Université de Béjaia
Département de RO
2^e Ann. Lic. PN
Ann. Aca. : 19/20
Durée : 1 h 30

19 novembre 2020

Examen de Géométrie

Exercice 1. (12pts)
Soient $A(1,-1,2)$, $B(2,0,1)$ et $C(-2,1,1)$ trois points dans l'espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit G le barycentre des points pondérés

$$\{(A,2),(B,-1),(C,3)\}.$$

1,5 1. Déterminer les coodronnées de G.

1,5 2. Soit I est le milieu de $[A,B]$. Déterminer I.

1,5 3. Trouver le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.

1,5 4. Pour un point quelconque M, nous avons $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MG}$. Déterminer α.

1,5 5. Donner une représentation paramétrique de la droite affine $D(A,\overrightarrow{AC})$.

1,5 6. Donner une représentation paramétrique du plan affine $P(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

1,5 7. Ecrire une équation cartésienne du plan affine $P(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

1,5 8. Donner $\overrightarrow{D(A,\overrightarrow{AC})}$ et $\overrightarrow{P(B,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$.

Exercice 2. (08pts)
Soient D la droite d'équation cartésienne $2x - y = 2$ dans l'espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $\vec{v}$ le vecteur donné par $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Donner l'expression en coordonnées des applications affines suivantes :

2 1. La symétrie centrale de centre $I(1,-1)$;

2 2. La projection sur D dans la direction $\vec{v}$;

2 3. L'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport 2.

2 4. Déterminer $\vec{f}$.

Corrigé de l'examen de Géométrie

19/11/2020

Exo 1 ① Nous avons $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Alors $2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG})=\vec{0}$

$\Rightarrow (-2+1-3)\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG}\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{G\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right).}$ 1,5

② I est le milieu de $[A,B]$.

Alors $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{3}{2}\\ y_I=\frac{1}{2}(y_A+y_B)=-\frac{1}{2}\\ z_I=\frac{1}{2}(z_A+z_B)=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Donc $\boxed{I\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).}$ 1,5

③ $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=-3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-3x_A+3x_B+x_C=1\\ y_D=-3y_A+3y_B+y_C=4\\ z_D=-3z_A+3z_B+z_C=-2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \boxed{D(1,4,-2).}$ 1,5

④ Nous avons $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$

$=4\overrightarrow{MG}+(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC})$

$=4\overrightarrow{MG}$.

Donc $\boxed{\alpha=4}$ 1,5

⑤ Soit $Q(x,y,z)$.

Alors $Q \in D(A,\vec{AC}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \vec{AQ} = \alpha \vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \begin{cases} x-1 = -3\alpha \\ y+1 = 2\alpha \\ z-2 = -\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -3\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - 1 \\ z = -\alpha + 2 \end{cases}$$ 1,5

⑥ Soit $Q(x,y,z)$.

Alors $Q \in P(B,\vec{AB},\vec{AC}) \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \ \vec{BQ} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha - 3\beta + 2 \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = -\alpha - \beta + 1 \end{cases}$$ 1,5

⑦ $Q \in P(B,\vec{AB},\vec{AC}) \Leftrightarrow \vec{BQ}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont liés

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow x + 4y + 5z - 7 = 0.$ 1,5

⑧ $\overrightarrow{D(A,\vec{AC})} = \mathrm{Vect}(\vec{AC})$ 0,75

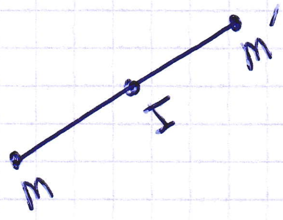
$\vec{P}(B,\vec{AB},\vec{AC}) = \mathrm{Vect}(\vec{AB},\vec{AC})$ 0,75

Exo 2

① La symétrie centrale de centre $I(1,-1)$.

On note cette symétrie par s.

Pour un point m, soit $s(m) = m'$.

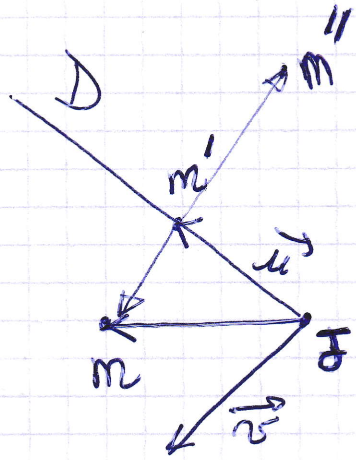


Alors $\vec{Im'} = -\vec{Im}$

Soit $m(x,y)$ et $m'(x',y')$.

Alors $\vec{Im'} = -\vec{Im} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y-2 \end{cases}$ 2

② La projection sur D dans la direction $\vec{v}$:



$$\varphi(x,y) \in D \Leftrightarrow 2x - y = 2$$
$$\Leftrightarrow y = 2x - 2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 2 \end{cases}, \text{ pour quelque } \lambda \in \mathbb{R};$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{"} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $J(0,-2)$ et $\vec{u}(1,2)$.

Alors $D = D(J, \vec{u})$.

Soit $M'(x', y')$ la projection de $M(x,y)$ sur D dans la direction $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JM'} + \beta \vec{v}$$
$$= \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \ldots \Delta$$

$$\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - \beta & \ldots ① \\ y + 2 = 2\alpha + 2\beta & \ldots ② \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\alpha - 2\beta & \ldots ③ \\ y + 2 = 2\alpha + 2\beta & ④ \end{cases}$$

$③ + ④$: $4\alpha = 2x + y + 2$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \quad \ldots ⑤$$

$④ - ③$: $4\beta = -2x + y + 2$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \quad \ldots ⑥$$

$$\overrightarrow{JM'} = \alpha \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \\ y' + 2 = x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2}y - 1. \end{cases} \quad g_1$$

(3) $\overrightarrow{m'm''} = 2\,\overrightarrow{m'm} \Leftrightarrow \overrightarrow{Jm''} - \overrightarrow{Jm'} = 2\left(\overrightarrow{Jm} - \overrightarrow{Jm'}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{Jm''} = 2\overrightarrow{Jm} - \overrightarrow{Jm'}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y''+2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}y + 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}, \\ y'' = -x + \frac{3}{2}y + 1. \end{cases}$ 2

$m''(x'', y'')$ est l'image de $m(x, y)$ par l'affinité f.

(4) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{f}$ est donnée par la matrice $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/4 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}$.

2