République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

MODULE :

Analyse Mathématiques 4

L'objectif de cette UE est triple :
$*$ Découvrir quelques concepts topologiques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
$*$ Étendre les notions de limite continuité et différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et les généraliser à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.
$*$ Exploiter les résultats ci-dessus pour traiter certains problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes.
$*$ Étendre la notion d'intégrale de Riemann aux cas d'un intervalle non borné ou d'une fonction non bornée.
$*$ Définir l'intégrale de Riemann en dimensions 2 et 3. Introduire quelques notions sur les EDP.

Veuillez communiquer vos remarques et commentaires à l'adresse
< *talemdja@yahoo.com* >

Année universitaire 2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET EXTREMA

Dans ce chapitre, nous introduisons les dérivées d'ordre supérieur à un, le théorème des accroissements finis et le théorème de Schwarz qui sont très utile pour établir la formule de Taylor à plusieurs variables et le calcul des extremums. Enfin, nous donnons le théorème des accroissement finis.

1.1 dérivées partielles d'ordres supérieur à un

Si une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles, alors chacune de ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \ldots n$ peut aussi admettre à son tour des dérivées partielles notées par $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ou $f''_{x_j x_i}$ et qui sont appelées **dérivées partielles d'ordre deux** de la fonction f par rapport à x_i et x_j prises dans cette ordre, c'est à dire on dérive f par rapport à x_i puis on dérive $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à x_j. Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial}{x_j}(\dfrac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f(a_1, \ldots a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_i}}{h}$ est la dérivée seconde de f par rapport aux variables x_i et x_j au point $A = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$. Par exemple la fonction $f(x, y)$ de deux variables peut admettre quatre dérivées partielles d'ordre deux au point $A = (a, b)$ qui sont :

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f(a,b+h)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}}{h}$;
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f(a,b+h)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}}{h}$;
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f(a+h,b)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}}{h}$;
4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f(a+h,b)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}}{h}$.

Exemple 1.1. La dérivée seconde de la fonction $f(x, y) = x^3 y^2$ par rapport à x et y est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{\partial^2 (x^3 y^2)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\partial (x^3 y^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial (3x^2 y^2)}{\partial y} = 6x^2 y$.

A partir des dérivées partielles d'ordre deux, on peut calculer les dérivées d'ordre trois (si celles ci existent). Ainsi de proche en proche, on définit des dérivées d'ordre quelconque. Par exemple $f'''_{xyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ est la dérivées partielle d'ordre trois de la fonction f par rapport à x puis à y puis à x.

Définition 1.1. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^l, $l \in \mathbb{N}$ et on écrit $f \in C^l(U)$ si les dérivées partielles d'ordre l existent et elles sont continues sur l'ouvert U. La fonction f est de classe $C^\infty(U)$ si $f \in C^l(U)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.
Si f est une fonction vectorielle, c'est à dire $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, dans ce cas $f \in C^l(U)$ (resp. $f \in C^\infty(U)$) si et seulement si, pour $j = 1 \dots m$, $f_j \in C^l(U)$ (respectivement $f_j \in C^\infty(U)$.

Le théorème suivant appelé **Théorème de Schwartz** donne une condition suffisante pour l'égalité des dérivées croisées d'ordre deux.

Théorème 1.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application. Si les dérivées croisées d'ordre deux $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ sont continues au point $A \in U$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$.*

Exemple 1.2. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 \text{ si (x,y)=(0,0).} \end{cases} \tag{1.1}$$

On peut vérifier facilement que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$. Puisque les dérivées partielles croisées ne sont pas égales au point $(0,0)$, on déduit d'après le théorème de Schwartz que ses dérivées croisées ne sont pas continues en ce point.

Maintenant, nous généralisons le théorème des **Accroissements finis** connu pour le cas d'une fonction d'une seule variable et qui est donné comme suit :
Si f est une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Ce théorème est une forme plus générale (et une conséquence directe) du théorème de **Rolle**.

