $x \in \,]c-\delta_1\,, c[$. On pose

$$M = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(c)| : x \in \,]c-\delta_1\,, c[\}$$

et on prend $\delta < \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{4M}, c, 1-c\right\}$. On définit

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [0\,, c-\delta] \cup [c\,,1], \\ \max\{l(x), \varphi(x)\} & \text{si } x \in \,]c-\delta\,, c[, \end{cases}$$

où $l(x)$ est la fonction affine telle que $l(c-\delta) = \varphi(c-\delta)$ et $l(c) = \varphi(c)$. La fonction g est continue et $\varphi \leqslant g$ sur $[0\,,1]$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (voir **III.1.33**), il existe un polynôme P_2 tel que

$$|g(x) - P_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad x \in [0\,,1].$$

On définit de même

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [0\,,c[\, \cup [c+\delta\,,1], \\ \min\{l_1(x), \varphi(x)\} & \text{si } x \in [c\,,c+\delta[, \end{cases}$$

où $l_1(x)$ est la fonction affine telle que $l_1(c) = \varphi(c^-)$ et $l_1(c+\delta) = \varphi(c+\delta)$. Clairement, h est continue et $h \leqslant \varphi$ sur $[0\,,1]$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe un polynôme P_1 tel que

$$|h(x) - P_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad x \in [0\,,1].$$

De plus, on a

$$\int_0^1 (g(x) - \varphi(x))\,dx = \int_{]c-\delta,c[} (g(x) - \varphi(x))\,dx.$$

Si on pose

$$\mathbf{A} = \{x \in\,]c-\delta, c[\, : g(x) = l(x)\} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \,]c-\delta, c[\, \setminus \mathbf{A},$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{]c-\delta,c[} (g(x) - \varphi(x))\,dx &= \int_{\mathbf{A}} (g(x) - \varphi(x))\,dx \\ &\leqslant \int_{]c-\delta,c[} |l(x) - \varphi(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_{]c-\delta,c[} (|\varphi(x) - \varphi(c-\delta)| + |\varphi(c-\delta) - l(x)|)\,dx \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\,dx = \int_0^1 (P_2(x) - g(x))\,dx + \int_0^1 (g(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon.$$

On montre de la même manière que

$$\int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\,dx < \varepsilon.$$

On se tourne maintenant vers la démonstration du théorème de Hardy et Littlewood. On peut supposer, sans perte de généralité, que $A = 1$. On prouve d'abord que

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\, dt$$

pour tout polynôme P. Il suffit de prouver l'égalité pour $P(x) = x^k$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+kn} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \left(1 - x^{k+1}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{(k+1)n} \\ &= \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k\, dt. \end{aligned}$$

On définit maintenant φ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < e^{-1}, \\ \frac{1}{x} & \text{si } e^{-1} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Notre but est de prouver que

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(x^n) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1. \tag{1}$$

Les considérations présentées au début de la solution impliquent que, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes P_1 et P_2 tels que

$$P_1(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant h(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x) \leqslant P_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\, dx < \varepsilon, \qquad \int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\, dx < \varepsilon.$$

Puisque $a_n \geqslant 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x \to 1^-}} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(x^n) &\leqslant \overline{\lim_{x \to 1^-}} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P_2(x^n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_0^1 P_2(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 \varphi(t)\, dt + \frac{3\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\overline{\lim_{x \to 1^-}} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \varphi(x^n) \leqslant \int_0^1 \varphi(t)\, dt.$$

On peut montrer de la même façon que

$$\varliminf_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\varphi\left(x^n\right)\geqslant\int_0^1\varphi(t)\,dt$$

et (1) est donc prouvée. D'où,

$$1=\lim_{N\to+\infty}\left(1-e^{-1/N}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{-n/N}\varphi\left(e^{-n/N}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(1-e^{-1/N}\right)\sum_{n=0}^{N}a_n.$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(1-e^{-1/N}\right)N=1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}a_n}{N}=1.$$

III.3.26. Si $|na_n|\leqslant C$, on a alors, pour $x\in\,]0\,,1[$,

$$\left|f''(x)\right|\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left|a_n\right|x^{n-2}\leqslant C\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)x^{n-2}=C\frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

D'après **II.3.33**, on a

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)f'(x)=0=\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}.$$

Maintenant, puisque

$$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{na_n}{C}\right)x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{f'(x)}{C}\,,$$

on obtient $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)F(x)=1$, ce qui, combiné au théorème de Hardy et Littlewood énoncé au problème précédent, donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{ka_k}{C}\right)}{n}=1.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k}{n}=0.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le résultat donné en **III.3.19**.

III.3.27. On suppose, contrairement à l'énoncé, que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 tel que $|a_n| < \varepsilon/2$ si $n > n_0$. Donc,

$$|(1-x)f(x)| \leqslant \left|(1-x)\sum_{k=0}^{n_0} a_k x^k\right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui implique

$$\lim_{x\to 1^-} |(1-x)f(x)| = 0$$

contrairement aux hypothèses.

III.4. Séries de Taylor

III.4.1. On suppose que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a\,,b]$. D'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange (voir **II.3.3(a)**), on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

où

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$ et

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

III.4.2. Non, car $f^{(n)}(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

III.4.3. D'après le test de Weierstrass, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2x)}{e^n}$ et la série dérivée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{-n^2\sin(n^2x)}{e^n}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est donc continue sur $\mathbb{R}$. En répétant ce raisonnement, on voit que f appartient à $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}}$. On peut de plus montrer que $f^{(2k-1)}(0) = 0$ et $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4k}}{e^n}$. Donc,

$$\frac{\left|f^{(2k)}(0)\right| x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2x}{2k}\right)^{2k} e^{-n}, \quad x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

En prenant $n = 2k$, on obtient

$$\frac{\left|f^{(2k)}(0)\right| x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1 \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad k > \left|\frac{e}{2x}\right|.$$

La série de Taylor de f en 0 est divergente pour $x \neq 0$ et l'égalité n'est pas vérifiée pour $x \neq 0$.

