Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence

13 Mars 2021

Examen d'Analyse 1

Durée : 1 h 30

Exercice N°1 (7 points.)

I) Soit l'ensemble $A = \left\{ \frac{n+2}{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}$.

(a) Déterminer sup A et inf A.

(b) max A et min A existent-ils ?

(c) Pour un entier naturel, on pose :

$$B = \left\{ \frac{n+2}{n-1} + \frac{1}{4},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}, \text{ donner sup } B \text{ et inf } B.$$

II) Pour tout couple (a,b) de nombres réels positifs, montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Exercice N°2 (7 points.)

I) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n < 3$.

(b) Montrer que $(U_n)_n$ converge et trouver sa limite.

II) Soit la suite $(V_n)_n$ définie par :

$$V_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{n^2}{4^n}$$

Montrer que $(V_n)_n$ est de Cauchy. (Montrer d'abord que $4^n > n^4,\ \forall n \geq 5$).

Exercice N°3 (6 points.)

I) En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1$.

II) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ \sin \frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f' n'est pas continue en 0.

 Dr L. HARFOUCHE & Dr L. ALKAMA