Définition 1.2. Si A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, le **segment** $[A,B]$ est par définition l'ensemble

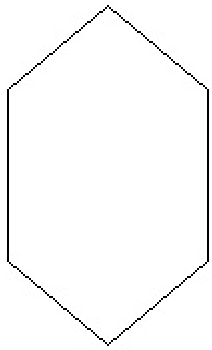
$$[A,B] = \{tA + (1-t)B, t \in [0,1]\}$$

Notons que tout intervalle est un segment dans $\mathbb{R}$, donc la notion d'un segment est une généralisation de la notion d'un intervalle connu dans $\mathbb{R}$ à l'espace $\mathbb{R}^n$.

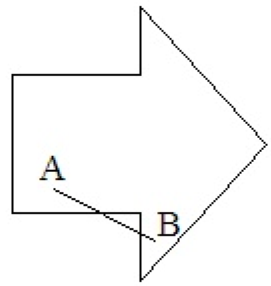
Définition 1.3. Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si pour tout $A, B \in X$, $[A,B] \subset X$, c'est à dire lorsque il contient le segment $[A,B]$ à chaque fois qu'il contient la paire

$\{A, B\}$.

Les boules sont des convexes. Les segments eux-mêmes sont aussi des ensembles convexes.



(1)



(2)

La figure (1) présente un ensemble convexe. Par contre, l'ensemble de la figure (2) n'est pas convexe, car le segment $[A, B]$ n'est pas inclus dans ce dernier.

Théorème 1.2. *Soit U un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U. Alors pour tout $A, B \in U$, $\exists C \in]A, B[$ tel que $f(B) - f(A) = Df(C)(B - A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(C)(b_i - a_i)$, où $A = (a_1, a_2 \dots a_n)$ et $B = (b_1, b_2 \dots b_n)$.*

Définition 1.4. On dit qu'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne de rapport k (ou k-lipschitzienne), avec k est un scalaire, si pour tout $X, Y \in U$, $\|f(X) - f(Y)\| \leq k\|X - Y\|$.

1.2 Formule de Taylor

La **formule de Taylor** permet d'approcher une fonction de plusieurs variables (ou d'une seule variable) de classe C^{p+1} au voisinage d'un point par un polynôme de degré p dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées partielles de cette fonction en ce point.
1. f est une fonction d'une seule variable :

Théorème 1.3. *Soit $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{p+1}. Alors*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f^2(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^p(a)}{p!}h^p + R_p(a; h) \tag{1.2}$$

L'équation 1.2 est appelée formule de Taylor d'ordre p de la fonction f au point a ; $R_p(a, h)$ est le reste de la formule de Taylor qui se présente par plusieurs forme.
$R_p(a, h) = \dfrac{f^{p+1}(a + \theta h)}{(p+1)!} h^{p+1}, 0 < \theta < 1$ *est appelé **reste de Lagrange**.*
$R_p(a, h) = \int_0^1 \dfrac{(1-t)^p}{p!} f^{p+1}(a + th) h^{p+1} dt$ *est appelé **reste intégrale**.*

Exemple 1.3. Pour la fonction $f(x) = e^x$, la formule de Taylor d'ordre 4 au point $x = 0$ est $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5 e^{5\theta}}{5!}$

2. f est une fonction de deux variables

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{p+1}, et $A = (a, b)$ un point dans U.
Pour ne pas trop encombrer les écritures, on utilise les notation suivantes :
Pour tout point $H = (h, k)$, on a :

1. $D^{(1)}f(A)(H)^{(1)} = Df(A)(H) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)k$;
2. $D^{(2)}f(A)(H)^{(2)} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)k^2$;
3. $D^{(3)}f(A)(H)^{(3)} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A)h^3 + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A)h^2k + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A)hk^2 + \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A)k^3$;
4. ...

