2| Exo 3 Série 1 :

On a : $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{6} y^3$

- points critiques :

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + \frac{1}{2} y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$$

$$\Rightarrow x - 2x^2 = 0$$

$$x(1 - 2x) = 0$$

On trouve que les points critiques sont : $x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$; $y = 0 \vee y = 1$

$(0,0)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$.

- La matrice hessienne : (N-B : je me suis trompé dans le signe au lieu de + j'ai mis −)

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0,0)$: la nature de la matrice hessienne pour $y = 0$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Calculons les valeurs propres de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$$

Alors les valeurs propres de A sont de signe différents

Donc la matrice hessienne ni n'est définie positive ni définie négative.

D'où : le point $(0,0)$ ni n'est un minimum ni un maximum.

3) La question 3 :

Je pense que vous parlez de l'exo 5 série 1 et non pas série 2.

$(-1,-1)$ est un maximum car : la matrice hessienne au point $(-1,-1)$ $[\nabla^2 f(-1,-1)]$ est définie positive].

1) Pour votre 1ère question :

- Si on trouve que la matrice hessienne en x^* $(\nabla^2 f(x^*))$ est définie négative ou semi définie négative, alors le point x^* est un minimum.

- Si on trouve que la matrice hessienne en x^* $(\nabla^2 f(x^*))$ est définie positive ou semi définie positive, alors le point x^* est un maximum.

- Une fonction f est dite coercive si $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ (c'est la définition d'une fonction coercive).

Mais dans l'application, pour montrer qu'une fonction est coercive, il suffit d'écrire f sous la forme :

$$\frac{1}{2} x^t A x - b^t x + c \quad , \text{ tq:}$$

$\boxed{A}$ soit une matrice symétrique définie positive

et : b un vecteur colonne.

c : une constante.

N.B : Le fait que $\boxed{A}$ soit une matrice symétrique définie positive, c'est ce qui permet de dire que la fonction f est coercive.

(Suite qst 2)

- Pour le point $(-\frac{1}{2}, 1)$

Pour $y = 1$

$$\nabla^2 f(\frac{1}{2}, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Calculons les valeurs propres de B

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\boxed{\Delta = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1 > 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2 > 0 \end{array}\right\}$$ Alors : les valeurs propres de B sont strictement positive

Donc : La matrice Hessienne B est définie positive.

D'où. Le point $(-\frac{1}{2}, 1)$ est un maximum.

4/ Pour la question 4 : méthode de Newton :

Oui bien sûr. On peut appliquer la méthode de Newton avant, mais il faut d'abord vérifier s'il est possible de l'appliquer.
(Puis tous dépend de l'exercice, y a différentes façon de poser la question).