(Suite Chapitre III)

II/3) Méthode de pénalisation :

Principe : Le principe des méthodes de pénalisation réside dans la transformation du problème avec contraintes en ajoutant à la fonction à optimiser une pénalité, ainsi le problème avec contraintes :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C,\ C \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

sera remplacer par une suite de problème sans contraintes :

$$(P_r)\begin{cases} \min f_r(x) = f(x) + r\,\alpha(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pénalisation des contraintes et $r > 0$.

Le but est de trouver des fonctions α tel que les problèmes (P) et (P_r) soient équivalents (ont les mêmes solutions).

On distingue deux méthodes de pénalités : Méthode de pénalité Intérieur et Extérieur. Elle consiste à rapprocher le minimum à partir de l'intérieur du domaine C, elle consiste a rapproché le minimum à partir de l'extérieur du domaine C respectivement.

3_1 Méthode de pénalité extérieur :

La fonction α de pénalité extérieur est égal à zéro si x est admissible et supérieur à zéro si x ne l'est pas.

α vérifie les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}^n. \\ b)\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha(x) \geq 0. \\ c)\ \alpha(x) = 0 \iff x \in C \end{array}\right\} (*)$$

- Voici un exemple de fonction α pour différents type de contrainte :

Contrainte :	$x \leq 0$	$h_i(x) = 0$	$g(x) \leq 0$
Fonction α	$\|x^+\|^2$	$\|h(x)\|^2$	$\|g(x)^+\|^2$

Le paramètre "r" permet d'amplifier ou de diminuer la valeur de α.
Au départ, On choisit une valeur de "r" pas très elevée, puis augmenter progressivement.
Celui-ci pour s'approche du domaine C, Ainsi la suite $\{r_k\}_{k\geq 0}$ utilisée devrai être : $0 < r_k < r_{k+1}$ avec $r_k \longrightarrow \infty$ qd $k \to \infty$.

Théorème : On suppose que f est coercive et continue.
Soit C un ensemble fermé et non vide.
On suppose que la fonction α vérifie $(*)$ Alors :

- $\forall r > 0$, le problème (P_r) a au moins une solution x.
- La famille $(x_r)_{r>0}$ est bornée.
- Toute sous-suite convergente extraite de (x_r) converge vers une solution du problème (P) lorsque $r \longrightarrow +\infty$.

Exemple :

$$(P)\begin{cases} \min f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.c} \\ h(x,y) = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(P_k)\begin{cases} \min f_k(x,y) = f(x,y) + k\,\alpha(x,y) \\ \qquad\qquad\quad = x^2 + y^2 + k(x+y-1)^2 \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

_ Calculons le $\nabla f_k(x,y)$:

$$\nabla f_k(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2k(x+y-1) \\ 2y + 2k(x+y-1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_k(x,y) = 0 \implies \begin{cases} 2x + 2k(x+y-1) = 0 \quad \dots ① \\ 2y + 2k(x+y-1) = 0 \quad \dots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+k)x + ky - k = 0 \\ (1+k)y + kx - k = 0 \end{cases}$$

$$(1+k)x - (1+k)y + ky - kx = 0$$

$$x + kx - y - ky + ky - kx = 0 \iff \boxed{x = y}$$

On remplace dans ①:

$$2x + 2k(2x - 1) = 0$$

$$x + 2kx - k = 0 \Rightarrow x(1+2k) = k$$

$$\Rightarrow y = x = \frac{k}{1+2k}, \quad k > 0$$

$$\Rightarrow \quad X_k^* = \begin{pmatrix} \frac{k}{2k+1} \\ \frac{k}{2k+1} \end{pmatrix}$$

- Calculons $\nabla^2 f_k(x,y)$:

$$\nabla^2 f_k(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2k & 2k \\ 2k & 2+2k \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 + 2k > 0$ car $k > 0$.