III.4.4. On suppose d'abord que $x > 0$. Le reste de Lagrange dans la formule de Taylor appliquée à $f(x) = (1+x)^\alpha$ (voir **II.3.3(a)**) est

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\, x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Pour $|x| < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = 0.$$

Pour voir ceci, on applique, par exemple, **II.2.31 (vol. I)**. En conséquence, pour prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, il suffit de montrer que $\left\{(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\right\}$ est une suite bornée. Ceci se déduit des inégalités évidentes suivantes :

$$1 \leqslant (1+\theta x)^\alpha \leqslant (1+x)^\alpha \leqslant 2^\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 0$$

et

$$2^\alpha \leqslant (1+x)^\alpha \leqslant (1+\theta x)^\alpha \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \alpha < 0,$$

et $(1+\theta x)^{-n} \leqslant 1$. On a donc prouvé l'inégalité demandée pour $0 < x < 1$. On passe maintenant au cas où $x < 0$. Le reste de Cauchy dans la formule de Taylor appliquée à $f(x) = (1+x)^\alpha$ (voir **II.3.3(b)**) est

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\, x^{n+1} (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Comme précédemment, il suffit de montrer que $\left\{(1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1}\right\}$ est une suite bornée. Puisque $x \in \left]-1\,,0\right[$, on voit que

$$(1-\theta)^n \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

De plus,

$$1 \leqslant (1+\theta x)^{\alpha-1} \leqslant (1+x)^{\alpha-1} \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant 1$$

et

$$(1+x)^{\alpha-1} \leqslant (1+\theta x)^{\alpha-1} \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 1.$$

Ceci conclut la démonstration dans le cas où $x \in \left]-1\,,0\right[$.

III.4.5. On suppose d'abord que $x \neq 0$. L'égalité

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$$

et la formule du binôme de Newton avec $\alpha = 1/2$ (voir le problème précédent) donnent alors

$$\begin{aligned} |x| &= 1 - \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!}\left(1-x^2\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(1-x^2\right)^n . \end{aligned}$$

De plus, on note que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ converge car, d'après la formule de Wallis (voir, par exemple, **III.8.38 (vol. I)**),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}}{\frac{1}{(2n-1)\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} .$$

Le théorème d'Abel (voir **III.3.14**) montre donc que l'égalité est aussi vérifiée pour $x = 0$.

III.4.6. La dérivation terme à terme montre que $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{]-R,R[}$. De plus,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Donc, $f^{(k)}(0) = k!a_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

III.4.7. On observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left((x-x_0)+x_0\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-x_0)^k x_0^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x_0^{n-k}\right) (x-x_0)^k . \end{aligned}$$

Pour voir que la dernière égalité est bien vérifiée, on note que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{k} (x-x_0)^k x_0^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(|x-x_0| + |x_0|\right)^n .$$

La série double dans le premier membre de cette égalité converge donc absolument pour $|x-x_0|+|x_0|<R$ et on peut ainsi appliquer le résultat de **III.7.23 (vol. I)**. En dérivant alors terme à terme, on obtient

$$f^{(k)}(x_0)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k}k! \quad \text{pour} \quad k\in\mathbb{N}$$

et

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_nx_0^{n-k} \quad \text{pour} \quad k\in\mathbb{N}.$$

III.4.8. On pose $c_n=a_n-b_n$ et

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n, \quad x\in\left]-R\,,R\right[. \tag{1}$$

On a $f(x)=0$ pour $x\in\mathbf{A}$. On appelle $\mathbf{B}$ l'ensemble des points d'accumulation de $\mathbf{A}$ se trouvant dans $]-R\,,R[$ et on pose $\mathbf{C}=\left]-R\,,R\right[\setminus\mathbf{B}$. L'ensemble $\mathbf{C}$ est ouvert et, par hypothèse, $\mathbf{B}$ n'est pas vide. Clairement, $\left]-R\,,R\right[=\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$. Notre but est de prouver que $\mathbf{B}$ est aussi ouvert. Pour cela, on prend $x_0\in\mathbf{B}$. D'après (1) et le résultat du problème précédent,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}d_n\left(x-x_0\right)^n, \quad |x-x_0|<R-|x_0|. \tag{2}$$

On montre alors que $d_n=0$ pour $n\in\mathbb{N}$. Si ce n'est pas le cas, on trouve le plus petit entier naturel k pour lequel $d_k\neq 0$ et on obtient

$$f(x)=\left(x-x_0\right)^k g(x),$$

où

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}d_{k+n}\left(x-x_0\right)^{n-k}, \quad |x-x_0|<R-|x_0|.$$

Puisque g est continue en x_0 et $g(x_0)=d_k\neq 0$, il existe $\delta>0$ tel que $g(x)\neq 0$ pour $|x-x_0|<\delta$, ce qui est contradictoire avec le fait que $x_0\in\mathbf{B}$. Donc, $d_n=0$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $f(x)=0$ pour $|x-x_0|<R-|x_0|$. On a donc prouvé que $\mathbf{B}$ est ouvert. Puisque $]-R\,,R[$ est connexe, on voit que $\mathbf{C}=\varnothing$ et $\mathbf{B}=\left]-R\,,R\right[$.

