Trouver sup E, inf E, max E et min E, avec $E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Solution:

on a $(-1)^n = \begin{cases} -1 & , \text{si } n=2k+1 \ (n \text{ impair}) \\ 1 & , \text{si } n=2k \ (n \text{ pair}) \end{cases}$

Dans la présence de $(-1)^n$ dans un ensemble, on ne peut pas directement remplacer la 1ère valeur que prend n et faire la limite en ∞ pour avoir l'intervalle. Alors, on doit considérer le cas de n pair et n impair.

$$(-1)^n+\frac{1}{n^2} = \begin{cases} 1+\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{(2k)^2} & , n \text{ pair} \\ -1+\frac{1}{n^2} = -1+\frac{1}{(2k+1)^2} & , n \text{ impair.} \end{cases}$$

* n pair :

Soit $E_1=\left\{1+\frac{1}{n^2}, n=2k, k\in\mathbb{N}^*\right\}$

on pose $f(x)=1+\frac{1}{(2x)^2}, x\in\mathbb{N}^*$

$f'(x)=\frac{-1}{2x^3}<0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{5}{4}$ $\searrow$	1

D'après le tableau de variations

$\boxed{\sup E_1 = \frac{5}{4}}$ $\boxed{\inf E_1 = 1}$

* n impair :

Soit $E_2=\left\{-1+\frac{1}{n^2}, n=2k+1, k\in\mathbb{N}\right\}$

on pose $f(x)=-1+\frac{1}{(2x+1)^2}, x\in\mathbb{N}.$

$f'(x)=\frac{-4}{(2x+1)^3}<0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 $\searrow$	-1

Donc

$\boxed{\sup E_2 = 0}$ $\boxed{\inf E_2 = -1}$

$\sup E = \sup(E_1\cup E_2) = \max(\sup E_1, \sup E_2) = \max\left(\frac{5}{4}, 0\right) = \boxed{\frac{5}{4}}$

$\inf E = \inf(E_1\cup E_2) = \min(\inf E_1, \inf E_2) = \min(1,-1) = \boxed{-1}$

Ensemble des majorants est $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ $\left(\left[\sup E, +\infty\right[\right)$

Ensemble des minorants est $\left]-\infty, -1\right]$ $\left(\left]-\infty, \inf E\right]\right)$

$\boxed{\max E = \frac{5}{4}}$ car $\sup E = \frac{5}{4} = f(x) \Rightarrow x=1$ (puisque 1 est fini donc max $\exists$)

$\boxed{\text{min E n'existe pas}}$ car $\inf E = -1 = f(x) \Rightarrow x = +\infty$ (puisque on trouve ∞ donc min