Série de TD n°1 de Statistique 3 et son corrigé

Exercice1 :

Une population E est composée de 6 éléments $E = \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}$.

1. Calculer la moyenne μ et l'écart-type σ de cette population.
2. Ecrire tous les échantillons de taille 2 qui peuvent être extraits de façon non exhaustive.
3. Calculer les moyennes $\bar{x}_i$et les écarts-types s_i de tous ces échantillons.
4. Calculer la moyenne m et l'écart-type s de $\bar{X}$ où $\bar{X}$ décrit la distribution de l'échantillon des moyennes.
5. Comparer μ et m d'une part et $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ et s de l'autre part.
6. Ecrire tous les échantillons de taille 2 qui peuvent être extraits de façon exhaustive.
7. Calculer les moyennes x_i et les écarts-types s_i de tous ces échantillons.
8. Calculer la moyenne m et l'écart-type s de $\bar{X}$ où $\bar{X}$ décrit la distribution de l'échantillon des moyennes.
9. Comparer μ et m d'une part et $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ et s de l'autre part.

Corrigé de l'exercice 1 :

1. La moyenne de la population μ :

$$\mu = \frac{0+1+2+4+5+6}{6} = 3$$

La variance de la population σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\ (0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 3^2 = \frac{82}{6} - 9 = \frac{28}{6}$$

D'où :

$$\sigma = \sqrt{\frac{28}{6}}$$

2. Tous les échantillons possibles de taille 2 extraits de façon non exhaustive (avec remise) est 6^2=36.

{(0.0) ;(0.1) ; (0.2) ; (0.4) ; (0.5) ; (0.6), (1.0) ;(1.1) ; (1.2) ; (1.4) ; (1.5) ; (1.6) ; (2.0) ; (2.1) ; (2.2) ; (2.4) ; (2.5) ; (2.6) ; (4.0) ; (4.1) ; (4.2) ; (4.4), (4.5) ; (4.6) ; (5.0) ; (5.1) ; (5.2) ; (5.4) ; (5.5) ; (5.6) ; (6.0) ; (6.1) ; (6.2) ; (6.4) ; (6.5) ; (6.6)}

3. La moyenne x_i de tous les échantillons (La distribution d'échantillonnage de moyenne) :

$\bar{x}_i$={0 ;$\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; $\frac{5}{2}$; 3 ; $\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; 3 ; $\frac{7}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$; 2 ; 3 ; $\frac{7}{2}$; 4 ;2 ; $\frac{5}{2}$; 3 ; 4 ; $\frac{9}{2}$; 5 ; $\frac{5}{2}$; 3 ; $\frac{7}{2}$; $\frac{9}{2}$;

$$5\ ;\ \frac{11}{2}\ ;\ 3\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ \frac{11}{2}\ ;\ 6\}$$

4. La moyenne de la distribution d'échantillonnage de moyenne $m_{\bar{x}}$:

$$m_{\bar{x}} = \frac{0+\frac{1}{2}+1+2+\frac{5}{2}+3+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+1+\frac{3}{2}+2+3+\frac{7}{2}+4+2+\frac{5}{2}+3+4+\frac{9}{2}+5+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+5+\frac{11}{2}+3+\frac{7}{2}+4+5+\frac{11}{2}+6}{36}$$

$$=\frac{60+\frac{96}{2}}{36} = 3$$

La variance de la distribution d'échantillonnage de moyenne S^2 :

$$S^2 = \frac{1}{36}\sum_1^{36} \bar{x}_i{}^2 - m_{\bar{x}}{}^2$$

$$= \frac{1}{36}\left(0+\frac{1}{2}^2+1^2+2^2+\frac{5}{2}^2+3^2+\frac{1}{2}^2+1+\frac{3}{2}^2+\frac{5}{2}^2+3^2+\frac{7}{2}^2+1+\frac{3}{2}^2+\ldots\ldots+\frac{11}{2}^2+6^2\right)-3^2$$

$$=\frac{228+\frac{720}{4}}{36}-9=\frac{408}{36}-9=\frac{408-324}{36}=\frac{84}{36}=\frac{7}{3}$$

D'où :

$$s = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

5. On constate que :

$$\mu = m_{\bar{x}} = 3$$

Et

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{28}{6}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{28}{12}}\ \sqrt{\frac{7}{3}} = \text{s}$$

6. Tous les échantillons possibles de taille 2 extraits de façon exhaustive (sans remise) est C_6^2=15.

{(0.1) ;(0.2) ; (0.4) ; (0.5) ; (0.6) ; (1.2) ; (1.4) ; (1.5) ; (1.6) ; (2.4) ; (2.5) ; (2.6) ; (4.5) ; (4.6) ; (5.6)}

7. La moyenne x_i de tous les échantillons (La distribution d'échantillonnage de moyenne) :

$$\bar{x}_i=\{\frac{1}{2}\ ;\ 1,\ 2\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 3\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 3\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ 3\ ;\ \frac{7}{2}\ ;\ 4\ ;\ \frac{9}{2}\ ;\ 5\ ;\ \frac{11}{2}\}$$