Théorème 1.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, et pour tout point $H = (h, k)$ tel que $A + H \in U$, on a*

$$f(A+H) = f(A) + \frac{Df(A)(H)^{(1)}}{1!} + \frac{D^{(2)}f(A)(H)^{(2)}}{2!} + \ldots + \frac{D^{(p)}f(A)(H)^{(p)}}{p!} + R_p(A, H) \quad (1.3)$$

L'équation 1.3 est appelée formule de Taylor d'ordre p. Le polynôme $f(A) + \dfrac{Df(A)(H)^{(1)}}{1!} + \dfrac{D^{(2)}f(A)(H)^{(2)}}{2!} + \ldots + \dfrac{D^{(p)}f(A)(H)^{(p)}}{p!}$ est appelé partie principale de la formule. $R_p(A, H)$ est le reste de la formule, il mesure l'erreur d'approximation et il est donné sous l'une des formes :

$$\frac{D^{(p+1)}f(A+\theta H)(H)^{p+1}}{(p+1)!}, 0 < \theta < 1 \textit{ pour le reste de Lagrange}$$

et

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p D^{(p+1)}f(A+tH)(H)^{p+1}}{p!}dt \textit{ pour le reste intégrale .}$$

Exemple 1.4. *Écrire la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$ pour la fonction $f(x, y) = \cos x \cos y$*
Il est claire que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin x \cos y \to \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos x \sin y \to \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\cos x \cos y \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\cos x \cos y \to \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \sin x \sin y \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = sinxcosy = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = cosxsiny = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$$

Ainsi la formule de Taylor-Lagrange est :

$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + \dfrac{Df(0,0)(h,k)^{(1)}}{1!} + \dfrac{D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)}}{2!} + \dfrac{D^{(3)}f(0,0)(h,k)^{(3)}}{3!} + R_3((0;0),(h,k)) = 1 + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \frac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)hk + \frac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)k + R_2((0,0),(h,k)) = 1 + \dfrac{1}{2}(-h^2 - k^2) + R_2((0,0),(h,k))$

$R_2((0,0),(h,k)) = \dfrac{1}{6}(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta h, \theta k)h + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\theta h, \theta k)h^2 k + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\theta h, \theta k)hk^2 + \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta h, \theta k)k^3) = \dfrac{1}{6}[(h^3 + 3hk^2)sin(\theta h)cos(\theta k) + (k^3 + 3h^2 k)cos(\theta h)sin(\theta k)], 0 < \theta < 1$

1.3 Extréma

Dans cette section U est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), f est une application de U dans $\mathbb{R}$ et (a,b) est un point dans U.

Définition 1.5.

1. On dit que (a,b) est un **minimum** (resp. **maximum**) **local** ou **relatif** de f s'il existe un voisinage V de (a,b) tel que $f(x,y) \geq f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \leq f(a,b)$) pour tout point $(x,y) \in V$.
2. On dit que (a,b) est un minimum (resp. maximum) **global** ou **absolu** de f si $f(x,y) \geq f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \leq f(a,b)$) pour tout point $(x,y) \in U$.
3. On dit que le minimum (ou le maximum) est **strict** si les inégalités précédentes sont strictes.
4. On dit que f admet un **extremum** en (a,b) si elle présente en ce point un minimum ou un maximum

Exemple 1.5. Posons $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$. Il est claire que f est une application sur $\mathbb{R}^2$ (car tout simplement $D_f = \mathbb{R}^2$). Cherchons par exemple à savoir si le point $(1,2)$ est un extremum ! On a $f(1,2) = \dfrac{1}{6}$. Pour le point $(1,1)$, $f(1,1) = \dfrac{1}{3} > f(1,2)$, ceci veut dire que le point $(1,2)$ n'est pas un maximum. Pour le point $(2,2)$, $f(2,2) = \dfrac{1}{9} < f(1,2)$ et ceci veut dire que $(1,2)$ n'est pas un minimum. Donc le point $(1,2)$ n'est pas un extremum de f sur U. On remarque, par contre, que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < f(x,y) \leq 1$. Pour $(x,y) = (0,0)$, $f(0,0) = 1$ donc le point $(0,0)$ est un maximum global. Mais f n'a pas de minimum car $0 < f(x,y)$ pour tout (x,y).

