Université de Béjaia — 27 juin 2021

Département de RO

Niveau : Licence 2 PN

Année académique : 20/21

Durée : 1 h 30

Examen de géométrie affine et euclidienne

Exercice 1. (12 pts)

Soient $A(-1,1,0)$, $B(-1,0,-2)$ et $C(0,2,1)$ trois points dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit G_α le barycentre des points pondérés

$$\{(A,3),(B,-2),(C,2\alpha+1)\},$$

où α est un paramètre réel différent de -1.

1 1. Déterminer J le milieu de $[A,B]$.

2 2. Calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle$, $\|\overrightarrow{AB}\|$.

2 3. Déterminer les coordonnées de G_0 et de G_1.

1 4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2$.

1,5 5. Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

1,5 6. Déterminer l'intersection du plan d'équation $2x-y+z=3$ et de la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

1,5 7. Déterminer la projection orthogonale du point C sur la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

1,5 8. Calculer la distance du point C à la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

Exercice 2. (08 pts)

Soient D la droite d'équation cartésienne $x+y=-1$ dans l'espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $\vec{v}$ le vecteur donné par $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$.

1,5 1. Donner l'expression en coordonnées de la translation T de vecteur $\vec{v}$.

1 2. Déterminer l'image du point $M(1,-2)$ par T.

2 3. Donner l'expression en coordonnées de la projection sur D dans la direction $\vec{v}$.

2 4. Donner l'expression en coordonnées de l'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport -2.

1,5 5. Déterminer $\vec{f}$.

Corrigé de l'examen de géométrie

27/06/2021

Exercice 1

① J est le milieu de $[A,B]$.

Alors $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = -1 \\ y_J = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2} \\ z_J = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = -1. \end{cases}$$

Donc $\boxed{J\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)}$. 1

② Nous avons $\overrightarrow{AB}(0,-1,-2)$, $\overrightarrow{BC}(1,2,3)$.

Alors $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = (0 \times 1) + ((-1) \times 2) + ((-2) \times 3)$

$= -8.$ 1

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{5}.$ 1

③ Nous avons $3\overrightarrow{G_\alpha A} - 2\overrightarrow{G_\alpha B} + (2\alpha+1)\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0}$.

$\Rightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG_\alpha}) - 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG_\alpha}) + (2\alpha+1)(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG_\alpha}) = \vec{0}$

$\Rightarrow -(3 - 2 + (2\alpha+1))\overrightarrow{OG_\alpha} + 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + (2\alpha+1)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Rightarrow (2\alpha+2)\overrightarrow{OG_\alpha} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + (2\alpha+1)\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_\alpha} = \frac{1}{2\alpha+2}\left(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + (2\alpha+2)\overrightarrow{OC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_\alpha}\left(\frac{-1}{2\alpha+2}, \frac{4\alpha+5}{2\alpha+2}, \frac{2\alpha+5}{2\alpha+2}\right)$

$\Rightarrow G_\alpha\left(\frac{-1}{2\alpha+2}, \frac{4\alpha+5}{2\alpha+2}, \frac{2\alpha+5}{2\alpha+2}\right)$.

Alors $G_0\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (remplacer $\alpha = 0$), 1

$G_1\left(\frac{-1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right)$ (remplacer $\alpha = 1$). 1

④ Pour $\alpha = 0$, nous avons $3\overrightarrow{G_0A} - 2\overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} = \overrightarrow{0}$ .... ⊛

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MG_0} + \overrightarrow{G_0A}) - 2(\overrightarrow{MG_0} + \overrightarrow{G_0B}) + (\overrightarrow{MG_0} + \overrightarrow{G_0C})$$
$$= 2\overrightarrow{MG_0} + (3\overrightarrow{G_0A} - 2\overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C})$$
$$= 2\overrightarrow{MG_0} \quad \text{.... par ⊛.}$$

Alors $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_0}\| = 2$

$\Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MG_0}\| = 2$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{G_0M}\| = 1.$

Si $M(x, y, z)$, alors $\|\overrightarrow{G_0M}\| = 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$

L'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2$ est la sphère de centre $G_0\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ et de rayon 1, i.e. c'est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que 1

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = 1.$$

⑤ Soit $M(x, y, z)$.

Alors $M \in D(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 1 = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = -2\lambda. \end{cases}$$ car $\overrightarrow{AB}(0, -1, -2)$ 1,5

⑥ Soit P le plan d'équation $2x - y + z = 3$.