$\Delta_2 = (2+2k)^2 - 4k^2 > 0$, car : $2 + 2k > 2k$

D'où : C'est une matrice symétrique définie positive.

La solution du problème (P) est alors :

$$X^* = \lim_{k \to +\infty} X_k^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Algorithme de la méthode de pénalisation Extérieure :

1_ Initialisation :

$k = $, choix de x^0 et $r_1 > 0$, $\varepsilon > 0$.

2_ Itération k :

Résoudre le sous problème :

$$(P_{r_k}) \begin{cases} \min f(x) + r_k \alpha(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

En prenant x^{k+1} comme point d'initialisation.

3_ Critère d'arrêt :

Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$ Stop.

Sinon $k = k+1$ et choisir $r_{k+1} > r_k$ et retourner à l'étape 2.

3.2_ Méthode de pénalité intérieure :

_ Cette méthode approche l'optimum à partir du domaine des contraintes. Elle s'applique uniquement aux points d'optimums avec contraintes en inégalité.

$$(P') \begin{cases} \min f(x) \\ g_j(x) \leq 0 \,, \forall j = \overline{1,q} \end{cases}$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n \,,\, g_j(x) \leq 0 \,,\, \forall j = \overline{1,q} \}$$

Où f et g_j $(j = \overline{1,q})$ sont des fonctions continues défini de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'intérieur de C est définie par :

$$C_I = \{ x \in \mathbb{R}^n \,,\, g_j(x) < 0 \,,\, \forall j = \overline{1,q} \}$$

On suppose que l'ensemble des contraintes vérifie :

. L'intérieur de C est non vide ($C_I \neq \phi$)

. Tout point de la frontière de C est limite d'une suite de point appartenant à C_I.

Le problème consiste donc à résoudre une suite de problème d'optimisation, sans contrainte à la place du problème initial qui est un point d'optimum, avec contraintes

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases} \iff (P_r)\begin{cases} \min f_r(x) = f(x) + r\,\beta(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

La fonction de pénalité "β" appelée aussi une fonction "barrière" vérifie:

. $\beta \geqslant 0$, $\forall x \in C_I$

. $\beta(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \xrightarrow[\text{se rapproche}]{} $ frontière de C

Les fonctions de pénalité les plus utilisées sont:

$$\beta_1(x) = -\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{g_j}$$

Ou

$$\beta_2(x) = -\sum_{j=1}^{q} \ln\left(-g_j(x)\right)$$

Remarque:
- Si les fonctions g_j sont convexes, alors les fonctions β_1 et β_2 sont aussi convexes.

- Le paramètre r est choisit de façon à que la suite $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie:

$$0 < r_{k+1} < r_k \text{ et } r_k \longrightarrow 0 \text{ qd } k \longrightarrow \infty.$$

Théorème:
On suppose que f est continue et coercive, et soit C un ensemble fermé et borné ayant un intérieur non vide et que tout élément de la frontière de C est limite d'une suite appartenant à C_I.

Soit $\beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de pénalisation intérieur vérifiant:

. $\beta(x) \geqslant 0$, $\forall x \in C_I$

- $\beta(x) \longrightarrow +\infty$ qd $x \longrightarrow$ frontière de C
- $\beta(x)$ est une fonction continue sur C_I.

Alors, lorsque le coefficient de pénalité r tend vers zéro :

- La suite $(x_r)_{r>0}$ admet au moins un point d'accumulation est une solution du problème (P').
- La quantité $r\beta(x_r) \longrightarrow 0$.

Remarque :

1/ L'algorithme de cette méthode est analogue à celui de la méthode de pénalité extérieur sauf l'étape 3, on choisit : $r_{k+1} < r_k$.

2/ Pour appliquer cette méthode, il faut choisir un point initial x^0 à l'intérieur de C.

3/ Cette méthode fourni une valeur approchée de l'optimum, dans le cas ou l'algorithme s'arrête au bout d'un certain nombre d'itération.