III.4.9. On va appliquer le résultat énoncé en **III.4.6**.

(a) Puisque

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x\in\mathbb{R},$$

on obtient

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) En utilisant l'identité $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(3^{2n} - 1\right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) On a $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(4^{2n+1} - 2^{2n+1}\right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) On a $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ $(x \in \mathbb{R})$ et

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Donc,

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 4^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(e) Puisque

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \left]-1\,,1\right[,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \left]-1\,,1\right[.$$

(f) Clairement, $\ln\left(1+x+x^2\right) = \ln\frac{1-x^3}{1-x}$ pour $x \in \left]-1\,,1\right[$. Donc, comme en (e), on a

$$\ln\left(1+x+x^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in \left]-1\,,1\right[,$$

où

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{pour } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{1}{n} & \text{pour } n \neq 3k,\ k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

(g) Puisque $\frac{1}{1-5x+6x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$, on obtient

$$\frac{1}{1-5x+6x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) x^n$$

pour $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

(h) On sait que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{pour} \quad x \in \left]-1, 1\right[.$$

D'après le théorème de Mertens (voir, par exemple, **III.6.1 (vol. I)**), le produit de Cauchy de ces deux séries converge pour $|x| < 1$ et

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) x^n.$$

III.4.10.

(a) On a

$$f(x+1) = (x+2)e^{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e(n+2)}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e(n+2)}{n!} (x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Comme en **III.4.9(h)**, on peut montrer que

$$f(x+1) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n, \quad x \in \left]-1, 1\right[.$$

Donc,

$$f(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) (x-1)^n, \quad x \in \left]0, 2\right[.$$

(c) Appliquez l'identité

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 1 \cos(x-1) - \sin 1 \sin(x-1)}{1 + (x-1)}.$$

(d) Un raisonnement semblable à celui présenté dans la solution de **III.4.9(h)** donne

$$\frac{\ln x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)(x-1)^n\,, \quad x \in \left]0\,,2\right[\,.$$

III.4.11.

(a) D'après **III.4.4**, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^n$$

pour $|x| < 1$. Donc,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}.$$

On pose

$$S(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{2n+1}$$

et on note que $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = S'(x)$. Donc, $\operatorname{Arcsin} x = S(x) + C$. De plus, puisque $S(0) = 0 = \operatorname{Arcsin} 0$, on obtient $S(x) = \operatorname{Arcsin} x$.

(b) On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}.$$

Vue l'identité bien connue

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

on obtient $(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2} = S'(x)$ et $S(x) = \operatorname{Arctan} x + C$. Puisque $\operatorname{Arctan} 0 = S(0) = 0$, on voit que $C = 0$.

Pour obtenir la première identité, il suffit de prendre $x = \frac{1}{2}$ dans (a). Pour obtenir la seconde, on remarque que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}$ converge et on applique le théorème d'Abel (voir **III.3.14**) à la série (b).

III.4.12.

(a) En appliquant le développement en série de Taylor de $\operatorname{Arctan} x$ (donné au problème précédent) et de $\ln\left(1+x^2\right)$, on obtient

$$x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad x \in \left]-1\,,1\right[.$$

(b) En appliquant le développement en série de Taylor de $\operatorname{Arcsin} x$ (donné au problème précédent) et la formule du binôme de Newton (voir **III.4.4**), on obtient

$$x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!(2n-1)} x^{2n}, \quad x \in \left]-1\,,1\right[.$$

III.4.13.

(a) Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}, \quad |x| \leqslant 1.$$

On a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x), \quad |x| < 1.$$

Donc,

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

Le théorème d'Abel donne alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln 2 - 1.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x).\end{aligned}$$

En prenant $x = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

(c) L'égalité

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

implique

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}\, x^{n-1} &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}\, x^{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}\, x^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{1}{3x^3}\sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{1}{3x^3}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\end{aligned}$$

si $0 < |x| < 1$. Ceci, combiné au théorème d'Abel, donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}\,.$$

(d) La somme est égale à $\frac{\pi}{2} - \ln 2$. Pour le voir, appliquez **III.4.12(a)** et le théorème d'Abel.

(e) La formule du binôme de Newton (voir **III.4.4**) donne

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n} \quad \text{pour} \quad |x| < 1$$

et, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

(f) Clairement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^{n+1}}{n!} = 3xe^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n\,(n+1)}{n!} = \left(3xe^{3x}\right)' = e^{3x}(3+9x).$$

En prenant $x = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} = 4e^3.$$

III.4.14. L'intervalle de convergence de la série est $]-1\,,1[$. On note $S(x)$ la somme de la série sur cet intervalle. On a alors

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\,(2x)^{2n-1}$$

et

$$S''(x) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\,(2x)^{2n-2}\,.$$

Il s'ensuit que

$$\left(1-x^2\right)S''(x) - xS'(x) = 4, \quad |x|<1.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

En conséquence,

$$S'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arcsin} x + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

et $S(x) = 2(\operatorname{Arcsin} x)^2 + C\arcsin x + D$. Puisque $S'(0) = S(0) = 0$, on obtient $S(x) = 2\,(\operatorname{Arcsin} x)^2$.