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum.

Théorème 1.5. *Si f est différentiable sur U et si (a,b) est un extremum de f, alors $Df(a,b) = 0$, c'est à dire la différentielle de f au point (a,b) est une forme linéaire nulle. Plus précisément, on a* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ Dans l'exemple précédent, le point $(0,0)$ est un maximum pour l'application $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$, donc d'après le théorème précédent on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Effectivement, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2} \to \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Remarque 1.1. D'après le théorème 1.5 ; un point (a,b) pour lequel $Df(a,b)$ n'est pas nulle ne peut pas être un extremum pour f. Cependant, il faut pas oublier qu'il donne une condition nécessaire mais pas suffisante, c'est à dire, on peut trouver un point (a,b) pour lequel $Df(a,b) = 0$ et portant le point (a,b) n'est pas un extremum. Pour bien voir ça, considérons la fonction $f(x,y) = x^3 + y^2$ et le point $(0,0)$. On a bien $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Mais le point $(0,0)$ n'est pas un extremum pour f, car $f(-1,0) = -1 < f(0,0) = 0 < f(1,1) = 2$. Le point $(0,0)$ est appelée point **selle** pour f.

Définition 1.6. Un point (a,b) est un point **critique ou stationnaire** pour la fonction f si $Df(a,b) = 0$.
D'après la définition ci-dessus, un point selle est un point critique mais un point critique n'est pas forcement un point selle. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence d'un extremum

Théorème 1.6. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur U et (a,b) un point critique pour f. Posons*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b); s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b); t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Alors

1. *Si $rt - s^2 > 0$, f admet un extremum local strict en (a,b) ; (a,b) est un minimum si $r > 0$, c'est un maximum si $r < 0$.*
2. *Si $rt - s^2 < 0$, (a,b) n'est pas un extremum, donc (a,b) est un point selle.*
3. *Si $rt - s^2 = 0$ on ne peut pas conclure.*

Exemple 1.6. 1. Cherchons les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

f est un polynôme donc il est de classe C^2. On cherche d'abord les points critiques. Les points critiques de f sont donnés par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \ (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - 6 = 0 \ (2). \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow y = 3 - 2x$. On remplace y dans (2), on trouve $x = 0$ et $y = 3$. Ainsi, la fonction f admet un unique point critique $(0,3)$. Calculons maintenant r, s et t.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \Rightarrow r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \Rightarrow t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \Rightarrow s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,3) = 1$$

On a $rt - s^2 = 4 - 1^2 = 3 > 0$, donc f présente au point $(0,3)$ un extremum local strict. Puisque $r > 0$, le point $(0,3)$ est un minimum local strict pour f.

2. Étudier l'existence des extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = 3x^3 + 3y^3 - x - y + 5$$

Puisque f est un polynôme, alors il est claire que f est de classe C^∞. Les points critiques de f sont donner par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \text{ ou } y = \frac{-1}{3}. \end{cases}$$

Le système admet quatre solutions (donc f admet quatre points critiques) qui sont :

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}); (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$$

Calculons maintenant les dérivées d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 18x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

Calculons maintenant r, s et t pour chacun de ses points critiques.

1. Pour le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $rt - s^2 = 36 > 0, r = 6 > 0$, f présente en ce point un minimum local strict.
2. Pour le point $(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$, $rt - s^2 = 36 > 0, r = -6 < 0$, f présente en ce point un maximum local strict.
3. Pour les points $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ et $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$, $rt - s^2 = -36 < 0$, f ne présente pas d'extremum en chacun de ces points. Autrement dit $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ et $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ sont des points selles pour la fonction f.

La condition suffisante évoquée ci-dessus provient d'un résultat plus général concernant les fonctions numériques à n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Avant d'énoncer ce résultat général, on a besoin introduisons la matrice des secondes dérivées partielles connue sous le nom "**matrice hessienne**" qui joue un rôle clé dans la détermination des extrema d'une fonction à plusieurs variables.

