Université Abderrahmane Mira de Béjaia.
Département d'informatique
2ème année, 2020/2021.
Algèbre 03

Série d'exercices N°1

Exercice n°1 : Calculer le déterminant pour chacune des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 18 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & . & 1 & 1+x \end{pmatrix},$$

où $A_5 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

2/ Montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 24 & 61 & 89 \end{vmatrix}.$$

Exercice n°2 :

Soient les systèmes d'équations suivants :

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 3x + 5y = 19 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}, (2) \begin{cases} x + y - z + u = 1 \\ x + y + z + 2u = 3 \\ x - y + 2z - u = 2 \\ x + y + 2z + 2u = 4 \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de Cramer donner la valeur de z pour le système(1) .
2. Résoudre les systèmes (1) & (2) par la méthode de Gauss.

Série de TD n° 01 "Solution abrégée"

Exercice n° 01 :

1°/ Calcul des déterminants :

$* \det A_1 = 3 - \sqrt{3}$, $* \det A_2 = 8$, $* \det A_3 = -22$

$* \det A_4 = ?$ En enlevant la 1ère ligne à toutes les autres lignes

On trouve $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2)(-2)(-2) = -8$

On a obtenu un déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, où son dét est le produit des elts de sa diagonale

$$\det A_4 = -8$$

$* \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & & & \vdots \\ \vdots & & 1+x & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ \\ L_n \end{matrix}$ tq $A_5 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^*$.

même chose que l'exemple précédent. En enlevant la 1ère ligne à toutes les autres.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

, d'où $\det A_5 = 1 \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{(n-1) \text{ fois}}$

$$\boxed{\det A_5 = x^{n-1}}$$

Exercice n° 02 :

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 3x + 5y = 19 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

1°/ En utilisant la méthode de Cramer, donner la valeur de z pour le système (1).

L'écriture matricielle du système (S_1) est : $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$

(1) est de la forme $AX = b$

On calcule le $\det(A)$, $\det A = 8 \neq 0$

$\Rightarrow$ le système (1) admet une unique solution.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 19 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{8}\left[1\times\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[48 + 26 - 66\right] = \frac{1}{8}(8) \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

On peut calculer de la même manière y et x avec :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 19 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A}$$

2/ Résoudre les systèmes ① et ② par la méthode de Gauss

$$(S)\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 3x + 5y = 19 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$

Comme le $\det(A) = 8 \neq 0$. Alors il existe une unique solution.

On écrit la matrice augmentée :

1^{er} pivot : 1

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

l'idée consiste à transformer la matrice A à une matrice triangulaire supérieure mais en respectant l'algorithme donné en cours.

Etape ① : $L_2 \leftarrow L_2 + \left(\frac{-3}{1}\right)L_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \left(\frac{-1}{1}\right)L_1$ 1^{er} pivot

2^{eme} pivot : -1

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right]$$

Etape ② : Nous éliminons les termes sous diagonaux de la seconde colonne.

$L_3 \leftarrow L_3 + \left(\frac{-(-4)}{-1}\right)L_2$, $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right]$

2^{eme} pivot

Suite Exo 2 :

d'où : $\begin{cases} -8z = -8 \\ -y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{z = 1}$ $\Rightarrow \boxed{y = 2}$ $\Rightarrow \boxed{x = 3}$

(*) Soit le système

$$(2) \begin{cases} x + y - z + u = 1 \\ x + y + z + 2u = 3 \\ x - y + 2z - u = 2 \\ x + y + 2z + 2u = 4 \end{cases}$$

L'écriture matricielle est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX = b$$

On écrit la matrice augmentée :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

1er pivot

1ère étape : les opérations de la 1ère étape sont données par :

$L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$ où $\alpha = \dfrac{-a_{21}}{a_{11}}$, $a_{11} = 1$ est le 1er pivot.

c'est à dire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\Rightarrow A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Le 2ème pivot est nul, donc on permute la 2ème ligne avec la 3ème ligne.
"Pivot partiel" voir le cours

2ème étape :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

-3-

Comme les termes sous diagonaux de la seconde colonne sont nuls, alors on passe à la 3ème étape.

3ème Etape

3ème pivot = 2 , $L_4 \leftarrow L_4 + \left(\frac{-a_{43}}{a_{33}}\right) L_3$ / a_{33} est le pivot.

c'est à dire $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2} L_3$

on obtient
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

La solution du système est donnée par :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u = 0 & \Rightarrow \boxed{u = 0} \\ 2z + u = 2 & \Rightarrow \boxed{z = 1} \\ -2y + 3z - 2u = 1 & \Rightarrow \boxed{y = 1} \\ x + y - z + u = 1 & \Rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$