Si $x = \pm 1$, on obtient alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}\,4^n$$

qui converge d'après le critère de Gauss (voir, par exemple, **III.2.25 (vol. I)**). En effet, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{6}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le théorème d'Abel (voir **III.3.14**) donne donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}\,4^n = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

III.4.15. On a, pour $a \in \mathbf{I}$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(s)\,(x-s)^n\,ds.$$

En appliquant deux fois la formule de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^{x-a} f^{(n+1)}(u+a)\,(x-u-a)^n\,du \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((x-a)t+a)\,(1-t)^n\,dt. \end{aligned}$$

La monotonie de $f^{(n+1)}$ implique

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(x) &\leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((b-a)t+a)\,(1-t)^n\,dt \\ &= \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} R_n(b) \end{aligned}$$

si $a<x<b$ et $b \in \mathbf{I}$. Clairement, $R_n(b) \leqslant f(b)$, d'où

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n f(b) \quad \text{pour} \quad a<x<b,\ a,b \in \mathbf{I}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Ceci montre que la série de Taylor converge uniformément sur tout sous-intervalle compact de $\mathbf{I}$. Puisque l'on peut choisir arbitrairement $a<b$ dans $\mathbf{I}$, le fait que f soit analytique se déduit donc de **III.4.7**.

III.4.16. La démonstration est semblable à celle de **III.4.1**.

III.4.17. [18]. Soit $x_0 \in \mathbf{I}$. Par hypothèse, il existe $r>0$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{pour} \quad |x-x_0|<r.$$

En dérivant m fois, on obtient

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, n(n-1)\cdots(n-m+1)\,(x-x_0)^{n-m}.$$

Donc,

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(x_0)\right|}{n!}\, n(n-1)\cdots(n-m+1)\,|x-x_0|^{n-m}.$$

La définition du rayon de convergence d'une série entière (voir **III.3.1**) implique que, pour $0<\rho<r$, il existe $C>0$ tel que

$$\frac{\left|f^{(n)}(x_0)\right|}{n!} \leqslant \frac{C}{\rho^n}.$$

En conséquence,

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{C}{\rho^n} n(n-1)\cdots(n-m+1)\left|x-x_0\right|^{n-m}.$$

En utilisant l'identité

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \quad |x|<1,$$

on arrive à

$$\begin{aligned}\left|f^{(m)}(x)\right| &\leqslant \rho^{-m} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{C}{\rho^{n-m}} n(n-1)\cdots(n-m+1)\left|x-x_0\right|^{n-m} \\ &= \frac{Cm!}{\rho^m\left(1-\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{m+1}} \leqslant \frac{C\rho m!}{(\rho-\rho_1)^m}\end{aligned}$$

pour $|x-x_0|<\rho_1<\rho$. On peut donc prendre $\mathbf{J} =]x_0-\rho_1\,, x_0+\rho_1[$, $A = C\rho$ et $B = \rho-\rho_1$.

III.4.18. [18]. On pose

$$f(x) = \frac{1}{1-A(x-1)} \quad \text{pour} \quad |x-1| < \frac{1}{A}$$

et

$$g(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{pour} \quad |t|<1.$$

On a alors

$$h(t) = (f\circ g)(t) = \frac{1-t}{1-(A+1)t}.$$

Clairement,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n (x-1)^n, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

De plus,

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{1}{1-(A+1)t} - \frac{t}{1-(A+1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1+A)^n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (1+A)^n t^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} A(1+A)^{n-1} t^n.\end{aligned}$$

L'application de la formule de Faà di Bruno donne l'égalité cherchée car $g^{(n)}(0) = n!$, $f^{(n)}(g(0)) = f^{(n)}(1) = n!A^n$ et $h^{(n)}(0) = n!A\,(1+A)^{n-1}$.

III.4.19. [18]. Soit x_0 un élément de $\mathbf{I}$. On note $y_0 = f(x_0)$. On déduit de **III.4.17** qu'il existe des intervalles $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}$ et $\mathbf{J}_1 \subset \mathbf{J}$ (contenant respectivement x_0 et y_0) et des constantes strictement positives A, B, C et D tels que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant A\frac{n!}{B^n} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{I}_1$$

et

$$\left|g^{(n)}(y)\right| \leqslant C\frac{n!}{D^n} \quad \text{pour} \quad y \in \mathbf{J}_1.$$

D'après la formule de Faà di Bruno, on a

$$h^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\, g^{(k)}(f(x)) \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}$$

où $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ et la somme est prise sur l'ensemble des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. Ceci, combiné au résultat du problème précédent, donne

$$\begin{aligned}
\left|h^{(n)}(x)\right| &\leqslant \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\,\frac{Ck!}{D^k}\left(\frac{A}{B^1}\right)^{k_1}\left(\frac{A}{B^2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{A}{B^n}\right)^{k_n} \\
&= \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\,\frac{Ck!}{D^k}\,\frac{A^k}{B^n} \\
&= \frac{n!C}{B^n}\sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\,\frac{A^k}{D^k} \\
&= \frac{n!C}{B^n}\,\frac{A}{D}\left(1+\frac{A}{D}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Le résultat de **III.4.16** implique alors que h est analytique réelle sur $\mathbf{I}$.

III.4.20. Le résultat de **III.4.15** implique que $g(x) = f(-x)$ est analytique réelle sur l'intervalle $-\mathbf{I} = \{x : -x \in \mathbf{I}\}$. Puisque $x \mapsto -x$ est analytique réelle, le résultat se déduit du problème précédent.

