Chapitre 1

Déterminants

On ne considère durant cette partie que les matrices carrées.

Définition 1 *Soit A une matrice carré $(n \times n)$ on appelle diagonale la droite formé par les éléments a_{ij} de A qui vérifie $i = j$.*

Exemple 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *les éléments de la diagonale sont $a_{11} = 1$ et $a_{22} = 3$.*

Définition 3 *On appelle matrice diagonale toute matrice dont les éléments situés hors de la diagonale, sont nuls.*
Le terme général d'une matrice diagonale vérifie $\forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 4 *On appelle matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) toute matrice dont les éléments qui se trouvent au dessous (respectivement au dessus) de la dia-*

gonale sont tous nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{Matrice triangulaire supérieure.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{Matrice triangulaire inférieure.}$$

Exemple 5 $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

La matrice T est une matrice triangulaire supérieure et la matrice T' est une matrice triangulaire inférieure.

Définition 6 *Soit A une matrice carré, on dit que la matrice A est symétrique (respectivement antisymétrique) si elle vérifie :*

$$a_{ij} = a_{ji} \ \text{(respectivement } a_{ij} = -a_{ji} \text{)} \quad \forall : 1 \leq i, j \leq n$$

Autrement dit une matrice A est symétrique si elle vérifie $A = A^t$ et antisymétrique si elle vérifie : $A = -A^t$.

Remarque 7 *Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls en effet on a :* $\forall : 1 \leq i \leq n : a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$.

Exemple 8 $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, S' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice S est symétrique. La matrice S' est antisymétrique.

Définition 9 *On appelle matrice identité et on note I_n la matrice carrée de dimension $(n \times n)$ donnée par :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Le terme général de la matrice identité est dit symbole de Kronecker et noté δ_{ij}.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

1.0.1 Propriété

Pour toute matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $A.I_n = I_n.A = A$ la matrice I_n est donc un élément neutre pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 10 *On appelle matrice scalaire toutes les matrices de la forme $\lambda.I$, où λ est un réel quelconque.*

Exemple 11

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 12 *Soit A une matrice carré (2×2), on appelle détérminant de la matrice A le résultat de l'opération :* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

1.1 Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 13 *La définition du détérminant d'une matrice carrée* (2×2) *se généralise à une matrice de dimension* $(n \times n)$ *de la façon suivante :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + ... (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}$$

Où M_{i1} *sont appelés les mineurs de la matrice* A*. c'est le détérminant obtenu en suprimant la ligne* i *et la colonne 1 de la matrice* A*.*

On dit dans ce cas ,qu'on a développé le déterminant suivant la colonne 1.

Remarque 14 *On peut développer le déterminant d'une matrice carrée suivant n'importe quelle ligne ou colonne sans changer le résultat, on choisit en général la ligne ou la colonne qui contient le maximum de 0.*

Exemple 15 *Calculer le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On va calculer le déterminant de 3 façons, en dévellopant par la 1ère et 3ème ligne et en fonction de la 3 ème colonne.
1) développement selon la première ligne.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} \times (2) \times \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 - 15) - (0 + 10) + 3 \times (12 - 4) = -16. \end{aligned}$$

2) *développement selon la troisième ligne.*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \\
& +(-1)^{3+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times (3) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \times (5+6) - 3 \times (10-12) + 0 \times (-4-4) = -22 + 6 = -16
\end{aligned}$$

3) développement selon la troisième colonne.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+3} \times (3) \times \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times (5) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times (12-4) - 5 \times (6+2) + 0 \times (-4-4) = -16.
\end{aligned}$$

Remarque 16 *Le détérminant d'une matrice diagonale est égale au produit des éléments de la diagonale.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Remarque 17 *Le détérminant d'une matrice triangulaire est aussi égal au produit des éléments de la diagonale.*

1.1.1 Propriétés des déterminants

Propriété 1

Si on multiplie une ligne ou une colonne par une constante k alors le déterminant est aussi multiplié par k.