Alors $K(x, y, z) \in P \cap D(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow 2x - y + z = 3$ .... Ⓐ

et

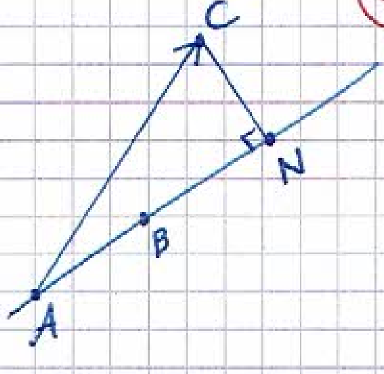
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 \text{ .... ①} \\ y = -\lambda + 1 \text{ .... ②} \\ z = -2\lambda \text{ .... ③} \end{cases}$$

On remplace ①, ② et ③ dans Ⓐ, et on aura

$-2 + \lambda - 1 - 2\lambda = 3 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = -6} \Rightarrow K(-1, 7, 12).$ 2

L'intersection de P et de $D(A, \overrightarrow{AB})$ est le point $K(-1, 7, 12)$. 1,5

⑦ Soit N la projection orthogonale de C sur $D(A, \overrightarrow{AB})$



Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC}$

$= \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}$.

Alors $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AB} \rangle$

$= \lambda \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AB} \rangle$

$= \lambda \|\overrightarrow{AB}\|^2$ car $\overrightarrow{NC} \perp \overrightarrow{AB}$.

Donc $\lambda = \dfrac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$.

Nous avons $\overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AB}(0, -1, -2)$, $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 5$.

Alors $\lambda = \dfrac{-3}{5}$.

Comme $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Alors $\boxed{N\left(-1, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)}$. 1,5

⑧ La distance de C à $D(A, \overrightarrow{AB})$ est $\|\overrightarrow{CN}\|$.

$\|\overrightarrow{CN}\| = \left[(-1)^2 + \left(\frac{8}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{6}{5}}$. 1,5

Exercice 2

① Pour un point M, $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$

Si $M(x,y)$ et $M'(x',y')$, alors $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1. \end{cases}$ 1,5 ..... (II)

② Remplaçant dans (II), on aura

$M(1,-2) \longrightarrow M'(1+2, -2-1)$

Alors $\boxed{M'(3,-3).}$ 1

③ $M(x,y) \in D \Leftrightarrow x + y = -1$

$\Leftrightarrow y = -x - 1$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda - 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

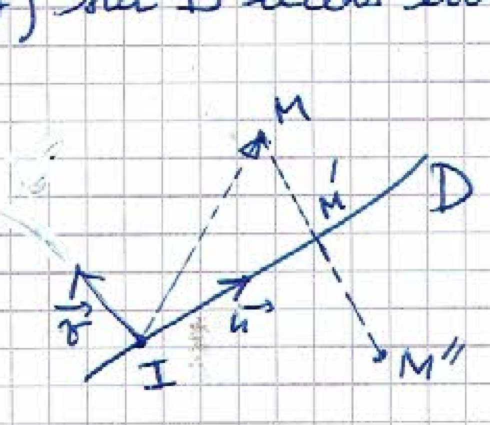
Soit $I(0,-1)$ et $\vec{u}(1,-1)$.

Alors $D = D(I, \vec{u})$.

Soit $M'(x',y')$ la projection de $M(x,y)$ sur D dans la direction $\vec{v}$.

Alors $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'M}$

$= \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ ..... □



□ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \text{ ..... ①} \\ y + 1 = -\alpha - \beta \text{ ..... ②} \end{cases}$

① + ② : $\beta = x + y + 1$.

① : $\alpha = x - 2\beta$ ..... ③.

$= x - 2(x + y + 1) = -x - 2y - 2$ ..... ④

4

$$\overrightarrow{IM'} = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y'+1 \end{pmatrix} = (-x-2y-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x-2y-2 \\ y' = x+2y+1. \end{cases}$$ 2

4) Soit $M''(x'', y'')$ l'[illegible] de $M(x,y)$ par l'affinité f.

Alors $\overrightarrow{MM''} = -2\,(\overrightarrow{M'M})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{OM'} = -2\,(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM''} = -2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OM'}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -2x + 3x' \\ y'' = -2y + 3y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -2x + 3(-x-2y-2) \\ y'' = -2y + 3(x+2y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -5x - 6y - 6 \\ y'' = 3x + 4y + 3. \end{cases}$$ 2

5) Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\vec{f}$ est donnée par la matrice $\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1,5