III.4.21. [18]. On considère $g(t) = 1 - \sqrt{1-2t}$, $|t| < \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. On a alors

$$h(t) = f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = g'(t).$$

Donc, $g^{(n+1)}(t) = h^{(n)}(t)$. De plus, d'après la formule du binôme de Newton (voir **III.4.4**),

$$g(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-2t)^n .$$

Clairement, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Donc, $g^{(n)}(0) = -n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(-2)^n$ et $f^{(n)}(g(0)) = n!$. Finalement, d'après la formule de Faà di Bruno, on a

$$\begin{aligned}
-(n+1)!\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-2)^{n+1} &= g^{(n+1)}(0) = h^{(n)}(0)\\
&= n!\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(-\binom{\frac{1}{2}}{1}(-2)\right)^{k_1}\cdots\left(-\binom{\frac{1}{2}}{n}(-2)^n\right)^{k_n}\\
&= (-2)^n\, n!\sum \frac{(-1)^k\, k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n}
\end{aligned}$$

où $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ et la somme est prise sur l'ensemble des indices $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

III.4.22. [18]. On observe d'abord que si f vérifie les hypothèses énoncées dans le problème, alors son inverse g est défini sur un intervalle ouvert contenant $f(x_0)$. De plus,

$$g'(y) = h(g(y)) \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Clairement, puisque f est $\mathscr{C}^\infty$, g l'est aussi. Notre but est de prouver que g vérifie les hypothèses du **problème III.4.16**. On sait, d'après **III.4.19**, que h est analytique dans un intervalle ouvert contenant x_0 (comme composée de deux fonctions analytiques). Donc, d'après **III.4.17**, il existe des constantes strictement positives A et B telles que

$$\left|h^{(n)}(x)\right| \leqslant A\frac{n!}{B^n} \tag{1}$$

dans un intervalle ouvert $\mathbf{I}_0 \subset \mathbf{I}$ contenant x_0. On montre maintenant par récurrence qu'il existe un ouvert $\mathbf{K}$ contenant $f(x_0)$ tel que

$$\left|g^{(n)}(y)\right| \leqslant n!\,(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{(2A)^n}{B^{n-1}} \quad \text{pour} \quad y \in \mathbf{K}. \tag{2}$$

On choisit $\mathbf{K}$ de sorte que $g(\mathbf{K})$ soit contenu dans $\mathbf{I}_0$. D'après (1), on a alors $|g'(y)| = |h(g(y))| \leqslant A$, ce qui prouve (2) pour $n = 1$. On suppose que (2) est vérifiée pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et on montre qu'elle l'est aussi pour $k = n+1$. D'après le problème précédent, on a

$$\begin{aligned}
\left|g^{(n+1)}(y)\right| &= \left|(h \circ g)^{(n)}(y)\right| \\
&\leqslant n! \sum \frac{k!A}{k_1!k_2!\cdots k_n!B^k}\left(\binom{\frac{1}{2}}{1}(2A)\right)^{k_1} \cdots \left((-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{(2A)^n}{B^{n-1}}\right)^{k_n} \\
&= (-1)^n\, n! \frac{(2A)^n}{B^n}\, A \sum \frac{(-1)^k\, k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1} \cdots \binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n} \\
&= (-1)^n\, n! \frac{(2A)^n}{B^n}\, 2A(n+1)\binom{\frac{1}{2}}{n+1} \\
&= (-1)^n\,(n+1)! \frac{(2A)^{n+1}}{B^n}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration de (2) et l'analycité de g sur $\mathbf{K}$ se déduit donc de **III.4.16**.

III.4.23. Il découle de $f^{-1}(x) = f'(x)$ que f envoie l'intervalle $]0\,,+\infty[$ sur lui-même et que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle. Donc, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$. On voit, en dérivant l'égalité $f(f'(x)) = x$, que $f''(x) > 0$ pour $x \in\,]0\,,+\infty[$. On montre par récurrence, en utilisant la formule de Faà di Bruno (voir **II.1.38**), que $(-1)^n\, f^{(n)}(x) > 0$ pour $x \in\,]0\,,+\infty[$ et $n \geqslant 2$. On suppose que $(-1)^m\, f^{(m)}(x) > 0$ pour $m = 2, 3, \ldots, n$. On a alors

$$\begin{aligned}
0 = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\, & f^{(k)}(f'(x))\left(\frac{f''(x)}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{f^{(3)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \\
& \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\right)^{k_{n-1}} + f'(f'(x))f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

où $k = k_1 + \cdots + k_{n-1}$ et la somme est prise sur l'ensemble des indices $k_1, \ldots, k_{n-1}$ tels que $k_1 + 2k_2 + \cdots + (n-1)k_{n-1} = n$. Le signe de chaque terme sous le signe $\sum$ étant égal à

$$\operatorname{sgn}\left((-1)^k\,(-1)^{2k_1}\,(-1)^{3k_2}\cdots(-1)^{nk_{n-1}}\right) = (-1)^n\,,$$

on obtient

$$\operatorname{sgn}\left(f'(f'(x))f^{(n+1)}(x)\right) = \operatorname{sgn} f^{(n+1)}(x) = -\,(-1)^n\,.$$

D'après **III.4.20**, f est analytique sur $]0\,,+\infty[$.

III.4.24. On sait, d'après le problème précédent, que chaque fonction f vérifiant les hypothèses est analytique sur $]0\,,+\infty[$. On prouve d'abord qu'il existe un unique réel $a>0$ tel que $f(x)<x$ si $x\in\,]0\,,a[$ et $f(x)>x$ si $x>a$. Pour cela, on observe que, par monotonie de f, on a $\lim_{x\to0^+} f(x)=0$, ce qui, avec l'égalité $f'(f(x))f'(x)=xf'(x)$, donne

$$f(f(x))=\int_0^x tf'(t)\,dt. \qquad (*)$$

Si maintenant $f(x)$ est supérieur à x pour $0<x<1$, alors $(*)$ implique

$$\int_0^x f'(t)(t-1)\,dt>0,$$

contredisant le fait que $f'(x)>0$ pour $x>0$. D'autre part, si $f(x)<x$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $(*)$ implique alors

$$f(x)>f(f(x))=\int_0^x tf'(t)\,dt>\int_0^x f(t)f'(t)\,dt=\frac{1}{2}\,(f(x))^2,$$

ce qui donne $f(x)<2$ pour $x>0$, contredisant le fait que $f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}_+^*$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, la fonction f admet donc un point fixe a. Puisque $f(x)<x$ pour $x\in\,]0\,,a[$, on voit que $f'(y)=f^{-1}(y)>y$ pour $y\in\,]0\,,a[$. De même, $f'(y)<y$ pour $y>a$.