8. La moyenne de la distribution d'échantillonnage de moyenne $m_{\bar{x}}$:

$$m_{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}+1+2+\frac{5}{2}+3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}+3+\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}+5+\frac{11}{2}}{15} = \frac{21+\frac{48}{2}}{15} = \frac{21+24}{15} = 3$$

La variance de la distribution d'échantillonnage de moyenne S^2 :

$$S^2 = \frac{1}{15}\sum_1^{15} \bar{x}_i{}^2 - m_{\bar{x}}{}^2$$

$$=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2}^2+1+4+\frac{5}{2}^2+9+\frac{3}{2}^2+\frac{5}{2}^2+9+\frac{7}{2}^2+9+\frac{7}{2}^2+16+\frac{9}{2}^2+25+\frac{11}{2}^2\right)-9$$

$$=\frac{1}{15}\left(73+\frac{360}{4}\right)-9=\frac{90+73}{15}-9=\frac{28}{15}$$

D'où

$$s = \sqrt{\frac{28}{15}}$$

On constate que :

$$\mu = m_{\bar{x}} = 3$$

Et

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{\frac{28}{6}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{6-2}{6-1}} = \sqrt{\frac{28}{12}}\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{28.4}{12.5}} = \sqrt{\frac{28}{15}} = s$$

Exercice 2 :

Après la correction d'une épreuve comportant un grand nombre de candidats, on constate que les notes ont pour moyenne 12 et pour écart-type 3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire et non exhaustif de taille 100, associe la moyenne des notes de cet échantillon.

1. Quelle loi supposée , X suit-elle ?

2. On se propose de prélever un échantillon aléatoire non exhaustif de 100 notes. Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne d'un tel échantillon :

a. Supérieure à 12.5.

b. Comprise entre 12.5 et 12.9.

Corrigé de l'exercice 2 :

1. On a :

La population : des candidats

La variable aléatoire : les notes des candidats

La moyenne de la population :$\mu = 12$

L'écart type de la population : $\sigma = 3$

La taille de l'échantillon : $n = 100$ >30 (exhaustif et le même que le non exhaustif)

Type du tirage : non exhaustif et c'est le même que le tirage exhaustif car la taille de l'échantillon n=100 > 30.

La variable aléatoire suit la loi normale : $X \backsim N(12{,}3)$

2. Soit $\bar{X}$ la moyenne de l'échantillon :

$$\bar{X} \backsim N\left(12 = \mu, \frac{3}{\sqrt{100}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc :

$$Z = \frac{\bar{X} - 12}{\frac{3}{10}} \sim N(0,1)$$

$$P(\bar{X} \leq 12.5) = P\left(\frac{\bar{X} - 12}{\frac{3}{10}} \leq \frac{12.5 - 12}{\frac{3}{10}}\right) = P(Z \leq 1.66) = 0.9515$$

$$P(12.5 \leq \bar{X} \leq 12.9) = P(\bar{X} \leq 12.9) - P(\bar{X} \leq 12.5)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 12}{\frac{3}{10}} \leq \frac{12.9 - 12}{\frac{3}{10}}\right) - 0.9515 = P(Z \leq 3) - 0.9515$$

$$= 0.9987 - 0.9515 = 0.0472$$

Exercice 3 :

Dans une population, on constate qu'ils naissent 52% de garçons et 48% de filles. On Note p le pourcentage des garçons de cette population. Si F est la variable aléatoire qui, à toute échantillon de taille 400 prélevé au hasard et avec remise dans cette population, associe le pourcentage de garçons dans cet échantillon.

1. Donner la loi supposée de F.
2. On se propose de prélever un échantillon au hasard et avec remise de 400

Nouveau-nés. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, Un pourcentage de garçons compris entre 50% et 54 %.

Corrigé de l'exercice 3 :

Le pourcentage de garçons dans la population : $p = 0.52$

Taille de l'échantillon : $n = 400$

1. La variable aléatoire F qui associe le pourcentage de garçons dans l'échantillon :

$$F \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) = N(0.52{,}0.000624)$$

2. La probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, Un pourcentage de garçons compris entre 50% et 54 % :

$$P(0.50 \leq F \leq 0.54) = P(F \leq 0.54) - P(F \leq 0.5)$$

$$= P\left(\frac{F - 0.52}{0.000624} \leq \frac{0.54 - 0.52}{0.000624}\right) - P\left(\frac{F - 0.52}{0.000624} \leq \frac{0.50 - 0.52}{0.000624}\right)$$

$$= P\left(\frac{F - 0.52}{0.000624} \leq 32.05\right) - P\left(\frac{F - 0.52}{0.000624} \leq -32.05\right)$$

$$= P(Z \leq 32.05) - P(Z \leq 32.05)\text{=1-0=1}$$