Exemple 18 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *dont on a calculé le déterminant dans l'exemple précédant.*

On souhaite calculer le déterminant de la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que la matrice A_1 a été obtenue en multipliant la première ligne de la matrice A par 2, donc on peut conclure que :

$$\det(A_1) = 2\det(A) = 2 \times (-16) = -32.$$

Propriété 2

Permuter deux lignes fait changer de signe au déterminant $(\times -1)$, *si le nombre de permutations est pair alors le déterminant ne change pas s'il est impair le déterminant change de signe.*

Exemple 19 *On a la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *de l'exemple précédant.*

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A_2 est le résultat de la permutation des lignes L_1 et L_3 de la matrice A on a donc :

$$\det(A_2) = -\det(A) = -(-16) = 16.$$

Propriété 3

Soit A une matrice $(n \times n)$, on note $L_1, L_2, ...L_n$ les lignes $1, 2, ...n$ respectivement et $C_1, C_2, ...C_n$ les colonnes $1, 2, ...n$ respectivement.

Définition 20 *Soit $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_s$ $(s \leq n)$ des nombres réels.On appelle combinaison linéaire des lignes $L_1, L_2, ...L_s$ (respectivement $C_1, C_2, ...C_s$) la ligne (colonne) donnée par :*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ...\lambda_s L_s \ \ (respectivement\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + ...\lambda_s C_s)$$

Propriété : *Ajouter à une ligne (colonne) d'une matrice une combinaision linéaire des lignes (colonnes) de la matrice ne change pas la valeur du déterminant.*

Exemple 21 *On a toujours la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit la matrice A_3 où on ajoute à la ligne L_1 la somme des lignes L_2 et L_3.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculant le déterminant de la matrice A_2 en dévellopant selon la troisième ligne.

$$\begin{aligned}\det(A_2) &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ & + (-1)^{3+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times (3) \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times (10 - (-16)) - 3 \times (20 - 32) + 0 \times (-8 - 8) = -16.\end{aligned}$$

Question : Si on remplace la ligne L_1 par $2L_1 + L_2 + L_3$, quelle est la valeur du déterminant de la matrice A ?

Proposition 22 *Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le déterminant du produit est égal au produit des déterminants :*

$$\det(A.B) = \det(A) . \det(B) .$$

Définition 23 *Soit $M=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice blocs carré. Le $det(M) = \det(A). \det(B)$.*

Définition 24 *Soit M une matrice blocs triangulaire supérieure (inférieure)avec les blocs carrés diagonaux : $A_1, A_2...., A_n$. Le $\det(A) = \det(A_1). \det(A_2).... \det(A_n)$.*

Exemple 25 *$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,remarquons que M est une matrice blocs triangulaire supérieure . On calcul le dét de chaque bloc diagonal : det$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ =*

$13, \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 29. D'ou \det(M) = 13.29 = 377.$

1.1.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition 26 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, On dit que A est inversible si et seulement si, il existe une matrice carrée A^{-1} tel que*

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Proposition 27 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

1.1.3 Calcul de l'inverse.

Définition 28 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, an appelle comatrice de la matrice A la matrice définie par :*

$$Com(A) = \left((-1)^{i+j} M_{ij}\right)$$

Où M_{ij} est le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

Proposition 29 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, si* $\det(A) \neq 0$ *la matrice inverse de A est donnée par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (Com(A))^t$$

Exemple 30 *Soit la matrice A , on a déjà*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

$\det(A) \neq 0$ *donc la matrice A est inversible.*

$$com(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & -10 & 8 \\ 9 & 6 & -8 \\ 11 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$com^t(A) = \begin{pmatrix} -15 & 9 & 11 \\ -10 & 6 & 2 \\ 8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-15}{-16} & \frac{9}{-16} & \frac{11}{-16} \\ \frac{-10}{-16} & \frac{6}{-16} & \frac{2}{-16} \\ \frac{8}{-16} & \frac{-8}{-16} & \frac{-8}{-16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & -\frac{9}{16} & -\frac{11}{16} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.2 Résolution de systèmes d'équations par la méthode de Cramer (Gabriel Cramer 1704-1752).