Définition 1.7. On appelle matrice hessienne de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la matrice carrée H d'ordre n qui se présente sous la forme :

$$H(x) = \begin{pmatrix} f^{(2)}_{x_1^2}(x) & f^{(2)}_{x_1x_2}(x) & f^{(2)}_{x_1x_3}(x) & \dots & f^{(2)}_{x_1x_n} \\ f^{(2)}_{x_2x_1}(x) & f^{(2)}_{x_2^2}(x) & f^{(2)}_{x_2x_3}(x) & \dots & f^{(2)}_{x_2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(2)}_{x_nx_1}(x) & f^{(2)}_{x_nx_2}(x) & f^{(2)}_{x_nx_3}(x) & \dots & f^{(2)}_{x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

où $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ et $f^{(2)}_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$

Définition 1.8. On appelle **mineurs principaux** de la matrice H, notés Δ_i, les déterminants des sous-matrices carrées de H obtenues en lui retirant ses $n-i$ dernières lignes et colonnes ($i=1,\dots,n$). Dans le cas général, la recherche des extrema d'une fonction à plusieurs variables est basée sur le théorème suivant.

Théorème 1.7. *Soit A un point critique de $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Alors :*

1. *Si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point A sont tous strictement positifs, il s'agit d'un minimum.*
2. *Si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point A sont de signes alternés, le premier étant strictement négatif, il s'agit d'un maximum.*
3. *Si les conditions (1) et (2) se vérifient au sens large, alors on ne peut pas conclure, c'est à dire avec les inégalité $\leq$ et $\geq$.*
4. *Si les mineurs principaux ne vérifient pas l'une des conditions ci-dessus prises au sens large (c'est-à-dire respectivement "positif ou nul" et "négatif ou nul"), il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum, mais d'un point-selle.*

Dans le cas de fonctions à deux variables, on retrouve le résultat du théorème 1.6. En effet, dans ce cas, Puisque f est de classe C^1, on a $f^2_{xy}=f^2_{yx}$, alors :

$$H(x)=\begin{pmatrix} f^{(2)}_{x_1^2}(x) & f^{(2)}_{x_1x_2}(x)\\ f^{(2)}_{x_2x_1}(x) & f^{(2)}_{x_2^2}(x)\end{pmatrix}$$

$\Delta_1=f^2_{x^2}=r$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} f^{(2)}_{x_1^2}(x) & f^{(2)}_{x_1x_2}(x)\\ f^{(2)}_{x_2x_1}(x) & f^{(2)}_{x_2^2}(x)\end{vmatrix}=f^2_{x^2}f^2_{y^2}-(f^2_{xy})^2=rt-s^2$$

Ainsi :
$\star$ $\Delta_1>0$ *et* $\Delta_2>0\Rightarrow x$ *est un minimum local strict.*
$\star$ $\Delta_1<0$ *et* $\Delta_2>0\Rightarrow x$ *est un maximum locale strict.*
$\star$ Δ_1 *quelconque et* $\Delta_2<0\Rightarrow x$ *est un point-selle.*
$\star$ Δ_1 *quelconque et* $\Delta_2=0\Rightarrow$ *on ne peut pas conclure.*

Exemple 1.7. Soit $f(x,y,z)=x^4-17x^2+2y^2+z@2-2xy-2yz+81$.
Les points critiques de f sont donnés par le système suivant

$$\begin{cases} f'_x=4x3-34x-2y=0\\ f'_y=4y-2x-2z=0\\ f'_z=2z-2y=0.\end{cases}\tag{1.4}$$