On se tourne maintenant vers la démonstration de l'unicité. On suppose, contrairement à l'énoncé, qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 vérifiant les conditions du problème. Soit a_1 et a_2 les points fixes respectifs de f_1 et f_2. Clairement, on peut supposer que $a_1\geqslant a_2$. On pose $g=f_1-f_2$. Si $a_1=a_2=a$, alors $g(a)=0$ et $f^{-1}=f'$ implique $g^{(n)}(a)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La fonction g étant analytique est donc constante (égale à la fonction nulle) sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $a_1>a_2$, alors $f_1(x)<x\leqslant f_2(x)$ et $f_1'(x)>x\geqslant f_2'(x)$ sur $[a_2\,,a_1[$, d'où $g(x)<0$ et $g'(x)>0$ pour $x\in[a_2\,,a_1[$. Puisque $\lim_{x\to0^+} g(x)=0$, il existe $b\in\,]0\,,a_2[$ tel que $g'(b)=0$, $g'(x)>0$ pour $x\in\,]b\,,a_1[$ et $g(x)<0$ pour $x\in[b\,,a_1[$. On pose $f_1'(b)=f_2'(b)=b'$. On a $b'\in\,]b\,,a_2[$ car $b<f_2'(b)=b'<f_2'(a_2)=a_2$, d'où $g(b')<0$. D'autre part, $f_1(b')=f_1(f_1'(b))=b$ et $f_2(b')=f_2(f_2'(b))=b$, contradiction.

III.4.25. Si $f(x)=ax^c$, alors $f'(x)=acx^{c-1}$ et $f^{-1}(x)=a^{-\frac{1}{c}}x^{\frac{1}{c}}$. Ceci donne $c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $a=c^{1-e}$.

III.4.26. D'après la formule de Taylor prouvée en **II.3.10**, on a

$$\ln(1+x) = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1} + R_N(x)$$

où

$$R_N(x) = \frac{2}{(2N+1)(1+\theta x)^{2N+3}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2N+3}.$$

Clairement, $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$ pour $x \in \left]0\,,2\right[$. En conséquence,

$$\ln(1+x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1}.$$

III.4.27. [Tung-Po Lin, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 879-883]. Par définition,

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{\frac{x-y}{\ln x - \ln y}}{\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p}} = \frac{2^{1/p}(x-y)}{(x^p+y^p)^{1/p}\ln\frac{x}{y}}$$

pour x et y strictement positifs et distincts et $p \neq 0$. En divisant numérateur et dénominateur par y et en posant $z = \left(\frac{x}{y}\right)^p$, on obtient

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{2^{1/p}\left(z^{1/p}-1\right)}{(z+1)^{1/p}\ln z^{1/p}}.$$

En écrivant maintenant

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad \left(w = \frac{z-1}{z+1},\ 0 < |w| < 1\right)$$

et en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\frac{(1-w)^{1/p}}{2w}$, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} &= \frac{p2^{1/p}\left(\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{1/p}-1\right)}{\left(\frac{1+w}{1-w}+1\right)^{1/p}\ln\frac{1+w}{1-w}} \\ &= \frac{\frac{p\left((1+w)^{1/p}-(1-w)^{1/p}\right)}{2w}}{\frac{\ln(1+w)-\ln(1-w)}{2w}} = \frac{f(w,p)}{g(w)}.\end{aligned}$$

Clairement,

$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} w^{2n}$$

et, d'après **III.4.4**,

$$f(w,p) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{p} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{p} - 2n\right) \cdot \frac{1}{(2n)!} \right) w^{2n}.$$

En conséquence, pour prouver que $f(w,p) < g(w)$, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{p} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{p} - 2n\right) \frac{1}{(2n)!} \leqslant 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que l'inégalité est stricte pour au moins une valeur de n. Pour $n = 1$, on a

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{p} - 2\right) \cdot \frac{1}{2} \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad p \geqslant \frac{1}{3}$$

car

$$\frac{1}{2p^2} - \frac{3}{2p} + 1 = 1 - \frac{1}{2p}\left(3 - \frac{1}{p}\right) < 1 \quad \text{si} \quad 0 < \frac{1}{p} < 3.$$

Donc,

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{\left(\frac{1}{p} - 1\right) \left(\frac{1}{p} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{p} - 2n\right)}{(2n)!} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{2p}\right)}_{Q_1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3p}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2np}\right)}_{<1} \end{aligned}$$

pour $p \geqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, $Q_1 \leqslant 1$ pour $p \geqslant \frac{1}{3}$ et la dernière inégalité montre que $Q_n < 1$ pour $n = 2, 3, \ldots$.

III.4.28. [Tung-Po Lin, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 879-883]. On adopte les notations utilisées dans la solution du problème précédent. On a $Q_1 > 1$ pour $p < \frac{1}{3}$. Il existe donc $0 < h < 1$ tel que $f(w,p) > g(w)$ si $0 < w < h$. On observe alors que l'on peut écrire l'inégalité $0 < w < h$ sous la forme

$$1 < z < r^p, \quad \text{où} \quad r = \left(\frac{1+h}{1-h}\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad z = \left(\frac{x}{y}\right)^p.$$

Ceci signifie qu'il existe $r > 1$ tel que $L(x,y) > M_p(x,y)$ si $1 < \frac{x}{y} < r$.