Soit le système d'équations sous forme matriciel $A.X = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Méthode de Cramer

- Calculer le détéminant de la matrice A, si $|A|$ est non nul alors il existe une solution unique, sinon soit il existe une infinité de solutions soit aucune solution.
- Quand le détérminant est non nul et ci on note $C_1, C_2, ...C_n$ repectivement la première,seconde, ...n-ième colonne de la matrice A alors on a la formule :

$$x_i = \frac{\det(C_1, ..C_{i-1}, B, C_{i+1}, ...C_n)}{\det(A)}$$

Autrement dit pour chaque x_i on remplacera la colonne correspondante par la colonne b et on calcule le détérminant de la matrice obtenue.

Exemple 31 *Résoudre le système d'équations suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

On calcule d'abord le détérminant de la matrice A;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{5} = 1, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{5} = 2, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{5} = 3$$

1.2.1 Inconvénient de la méthode de Cramer

L'incovénient de la méthode de Cramer est le nombre d'opérations arithmétiques nécéssaires pour trouver la solution, ce nombre est évalué à environ $N \times (N+1)!$ ainsi pour un système à 100 inconnues, on devra effectuer sur machine à peu près 9.4×10^{161} opérations, ainsi même avec une machine d'une vitesse d'un petaflops [1] c'est à dire effectuant 10^{15} opérations par secondes il faudrait environ $0.2980720446 \times 10^{140}$ années pour trouver la solution.

[1] Début juin 2008, le supercalculateur IBM Roadrunner est le premier à franchir la barre symbolique du Pétaflop. Puis, en novembre 2008, c'est au tour du supercalculateur Jaguar de Cray. En avril 2009, c'étaient les deux seuls supercalculateurs à avoir dépassés le Petaflop.(source Page processeur Wikepedia 18/12/2010)

Chapitre 2

Résolution des systèmes linéaires$\cup$

2.0.2 Méthode de Gauss (Carl Friedrich Gauss 1777-1855).

La méthode de Gauss consiste à effectuer des éliminations jusqu'à obtenir un système équivalent à une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

La méthode comporte (n-1) transformations sur le système, on notera $a_{ij}^{(k)}$ l'élément a_{ij} à l'étape k.

Etape n° =1 :

- On transforme A en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls .

Pour éliminer le terme a_{21} on multiplie la ligne l_1 par $\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right)$

$$l_2^{(1)} \leftarrow l_2 + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right) l_1$$

on obtient ainsi

$$\left(\begin{array}{c} a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) a_{1j} \\ b_2^{(1)} = b_2 - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) b_1 \end{array} \right)$$

Pour éliminer le terme a_{31} on multiplie l_1 par $\left(\dfrac{-a_{31}}{a_{11}}\right)$

$$l_3^{(1)} \leftarrow l_3 + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right) l_1$$

on obtient ainsi

$$\left(\begin{array}{c} a_{3j}^{(1)} = a_{3j} - \left(\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right) a_{1j} \\ b_3^{(1)} = b_3 - \left(\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right) b_1 \end{array} \right)$$

D'une manière générale pour éliminer tout les termes a_{i1} on utilise la transformation

$$l_i^{(1)} \leftarrow l_i + \left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right) l_1$$

$$\left(\begin{array}{c} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{ij} \\ b_i^{(1)} = b_i - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) b_1 \end{array} \right)$$

A la fin de la première étape le système d'équations aura la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right]$$

Etape n° =2 :

Nous éliminons ensuite les termes sous-diagonaux de la seconde colonne.

