Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence

Année universitaire 2020/2021

Corrigé de l'interrogation d'analyse 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ 7\ U_{n+1} = U_n^3 + 6, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. ***Décomposer $x^3 - 7x + 6$ en éléments simples sachant que 1 est une de ses racines.*** [2 point]

   $x = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 7x + 6$, alors

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 =& (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ =& ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

   Par identification avec $x^3 - 7x + 6$, on trouve

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = -7 \\ -c = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases}$$

   Donc $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$.
   Décomposition de $x^2 + x - 6$ en éléments simples :

$$x^2 + x - 6 = 0 \implies x_1 = 2 \quad et \quad x_2 = -3$$

   Par conséquent

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= (x-1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

2. On pose $a = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^3 + 6}{7}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) ***Montrer que :*** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n < 1$**.**

Démonstration par récurrence :

- La proposition est vraie pour $n = 0$. En effet, on a $0 < U_0 = \dfrac{1}{2} < 1$. [0.5 point]
- On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 1$ et on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_{n+1} < 1$.

  $$0 < U_n < 1 \implies 0 < U_n^3 < 1 \implies 6 < U_n^3 + 6 < 7 \implies \frac{6}{7} < \frac{U_n^3 + 6}{7} < 1 \implies \frac{6}{7} < U_{n+1} < 1.$$

  Et comme $\dfrac{6}{7} > 0$, donc $0 < \dfrac{6}{7} < U_{n+1} < 1 \Longrightarrow 0 < U_{n+1} < 1$.
  Alors la proposition est vraie pour $n + 1$. [1 point]

Conclusion : $0 < U_n < 1$. [1 point]

(b) ***Montrer que $(U_n)_n$ est croissante.*** [1 point]

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^3 + 6}{7} - U_n = \frac{U_n^3 + 6 - 7U_n}{7} = \frac{(U_n - 1)(U_n^2 + U_n - 6)}{7}$$

Pour $0 < U_n < 1$:

$$\left.\begin{array}{ll} U_n - 1 & < 0 \\ U_n^2 + U_n - 6 = (U_n - 2)\ (U_n + 3) & < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$

Par conséquent, (U_n) est croissante.

(c) ***Trouver sa limite.***

Pour que la limite existe et soit finie, il faut que (U_n) soit convergente.

Convergence de (U_n) : (U_n) est convergente si et seulement si (U_n) est croissante et majorée.

D'après la question précédente (U_n) est croissante.
Puisque $U_n < 1$, alors la suite est majorée par 1. [0.5 point]
(U_n) est croissante et majorée donc elle est convergente. [0.5 point]

Limite de (U_n) : [1 point]

Puisque la suite (U_n) est convergente alors sa limite existe et est finie. On note l sa limite, où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \in [0, 1]$.

$$l = \frac{l^3 + 6}{7} \implies l^3 - 7l + 6 = (l - 1)(l - 2)(l + 3) = 0 \implies l_1 = 1,\quad l_2 = 2 \quad et \quad l_3 = -3$$

On a $l_1 = 1 \in [0, 1]$, $l_2 = 2 \notin [0, 1]$ et $l_3 = -3 \notin [0, 1]$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.