

Corrigé de l'examen d'analyse 1

Exercice N°1 (7 points)

I) $A = \left\{ \frac{n+2}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\} = \left\{ 4, \frac{5}{2}, 2, \dots, 1 \right\} =]1, 4].$ [1 point]

(a) Détermination de sup A et inf A :

— L'ensemble des majorants de A est $[4, +\infty[$.

— L'ensemble des minorants de A est $] - \infty, 1]$.

— Le plus petit des majorants est 4, donc $\sup A = 4.$ [1 point]

— Le plus grand des minorants est 1, donc $\inf A = 1.$ [1 point]

(b) max A et min A existent-ils ?

— $\max A = 4$ car $\sup A = 4 \in]1, 4].$ [0.5 point]

— $\min A$ n'existe pas car $\inf A = 1 \notin]1, 4].$ [0.5 point]

(c) Pour un entier naturel, on pose :

$$B = \left\{ \frac{n+2}{n-1} + \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

L'ensemble B dépend de l'ensemble A où

— $\sup B = \sup A + \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$ [0.5 point]

— $\inf B = \inf A + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$ [0.5 point]

II) Pour tout couple (a,b) de nombres réels positifs, montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$ [2 points]

On a

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\implies a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\implies a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$\implies (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\implies \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\implies \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} \geq \sqrt{ab}$$

Alors

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Exercice N°2 (7 points)

I) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$.

Démonstration par récurrence :

— La supposition est vraie pour $n = 0$. En effet, $0 \leq U_0 = 0 < 3$. [0.5 point]

— On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 3$ et on montre que $0 \leq U_{n+1} < 3$: [0.5 point]

$$0 \leq U_n < 3 \implies 6 \leq U_n + 6 < 9 \implies \sqrt{6} \leq \sqrt{U_n + 6} < 3 \implies \sqrt{6} \leq U_{n+1} < 3$$

Et comme $\sqrt{6} > 0$, donc $0 \leq U_{n+1} < 3$.

Conclusion : $0 \leq U_n < 3$. [0.5 point]

(b) Montrer que $(U_n)_n$ converge et trouver sa limite.

— Convergence de (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 6} - U_n = \left(\sqrt{U_n + 6} - U_n \right) \frac{(\sqrt{U_n + 6} + U_n)}{(\sqrt{U_n + 6} + U_n)} = \frac{(U_n + 6 - U_n^2)}{(\sqrt{U_n + 6} + U_n)}$$

Le signe de $U_{n+1} - U_n$:

- Le dénominateur : $(\sqrt{U_n + 6} + U_n) > 0$

- Le numérateur :

$$U_n + 6 - U_n^2 = 0 \implies u = 3 \text{ et } u' = -2$$

$$U_n + 6 - U_n^2 = -(U_n - 3)(U_n + 2) > 0 \text{ pour } 0 \leq U_n < 3$$

$U_{n+1} - U_n > 0$, donc (U_n) est croissante. [1 point]

(U_n) est majorée par 3 car $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 3$. [0.5 point]

Puisque (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente. [0.5 point]

— Limite de (U_n) : [1 point]

Puisque la suite (U_n) est convergente alors sa limite existe et est finie. On note l sa limite, où $l \in [0, 3]$.

$$l = \sqrt{l + 6} \implies l^2 = l + 6 \implies -l^2 + l + 6 = 0 \implies l = 3 \text{ et } l = -2.$$

On a $l = 3 \in [0, 3]$ mais $l = -2 \notin [0, 3]$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l = 3$.