Comme à la première étape pour éléiminer le terme a_{32} on doit utiliser la transformation élémentaire

$$l_3^{(2)} \leftarrow l_3^{(1)} + \left(\frac{-a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) l_2^{(1)}$$

on obtient ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{23}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{3n}^{(2)} = a_{3n}^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}}\right) a_{2n}^{(1)} \\ b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) b_2^{(1)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{2j}^{(1)} \\ b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) b_1^{(1)} \end{array}\right)$$

En continuant de la même étape qu'à la première étape on obtient la fin de la seconde étape le système d'équations aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Etape n° =k :

Pendant une étape k (k *quelconque*) Nous éliminons les termes sous-diagonaux de la $k-i\grave{e}me$ colonne

$$l_{k+1}^{(k)} \leftarrow l_{k+1}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right) l_k^{(k-1)}$$

on obtient ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} a_{k+1,k}^{(k)}=a_{k+1,k}^{(k-1)}-\left(\dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)a_{kk}^{(k-1)}=0 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)}=a_{k+1,k+1}^{(k-1)}-\left(\dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)a_{k,k+1}^{(k-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,n+1}^{(k)}=a_{k+1,j}^{(k-1)}-\left(\dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)a_{k,n+1}^{(k-1)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} a_{k+1j}^{(k)}=a_{k+1,j}^{(k-1)}-\left(\dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)a_{k,j}^{(k-1)} \\ b_{k+1}^{(k)}=b_{k+1}^{(k-1)}-\left(\dfrac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)b_1 \end{array}\right)$$

A la fin de la dernière étape on obtiendra une matrice triangulaire supérieure équivalente à la matrice de départ.

Remarque 32 *Les opérations précédentes supposent que les termes* $a_{kk}^{(k-1)}$ *appelés pivots sont non nuls.*

Exemple 33 *Soit le système d'équations représenté par la matrice augmenté suivante :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2+\left(\frac{-6}{2}\right)l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3+\left(\frac{-8}{2}\right)l_1 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$l_3 \leftarrow l_3+\left(\frac{-1}{1}\right)l_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

la solution du système est

$$x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 3$$

2.0.3 Pivot partiel / Pivot total

Si au cours d'une étape k un pivot nul apparait on ne peut plus effectuer de division pour éliminer les éléments sous diagonaux, dans ce cas on effectue une permutation de lignes pour contourner cette difficultée.

Deux choix sont possibles, le pivotage partiel et le pivotage total.

Pivot partiel

On cherche le plus grand élément en valeur absolue des éléments sous le pivot, notons l'indice de sa ligne s et on échange les lignes $L_k^{(k-1)}$ et $L_s^{(k-1)}$.

$$a_{sk}^{(k-1)} = \max \left\{ a_{ik}^{(k-1)}, i > k \right\} \Rightarrow L_k^{(k-1)} \leftarrow L_s^{(k-1)}$$

Pivot total

On cherche le plus grand élément en valeur absolue dans le rectangle formé par les lignes L_{k+1} et L_n et les colonnes C_k et C_n , notons l'indice de cet $a_{st}^{(k-1)}$, on échange alors les lignes $L_k^{(k-1)}$ et $L_s^{(k-1)}$ et ensuite les colonnes C_k et C_s en faisant attention au fait que ce dernier changement implique un autre sur l'ordre des solutions qui seront donnés dans l'ordre du changement.

$$a_{st}^{(k-1)} = \max \left\{ a_{ij}^{(k-1)}, i > k, j \geq k \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_k^{(k-1)} \leftarrow L_s^{(k-1)} \\ C_k^{(k-1)} \leftarrow C_s^{(k-1)} \end{array} \right.$$

Le vecteur solution X est donné par :

$$X = (x_1, ...x_{k-1}, x_s, x_{k+1}, ..x_{s-1}, x_k, x_{s+1}, ..., x_n)$$

Exemple 34 *Soit le système d'équations à résoudre par la méthode de Gauss :*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les opératios de la première étape sont données par :

$$\begin{cases} l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 + l_1 \end{cases}$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

comme le pivot $a_{22}^{(1)}$ *est nul, on doit effectuer un changement de pivot.*

1- Pivot partiel

Si on opte pour le pivot partiel on doit effectuer le changement $l_2 \leftarrow l_4$ *et le système est équivalent à :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

On peut donc passer directement à l'étape suivante, l'opération de la dernière étape est donnée par : $l_4 \leftarrow l_4 + \frac{1}{2}l_3$ *et on obtient :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

