Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $1+x < e^x < \frac{1}{1-x}$

- on pose $f(x) = e^x$, $x \in [0,x]$

  f continue sur $[0,x]$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  f dérivable sur $]0,x[$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème d'accroissement finis

$$\exists c \in]0,x[: f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$$

En d'autres termes $e^x - 1 = x \cdot f'(c) \Rightarrow e^x = x \cdot f'(c) + 1 \ldots\ldots (1)$

On a $f'(x) = e^x$, donc $f'(c) = e^c$

(1) Devient $e^x = x \cdot e^c + 1$.

on a $0 < c < x \Rightarrow e^0 < e^c < e^x$ (car la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante)

$$\Rightarrow x < x \cdot e^c < x \cdot e^x \text{ (car } x > 0)$$

$$\Rightarrow x+1 < xe^c + 1 < xe^x + 1$$

$$\Rightarrow x+1 < e^x < xe^x + 1$$

La 1ère inégalité à gauche est trouvée : $\boxed{e^x > x+1} \ldots\ldots (*)$

- on pose $g(x) = e^{-x}$, $x \in [0,x]$

  g est continue sur $[0,x]$, car g est continue sur $\mathbb{R}$

  g est dérivable sur $]0,x[$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'après le T.A.F

$$\exists c \in]0,x[: g(x) - g(0) = (x-0) g'(c)$$

$$\exists c \in]0,x[: e^{-x} - 1 = x\, g'(c) \ldots\ldots (2)$$

on a $g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow g'(c) = -e^{-c}$

(2) devient $e^{-x} - 1 = -x e^{-c} \Rightarrow e^{-x} = 1 - x e^{-c}$

on a $0 < c < x \Rightarrow -x < -c < 0 \Rightarrow e^{-x} < e^{-c} < 1$

$$\Rightarrow xe^{-x} < xe^{-c} < x$$

$$\Rightarrow -x < -xe^{-c} < -xe^{-x}$$

$$\Rightarrow -x+1 < 1-xe^{-c} < 1-xe^{-x}$$

$$\Rightarrow 1-x < e^{-x} < 1-xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-xe^{-x}} < e^x < \frac{1}{1-x}$$

La 2ème inégalité à droite est trouvée

$$\boxed{e^x < \frac{1}{1-x}} \ldots\ldots (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on obtient

$$\boxed{x+1 < e^x < \frac{1}{1-x}}$$