II) Soit la suite $(V_n)_n$ définie par :

$$V_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{n^2}{4^n}$$

Montrer que $4^n > n^4, \forall n \geq 5$: [0.5 point]

On a : $\forall n \geq 5$

$$\begin{aligned}4^n &> n^4 \\ \implies (2^2)^n &> (n^2)^2 \\ \implies (2^n)^2 &> (n^2)^2 \\ \implies 2^n &> n^2\end{aligned}$$

Démonstration par récurrence :

- La proposition est vraie pour $n = 5$. En effet, $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

- On suppose que pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$ et on montre que $2^{n+1} > (n+1)^2$:

$$2^n > n^2 \implies 2^{n+1} > 2n^2$$

La proposition est vraie pour $(n+1)$ si $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}2n^2 &> (n+1)^2 \\ 2n^2 - (n+1)^2 &> 0 \\ n^2 - 2n - 1 &> 0\end{aligned}$$

Pour $n \geq 5$, $n^2 - 2n - 1 > 0 \implies 2n^2 > (n+1)^2 \implies 2^{n+1} > (n+1)^2$.
La proposition est vrai pour $(n+1)$.

Conclusion : $2^n > n^2 \implies 4^n > n^4, \forall n \geq 5$.

Montrer que $(V_n)_n$ est de Cauchy, sachant que $4^n > n^4, \forall n \geq 5$:

[2 points]

Par définition d'une suite de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, p > n_0, q > n_0$ tel que : $|V_{p+q} - V_p| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}|V_{p+q} - V_p| &= \left| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{p^2}{4^p} + \dots + \frac{(p+q)^2}{4^{p+q}} \right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{p^2}{4^p} \right) \right| \\ &= \left| \frac{(p+1)^2}{4^{p+1}} + \frac{(p+2)^2}{4^{p+2}} + \dots + \frac{(p+q)^2}{4^{p+q}} \right| \\ &= \sum_{k=1}^q \frac{(p+k)^2}{4^{p+k}}\end{aligned}$$

Comme on a $4^{p+k} > (p+k)^4 \implies \frac{(p+k)^2}{4^{p+k}} < \frac{(p+k)^2}{(p+k)^4}$.

Alors

$$\begin{aligned}|V_{p+q} - V_p| &= \sum_{k=1}^q \frac{(p+k)^2}{4^{p+k}} \\ &< \sum_{k=1}^q \frac{(p+k)^2}{(p+k)^4} \\ &< \sum_{k=1}^q \frac{1}{(p+k)^2}\end{aligned}$$

On a $(p+k)^2 > (p+k)(p+k-1) \implies \frac{1}{(p+k)^2} < \frac{1}{(p+k)(p+k-1)}$.

Alors

$$\begin{aligned} |V_{p+q} - V_p| &< \sum_{k=1}^q \frac{1}{(p+k)^2} \\ &< \sum_{k=1}^q \frac{1}{(p+k)(p+k-1)} \\ &< \frac{1}{(p+1)p} + \frac{1}{(p+2)(p+1)} + \dots + \frac{1}{(p+q)(p+q-1)} \\ &< \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} + \dots + \frac{1}{p+q-1} - \frac{1}{(p+q)} \\ &< \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+q)} \\ &< \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{p}$ converge vers 0 quand $n \mapsto \infty$ (sachant que $p > n$), alors $\forall \varepsilon > 0$, $\left| \frac{1}{p} - 0 \right| = \frac{1}{p} < \varepsilon$.

Par conséquent, $|V_{p+q} - V_p| < \varepsilon \implies$ la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice N°3 (6 points)

I) En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$. [2 points]

D'après la définition de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

on a $\left| (2x - 3) - (-1) \right| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \implies |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, si on choisit $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$|x - 1| < \eta \implies \left| (2x - 3) - (-1) \right| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$

II) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} . [2 points]

— Dérivabilité sur \mathbb{R}^* : f est dérivable sur \mathbb{R}^* car c'est le produit de deux fonctions $x \mapsto x^2$ (polynôme) et $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ (composée des deux fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$) dérivables sur \mathbb{R}^* .

— Dérivabilité au point 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

On a

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \\ \implies -x &\leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0} (-x) &\leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} (x) \\ \implies 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq 0 \end{aligned}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Donc, f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 0$

Par conséquent, f est dérivable sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que f' n'est pas continue en 0.

[2 points]

$$f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} (2x^2) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$.

On a $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \implies -1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \leq 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas, alors f' n'est pas continue au point 0.