III.4.29. [Tung-Po Lin, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 879-883]. En posant $\frac{x}{y} = \frac{(1+w)^2}{(1-w)^2}$, $0 < |w| < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{L(x,y)}{M_0(x,y)} &= \frac{\frac{x-y}{\ln x - \ln y}}{(xy)^{1/2}} = \frac{\frac{\frac{x}{y}-1}{\ln \frac{x}{y}}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2}-1}{4\left(w+\frac{1}{3}w^3+\frac{1}{5}w^5+\cdots\right)}}{\frac{1+w}{1-w}} \\ &= \frac{1}{1-w^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}w^2+\frac{1}{5}w^4+\cdots} \\ &= \frac{1+w^2+w^4+w^6+\cdots}{1+\frac{1}{3}w^2+\frac{1}{5}w^4+\frac{1}{7}w^6+\cdots} > 1,\end{aligned}$$

ce qui, combiné avec **II.5.42** et **II.5.43**, implique le résultat cherché.

III.4.30. [Tung-Po Lin, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 879-883]. Avec les notations introduites dans la solution de **III.4.27**, on a

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{p\left((1+w)^{1/p} - (1-w)^{1/p}\right)}{\ln \frac{1+w}{1-w}} \xrightarrow[w \to 1]{} 0.$$

Puisque $z = \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{1+w}{1-w}$, on obtient $L(x,y) < M_p(x,y)$ pour z suffisamment grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Banaś, S. Wędrychowicz. *Zbiór zadań z analizy matematycznej.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Varsovie, 1994.

[2] W. Bernik, O. Melnikov, I. Žuk. *Sbornik olimpiadnych zadač po matematike.* Narodnaja Asveta, Minsk, 1980.

[3] P. Biler, A. Witkowski. *Problems in Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1990.

[4] R. P. Boas. *A Primer of Real Functions.* Mathematical Association of America, 4e edition, 1996.

[5] T. J. I. Bromwich. *An introduction to the theory of infinite series.* AMS Chelsea, New-York, 3e edition, 1991.

[6] L. Carleson, T. W. Gamelin. *Complex Dynamics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1993.

[7] B. P. Demidovič. *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu.* Nauka, Moscou, 1969.

[8] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis.* Academic Press, New York, San Franscico, London, 1969.

[9] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Spravočnoe posobe.* Vyščaja Škola, Kiev, 1985.

[10] A. J. Dorogovcev. *Matematičeskij analiz. Sbornik zadač.* Vyščaja Škola, Kiev, 1987.

[11] G. M. Fikhtengol'ts. *A course in differential and integral calculus*, volume I, II, 7th ed., III, 5th ed. Nauka, Moscou, 1969. (Russe). Trad. all. : G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, Verlag Harri Deutsch.

[12] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted. *Theorems and Counterexamples in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1990.

[13] E. Hille. *Analysis, vol. I.* Blaisdell Pub. Co, New York, Toronto, London, 1964.

[14] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis I. Real Numbers, Sequences and Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[15] G. Klambauer. *Mathematical Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1975.

[16] G. Klambauer. *Problems and Propositions in Analysis.* Marcel Dekker, New York, Basel, 1979.

[17] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[18] S. G. Krantz, H. R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions, Second Edition.* Birkhäuser Verlag, 2002.

[19] L. D. Kudriavtsev, A. D. Kutasov, V. I. Chejlov, M. I. Shabunin. *Problemas de análisis Matemático. Límite, Continuidad, Derivabilidad.* Mir, Moscou, 1989.

[20] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, Oxford, Edimbourg, New York ; Polish Scientific Publishers, Varsovie, 1969.

[21] S. Łojasiewicz. *An Introduction to the Theory of Real Functions.* A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[22] D. S. Mitrinović. *Elementary Inequalities.* P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[23] G. Pólya, G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis I.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[24] R. Remmert. *Theory of Complex Functions.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[25] Y. I. Rivkind. *Zadači po matematičeskomu analizu.* Vyšejšaja Škola, Minsk, 1973.

[26] W. I. Rozhkov, G. D. Kurdevanidze, N. G. Panfilov. *Sbornik zadač matematičeskich olimpiad.* Izdat. Univ. Druzhby Nardov, Moscou, 1987.

[27] Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 2nd edition, 1976. Trad. : *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2000.

[28] W. Rzymowski. *Convex Functions.* preprint.

[29] W. A. Sadowničij, A. S. Podkolzin. *Zadačin studenčeskich olimpiad po matematike.* Nauka, Moscou, 1978.

[30] R. Sikorski. *Funkcje rzeczywiste.* PWN, Varsovie, 1958.

[31] H. Silverman. *Complex variables.* Houghton Mifflin, Boston, 1975.

[32] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* Oxford University Press, London, 2nd edition, 1976.

[33] G. A. Tonojan, W. N. Sergeev. *Studenčeskije matematičeskije olimpiady.* Izdatelstwo Erevanskogo Universiteta, Erevan, 1985.

TABLE DES RENVOIS

En règle générale, nous n'indiquons pas les renvois d'un problème au précédent ou au suivant. Si vous cherchez une application d'un problème, il est donc conseillé de commencer par regarder le problème suivant (parfois le précédent). Nous ne faisons pas dans cette table la différence entre un énoncé et la solution proposée et le renvoi peut donc se trouver dans l'un ou dans l'autre.

