Exo 10 :

On s'intéresse à la distance du pb $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par rapport au domaine C définie par

$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = b\}$

A matrice de type $p \times n$ inversible

n≠p n'est pas inversible car n'est pas carrée.

Ce pb se pose sous la forme suivante

$$(P10) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \\ Ax = b \quad b \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

1) Mq pb vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} (x^* - x_0) + A^t \lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases}$$

Soit x^* la sol du Pb (P10)

avec λ^* le multiplicateur de Lagrange

$\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*) \in \mathbb{R}^p$

$h_1(X) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b$

$\nabla h_1(X) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$

x^*, λ^* vérifiant les conditions de K.K.T :

$$\begin{cases} \lambda^* \in \mathbb{R}^p \\ x^* \text{ réalisable } Ax^* = b \\ \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* = 0 \end{cases}$$

$\nabla f(x^*) = x^* - x_0 \; ; \; \nabla h(x^*) = A^t$

D'où on obtient

$x^* + A^t\lambda^* = x_0$

$Ax^* = b$

$$\begin{cases} (x^* - x_0) + A^t\lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases}$$

$I_n x + A^t\lambda = x_0$

$Ax = b$

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^t \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_0 \\ \hline b \end{array}\right]$$

On a
$$\begin{cases} (x^* - x_0) + A^t\lambda^* = 0 \\ Ax^* = b \end{cases}$$

En multipliant (1) par A, on aura

$$A\left((x^* - x_0) + A^t \cdot \lambda^*\right) = 0 .$$

$$A(x^* - x_0) + AA^t\lambda^* = 0 .$$

$$Ax^* - Ax_0 + AA^t\lambda^* = 0 .$$

De (2) on obtient

$$b - Ax_0 + AA^t\lambda^* = 0 .$$

$$\lambda^* = (AA^t)^{-1}(-b + Ax_0) .$$

$$x^* - x_0 + A^t (AA^t)^{-1}(Ax_0 - b) = 0$$

$$x^* = x_0 - A^t (AA^t)^{-1}(Ax_0 - b) .$$

Exo 4 :