UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BÉJAIA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

Cours de capitre 1 : Intégrales et calcul des primitives

Module : Mathématiques II

Année Universitaire : 2020 - 2021

Chapitre 1

Intégrales et calcul des primitives

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est purement technique, le but est d'exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales.

Les fonctions de ce chapitre sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

1.2 Les primitives

Définition 1.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle "primitive" de f sur I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.*

Une primitive d'une fonction f, représentée par $\int f(x)\,dx$ s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f. L'ensemble de toutes les primitives de f s'écrit $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *La fonction : $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ est la primitive de la fonction : $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$,*

et toutes les primitives de la fonction : $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On écrit :

$$\int \left(3x^2 - 8x + 2\right) dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

La primitive de la fonction : $x \longmapsto \cos 2x$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin 2x$ sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de la fonction : $x \longmapsto \cos 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont

$$\int (\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c, \ \ c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1 *La primitive d'une fonction n'est pas unique.*

Exemple 1.2 *Soit la fonction $f(x) = 4x + 3$.*

On a :

$$F(x) = 2x^2 + 3x, \ \ G(x) = 2x^2 + 3x + 1, \ \ H(x) = 2x^2 + 3x + 2, \ \ .....$$

sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Conclusion 1.3 *Si on connaît une primitive F de f, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c est une constante.*

Propriétés fondamentales :

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. $\int (f+g)(x)\,dx = F(x) + G(x)\ \forall x \in I.$
2. $\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda F(x)\ \forall x \in I.$
3. $\int (fG + Fg)(x)\,dx = (F.G)(x)\ \forall x \in I.$
4. $\int \left(\dfrac{fG - Fg}{G^2}\right)(x)\,dx = \left(\dfrac{F}{G}\right)(x)\ \forall x \in I$,(avec $G(x) \neq 0\ \forall x \in I$).

Primitives des fonctions usuelles :

$\int \lambda dx = \lambda x + c, \lambda \in \mathbb{R},$

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\},$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$

$\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c, a \neq 0,$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c, a \neq 0,$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, |x| < 1,$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$.

1.3 Techniques de calcul des primitives

1.3.1 Intégration par parties

La première méthode de calcul des primitives est donnée par la formule dite "intégration par parties". Elle est basée sur la formule de dérivation d'un produit.

Proposition 1.1 *Soient $U, V : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors*

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = U(x)\,V(x) - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

Preuve. On a :

$$(U(x)\,V(x))' = U'(x)\,V(x) + U(x)\,V'(x),$$

donc,

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = \int (U(x)\,V(x))'\,dx - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

D'où

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = U(x)\,V(x) - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

■

Exemple 1.4 *Calculer* $\int xe^x dx$.

Posons :

$$\begin{cases} U(x) = x, \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = e^x. \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int 1e^x dx \\ &= (x-1)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme* $\int x^k (\sin x)\, dx$, $\int x^k (\cos x)\, dx$, $\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int x^k (\ln x)\, dx$.

1.3.2 Intégration par changement de variable

Voici une seconde méthode de calcul de primitives. Elle s'appuie sur la formule de dérivation d'une fonction composée.

Formules de changement de variable :

Si le calcul de $\int f(x)\, dx$ s'avère difficile, on remplace x par $g(t)$ dérivable et donc $dx = g'(t)\, dt$ et on aura :

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx.$$

Remarque 1.3 *Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.*

Un changement de variable comporte trois étapes :

1- Choisir la fonction $g(t)$ *(c'est la seule partie où il faut faire preuve d'imagination et d'expérience).*

2- écrire $dx = g'(t)\, dt$ *pour préparer le changement de variable.*

3- Appliquer la formule du changement de variable (ne pas oublier de changer les bornes quand il s'agit d'une intégrale définie).

Exemple 1.5 *Calculer* $\int \sin^3 x \cos x\ dx$.

On pose : $t = \cos x$, *donc* $dt = -(\sin x)\, dx$, *d'où* $dx = \dfrac{-1}{\sin x} dt$.

Alors

$$\begin{array}{rcl}\int \sin^3 x \cos x \ dx & = & \int \left(\sin^3 x\right) t \ \frac{-1}{\sin x} dt \\ & = & -\int \left(\sin^2 x\right) t \ dt \\ & = & -\int \left(1-\cos^2 x\right) t \ dt \\ & = & -\int \left(1-t^2\right) t \ dt \\ & = & -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^4+c, c \in \mathbb{R} \\ & = & -\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{4}\cos^4 x+c, c\in\mathbb{R}.\end{array}$$

1.4 Compléments sur le calcul des primitives

1- Intégration des fractions rationnelles :

Une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$, $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où a, b, p, q, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Donc il suffit de connaître les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles.

a) Intégrale du type : $\int P(x)\, dx$.