La solution du système est donnée par : $x_4 = 4, x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1.$

Remarque 35 *Les modifications apportées à la matrice en appliquant la méthode de Gauss ne change pas la valeur du déterminant (tenir compte du nombre de permutation de lignes et de colonnes en cas d'application du pivot). En pratique en se sert des méthodes directes également pour calculer le déterminant d'une matrice.*

Remarque 36 *Si on veut résoudre plusieurs systèmes d'équations possédant la même matrice A des coéfficients mais à second membres différents, il suffit d'ajouter tous les seconds membres à la matrice pour former une seule matrice augmentée.*

Exemple 37 *Soit les systèmes d'équations suivants :*

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 = 26 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 35 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 2 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \end{array}\right.$$

Il suffit de former la matrice augmentée suivante $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 26 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 1 & 35 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.1 Méthodes par factorisation LU.

Les méthodes par factorisation LU consistent à transformer la matrice des coéfficients A en un produit de deux matrices triangulaires l'une inférieure L et l'autre supérieure U.

Une fois la décomposition effectuée il faut résoudre deux systèmes à matrices triangulaires.

$$A.X = b \Leftrightarrow L.\underbrace{U.X}_{Y} = b$$

On résoudra d'abord le système $LY = b$ une fois Y trouvée on résoudra le second système $U.X = Y$.

2.1.1 Décomposition de Crout.

La décomposition LU n'est pas unique et il faut ajouter des conditions, la méthode de Crout impose que la diagonale de L soit formée d'unités 1.

Exemple 38 *Résoudre le système*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & U_{22} + L_{21}U_{12} & U_{23} + L_{21}U_{13} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & U_{33} + L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} \end{pmatrix}$$

Par identification on obtient :

$(1)\ \begin{cases} U_{11}=2 \\ U_{12}=1 \\ U_{13}=2 \end{cases}$	$(2)\ \begin{cases} L_{21}U_{11}=6 \\ U_{22}+L_{21}U_{12}=4 \\ U_{23}+L_{21}U_{13}=0 \end{cases}$	$(3)\ \begin{cases} L_{31}U_{11}=8 \\ L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22}=5 \\ U_{22}+L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}=1 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2L_{21}=6 \\ U_{22}+L_{21}=4 \\ U_{23}+2L_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{21}=3 \\ U_{22}=1 \\ U_{23}=-6 \end{cases}$	$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2L_{31}=8 \\ L_{31}+L_{32}=5 \\ U_{33}+2L_{31}-6L_{32}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{31}=4 \\ L_{32}=1 \\ U_{33}=-1 \end{cases}$

D'où

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$LY=b \Rightarrow \begin{cases} y_1=10 \\ 3y_1+y_2=26 \\ 4y_1+y_2+y_3=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=10 \\ y_2=-4 \\ y_3=-1 \end{cases}$$

$$UX=Y \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=10 \\ x_2-6x_3=-4 \\ -x_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

2.2 Systèmes d'équations linéaires surdéterminés

On parle de système surdéterminé si on a plus d'équations indépendantes que d'inconnues. D'une façon générale un système surdeterminé ne possède pas de solution.

On tente à la place de minimiser l'écart $\|AX - b\|_2^2$ qu'on nomme également résidu et de le rendre le plus proche de 0. La solution trouvée est dite pseudo-solution.

Proposition 39 *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice à m lignes et n colonnes avec $m \geq n$: la fonction $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $R(X) = \|AX - b\|_2^2$ admet au moins un minimum qui est solution du système :*

$$A^T AX = A^T b$$

La dernière équation est appelée équation normale.

Exemple 40 *Trouver la pseudo solution du système d'équations surdeterminé suivant*

$$\begin{cases} 2a + b = 6.5 \\ 4a + b = 8.5 \\ 5a + b = 11 \\ 6a + b = 12.5 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.5 \\ 8.5 \\ 11 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 81 & 17 \\ 17 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 177.0 \\ 38.5 \end{pmatrix}$$

La pseudo solution est donnée par : $a = 1.5286, b = 3.1286$.