I.1.12 : I.3.7, II.1.39
I.1.13 : I.1.18, I.1.20, I.1.23
I.1.14 : I.1.18
I.1.15 : I.1.17
I.1.16 : I.1.18, I.1.20
I.1.17 : I.1.19, I.1.20, I.1.22, II.3.35
I.1.18 : I.1.20
I.1.21 : I.1.23
I.1.23 : II.3.37
I.1.25 : I.1.33
I.1.28 : I.1.30, I.1.31
I.1.33 : I.7.22
I.1.35 : I.2.15, I.2.21, I.2.29, I.3.2, I.4.2, I.5.10, I.5.20, III.1.23, 1.2.21 (vol. III), 1.2.24 (vol. III), 2.2.11 (vol. III)
I.1.36 : 1.2.21 (vol. III)
I.1.37 : I.5.3, 1.5.7 (vol. III), 1.5.10 (vol. III)
I.1.40 : I.1.42, I.3.26, II.4.35
I.1.41 : I.3.26
I.1.42 : I.3.26
I.2.1 : I.4.12
I.2.3 : I.4.14, I.4.15, I.7.15
I.2.9 : I.2.27
I.2.22 : I.2.27
I.2.23 : I.5.6
I.2.29 : II.4.19, III.1.23, 1.2.21 (vol. III)
I.2.33 : I.6.20, II.4.1, II.4.16, II.4.18, II.4.27, II.4.29, II.4.35
I.2.34 : II.2.26, III.1.8, III.1.29, III.2.2, III.2.5, III.2.7, III.2.23, III.2.32 – III.2.37, III.2.40
I.3.1 : 1.7.11 (vol. III), 2.2.11 (vol. III)
I.3.16 : I.3.18, I.3.19, I.3.28, I.6.22, 2.2.12 (vol. III)
I.4.1 : I.4.6, I.4.7, I.4.19
I.4.2 : I.4.4, I.4.5, I.4.8
I.4.5 : I.4.11
I.4.6 : I.4.8

I.4.8 : I.4.10, I.4.16
I.4.10 : II.4.33
I.4.16 : I.4.20
I.4.18 : I.4.25
I.4.19 : I.7.12
I.4.20 : I.4.24, I.7.12
I.5.2 : I.5.4, I.5.9
I.5.3 : I.5.9
I.5.5 : I.5.7
I.5.7 : I.5.10, I.5.18, II.4.18, 1.5.15 (vol. III)
I.5.13 : I.5.21
I.6.1 : I.6.3, I.6.4, I.6.10, I.6.13, I.6.17, I.6.24
I.6.2 : I.6.26, I.6.27
I.6.3 : I.6.5
I.6.10 : I.6.20
I.6.11 : I.6.20
I.6.30 : II.2.29
I.6.31 : II.4.27
I.7.1 : I.7.22
I.7.4 : I.7.8
I.7.9 : I.7.28
I.7.12 : I.7.14, I.7.18, I.7.19, 2.1.55 (vol. III)
I.7.13 : 2.1.55 (vol. III)
I.7.20 : II.6.6
II.1.8 : II.1.10
II.1.13 : II.3.27, II.6.1
II.1.14 : II.3.27, 2.4.17 (vol. III)
II.1.19 : II.1.22
II.1.38 : II.1.6, III.4.18, III.4.19, III.4.21, III.4.23
II.2.14 : II.3.1, II.3.2, II.3.8, II.3.27, II.3.40, II.4.1, II.4.20, II.4.32, II.5.1 – II.5.3, II.5.8, II.5.10 – II.5.12, II.5.14, II.6.3, III.1.14, III.1.28, III.1.31
II.2.26 : II.6.18
II.2.31 : II.3.10, II.3.40, II.4.33, 1.2.24 (vol. III)
II.2.32 : II.3.41, II.5.4, 1.5.18 (vol. III)
II.2.36 : II.2.38
II.3.1 : II.3.12, II.3.13, II.3.15, II.3.27, II.3.35, 1.4.32 (vol. III)
II.3.3 : II.3.6 – II.3.9, II.3.14 – II.3.25, II.3.30 – II.3.33, II.3.42, II.5.15, II.5.19, II.5.53, II.5.54, III.1.10, III.1.14, III.1.28, III.1.31, III.2.38, III.4.1, III.4.4
II.3.4 : II.3.29, III.4.15
II.3.7 : II.5.55, 1.5.31 (vol. III)
II.3.10 : III.4.26
II.3.15 : II.3.30
II.3.28 : II.3.39
II.3.33 : III.3.26
II.3.40 : II.3.42, II.5.4
II.4.1 : II.4.19, II.4.20
II.4.2 : II.4.4, II.4.7, II.4.9 – II.4.11, II.5.28
II.4.3 : II.4.5, II.4.9 – II.4.13, 1.6.29 (vol. III), 1.6.30 (vol. III)
II.4.4 : II.4.21
II.4.14 : II.4.18
II.4.19 : II.4.33, II.4.35, 2.3.34 (vol. III)
II.4.21 : II.4.23
II.4.26 : II.4.28
II.5.1 : II.5.29, II.5.44, II.5.48, III.1.12, 1.1.14 (vol. III)
II.5.25 : 1.6.36 (vol. III)
II.5.28 : III.2.2
II.5.30 : 1.4.46 (vol. III)
II.5.41 : III.4.27 – III.4.30
II.5.42 : III.4.27 – III.4.30
II.5.43 : III.4.29
II.5.52 : III.1.32

INDEX

I

L

M

N

O

P

R

S

T

V