Dans le cas où P est un polynôme, on intègre terme à terme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

alors

$$\begin{array}{rcl}\int P(x)\, dx & = & \int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) dx \\ & = & \int a_n x^n dx + \int a_{n-1}x^{n-1}dx + ... + \int a_1 x dx + \int a_0 dx \\ & = & \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \dfrac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c, c \in \mathbb{R}.\end{array}$$

b) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{x+\lambda}dx, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{x+\lambda}dx = \ln|x+\lambda| + c, c \in \mathbb{R}.$$

c) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$ et $n > 1$.

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

d) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où a, b, p et $q \in \mathbb{R}$.

Si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β, donc :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int\frac{A}{x-\alpha}dx+\int\frac{B}{x-\beta}dx\\ &= A\ln|x-\alpha|+B\ln|x-\beta|+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 1.6 *Calculer* $\int\frac{1}{x^2-1}dx.$

On a :

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-1}dx &= \int\frac{1}{2(x-1)}dx-\int\frac{1}{2(x+1)}dx\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si x^2+px+q *n'a pas de racines réelles, écrivons :*

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

En posant : $\alpha=-\frac{p}{2}$ *et* $\beta^2=q-\frac{p^2}{4}$*, on obtient :*

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2.$$

On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha=\beta t$ *et donc* $dx=\beta dt$ *et* $(x-\alpha)^2+\beta^2=\beta^2(t^2+1)$.

$$\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx\\ &= \int\frac{Mt+N}{t^2+1}dt\\ &= \int\frac{Mt}{t^2+1}dt+\int\frac{N}{t^2+1}dt\\ &= \tfrac{M}{2}\ln(t^2+1)+N\arctan t+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Puis on remplace t *par* $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

Exemple 1.7 *Calculer* $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$.

On a :

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

En posant : $x+1=2t$ *(et donc* $dx=2dt$*), on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)}2dt \\
&= \int \frac{4t}{4(t^2+1)}dt+\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\frac{3}{2}\arctan t+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

e) Intégration des fractions rationnelles en : $\mathbf{e}^x$:

On utilise le changement de variable $t=e^x$ et donc : $dt=e^xdx$ où $dx=\frac{1}{t}dt$

Exemple 1.8 *Calculer* $\int \frac{dx}{3-2e^x}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3-2e^x} &= \int \frac{dt}{t(3-2t)} \\
&= \tfrac{1}{3}\int \frac{dt}{t}-\tfrac{1}{3}\int \frac{(-2)\,dt}{3-2t} \\
&= \tfrac{1}{3}\ln|t|-\tfrac{1}{3}\ln|3-2t|+c, c\in\mathbb{R} \\
&= \tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{3}\ln|3-2e^x|+c, c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2- Intégrale du type : $\int P(x)\,e^{\lambda x}dx$ **où** P **est un polynôme et** $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

On peut effectuer des intégrations par parties successives selon le degré de P, mais on doit réserver cette méthode au cas où $\deg P$ est petit. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive $P(x)\,e^{\lambda x}$ sous la forme $Q(x)\,e^{\lambda x}$, avec $\deg P=\deg Q$.

Exemple 1.9 *Calculer* $\int (5x^2+3x-1)\,e^{-x}dx$.

On sait que : $\int (5x^2+3x-1)\,e^{-x}dx = (ax^2+bx+c)\,e^{-x}$, *et on obtient :* a,b,c *de la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right]' &= \left[-ax^2+(2a-b)\,x+b-c\right]e^{-x} \\
&= \left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 5, \\ 2a - b = 3, \\ b - c = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5, \\ b = 2a - 3, \\ c = b + 1, \end{cases} \quad donc : \begin{cases} a = -5, \\ b = -13, \\ c = -12. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int \left(5x^2 + 3x - 1\right) e^{-x} dx = \left(-5x^2 - 13x - 12\right) e^{-x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.10 *Calculer* $\int \left(x^4 - 1\right) e^{2x} dx.$

On pose : $\int \left(x^4 - 1\right) e^{2x} dx = Q(x) e^{2x}$ *avec* $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda$ *où* a, b, c, d *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned} \left[Q(x) e^{2x}\right]' &= \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d\right) e^{2x} + 2\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda\right) e^{2x} \\ &= \left[2ax^4 + (4a + 2b) x^3 + (3b + 2c) x^2 + (2c + 2d) x + (2\lambda + d)\right] e^{2x} \\ &= \left(x^4 - 1\right) e^{2x}. \end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 4a + 2b = 0, \\ 3b + 2c = 0, \\ 2c + 2d = 0, \\ 2\lambda + d = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -2a, \\ c = -\frac{3}{2}b, \\ d = -c, \\ \lambda = \frac{-1-d}{2}, \end{cases} \quad donc : \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -1, \\ c = \frac{3}{2}, \\ d = -\frac{3}{2}, \\ \lambda = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Alors

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\int \left(x^4 - 1\right) e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

3- Intégration de certaines fonctions trigonométriques :

a) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$. En effectuant le changement da variable : $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\\
&= 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\\
&= \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{2t}{1+t^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\\
&= \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}\\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}\\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
t=\tan\tfrac{x}{2} &\Rightarrow \quad \tfrac{x}{2}=\arctan t\\
&\Longrightarrow \quad x = 2\arctan t\\
&\Longrightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
t=\tan\tfrac{x}{2} &\Rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\\
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2},\\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\tan x &= \frac{2t}{1-t^2},\\
\cot x &= \frac{1-t^2}{2t}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.11 *Calculer* $\int \dfrac{1}{\cos x}dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{1-t}dt \\
&= \ln|1+t| - \ln|1-t| + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.4 *Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, appelé changement de variable universel pour l'intégration des fonctions trigonométriques résout le problème d'intégration de toute expression de la forme $f(\sin x, \cos x)$ mais conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable d'utiliser d'autres changements de variables menant plus rapidement au but.*

b) Intégrale de type : $\int \cos^p x \sin^q x dx, p$ **et** $q \in \mathbb{N}$.

Premier cas : p est impair

Soit $p = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^{2k+1} x \sin^q x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^q x \cos x dx.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \sin x$, $(dt = (\cos x)\, dx)$ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int (1-t^2)^k t^q dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 1.12 *Calculer* $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int (1-t^2)^2 t^2 dt \\
&= \int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt \\
&= \tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{1}{3}t^3 + c, c \in \mathbb{R}. \\
&= \tfrac{1}{7}\sin^7 x - \tfrac{2}{5}\sin^5 x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : q est impair

Soit $q = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^p x \sin^{2k+1} x dx \\ &= \int \cos^p x \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \cos x$, $(dt = -(\sin x)\, dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $-\int t^p \left(1-t^2\right)^k dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 1.13 *Calculer* $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x \left(1-\cos^2 x\right) \sin x dx \\ &= -\int t^6 \left(1-t^2\right) dt \\ &= \int \left(t^8 - t^6\right) dt \\ &= \tfrac{1}{9} t^9 - \tfrac{1}{7} t^7 + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{1}{9} \cos^9 x - \tfrac{1}{7} \cos^7 x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Troisième cas : Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.

c) Intégrale de type : $\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\cos \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx &= \tfrac{1}{2} \int \cos\left[(\alpha+\beta)x\right] dx + \tfrac{1}{2} \int \cos\left[(\alpha-\beta)x\right] dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)} \sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)} \sin(\alpha-\beta)x + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\quad (\text{tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta). \end{aligned}$$

Exemple 1.14 *Calculer* $\int (\cos 5x)(\cos x)\, dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int (\cos 5x)(\cos x)\, dx &= \tfrac{1}{2} \int (\cos 6x)\, dx + \tfrac{1}{2} \int (\cos 4x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6} \sin 6x\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} \sin 4x\right) + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{1}{12} \sin 6x + \tfrac{1}{8} \sin 4x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\,dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.
On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin[(\alpha+\beta)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin[(\alpha-\beta)x]\,dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cos(\alpha-\beta)x + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\text{(tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta).\end{aligned}$$

Exemple 1.15 *Calculer* $\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx$.
On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin(10x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin(-2x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{10}\cos 10x\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{-2}\cos(-2x)\right) + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{-1}{20}\cos 10x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Intégrale de type : $\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\,dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.
On utilise la formule suivante :

$$(\sin \alpha x)(\sin \beta x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\,dx &= \tfrac{-1}{2}\int \cos[(\alpha+\beta)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\int \cos[(\alpha-\beta)x]\,dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin(\alpha-\beta)x + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\text{(tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta).\end{aligned}$$

Exemple 1.16 *Calculer* $\int (\sin 3x)(\sin 2x)\,dx$.
On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 3x)(\sin 2x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int [-\cos 5x + \cos x]\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{-1}{5}\sin 5x + \sin x\right] + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{-1}{10}\sin 5x + \tfrac{1}{2}\sin x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

1.5 Intégrale définie

Proposition 1.2 *Si F est une primitive de la fonction continue f sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales.

Remarque 1.5 *Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux).*

$\int f(x)\,dx$ s'appelle une intégrale indéfinie de f, c'est une fonction primitive de f.

$\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle une intégrale définie de f, c'est un nombre réel.

Remarque 1.6

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Exemple 1.17

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Proposition 1.3 ***(opérations élémentaires)***

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1) $f+g$, fg, λf et $|f|$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

5) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

6) Si $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

7) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

8) Si $n \leq f(x) \leq m$, $\forall x \in [a,b]$ (tels que $n,m \in \mathbb{R}$), alors $n(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq m(b-a)$.

9) Si $n \leq f(x) \leq m$ et $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ (tels que $n,m \in \mathbb{R}$), alors $n\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq m\int_a^b g(x)\,dx$.