Après résolution, on trouve trois points critiques $(0,0,0)$, $(-3,-3,-3)$ et $(3,3,3)$. La matrice hessienne de f au point $X=(x,y,z)$ est

$$H(X)=\begin{pmatrix} f^{(2)}_{x_1^2}(X) & f^{(2)}_{x_1x_2}(X) & f^{(2)}_{x_1x_3}(X)\\ f^{(2)}_{x_2x_1}(X) & f^{(2)}_{x_2^2}(X) & f^{(2)}_{x_2x_3}(X)\\ f^{(2)}_{x_3x_1}(X) & f^{(2)}_{x_3x_2}(X) & f^{(2)}_{x_3^2}(X).\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x^2-34 & -2 & 0\\ -2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Pour le point $(0,0,0)$, la matrice hessienne est définie par :

$$\begin{pmatrix} -34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -34\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -34 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -140\,;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

D'après le théorème 1.7, ces trois mineurs principaux ne vérifient ni la condition 1 ni la condition 2, prises au sens large. La fonction présente donc un point-selle en $(0,0,0)$.

Pour les points $(-3,-3,-3)$ et $(3,3,3)$ la matrice hessienne est la même :

$$H = \begin{pmatrix} 74 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a alors :
$\Delta_1 = 74\,;\ \Delta_2 = 292$ et $\Delta_3 = 288$. et on voit bien que la première condition du théorème 1.7 est vérifiée. Ainsi, pour chacun de ces deux points, la fonction présente un minimum locale strict.

1.4 Théorème des fonctions implicites

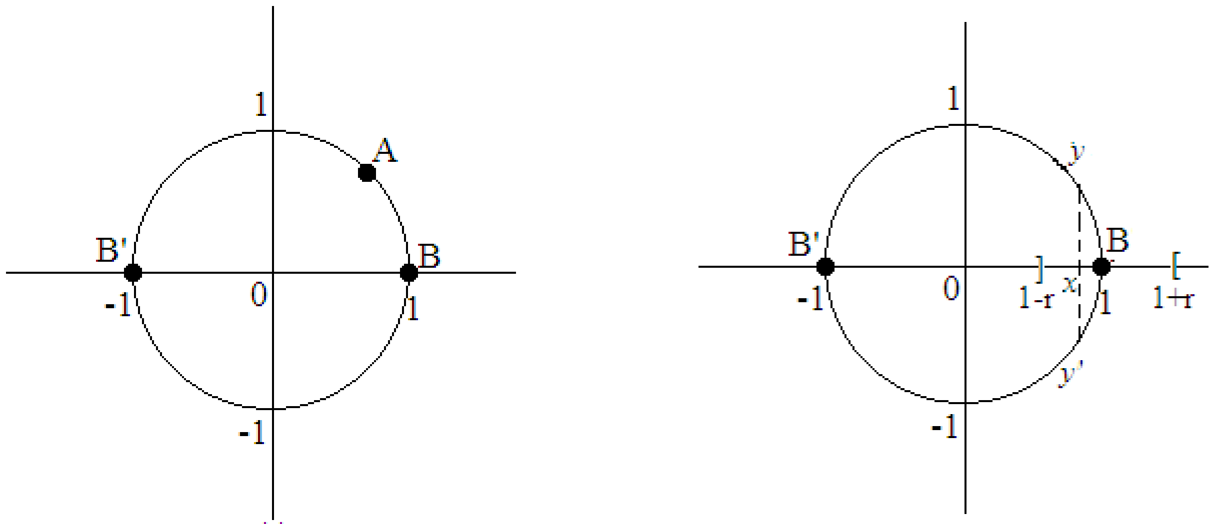
Soit l'équation

$$f(x,y) = 0 \tag{1.5}$$

où f est une application réelle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On veut savoir, pour un point donné $(a,b) \in U$, sous quelles conditions il est possible de trouver deux intervalles I_a , I_b et une application $\phi : I_a \to I_b$ tels que $I_a \times I_b \subset U$, $\phi(a) = b$ et pour tout $x \in I_a$, le couple $(x, \phi(x))$ vérifie l'équation 1.5, c'est à dire $\forall x \in I_a, f(x,\phi(x)) = 0$.
Pour fixer les idées, considérons l'équation suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1.6}$$

Il est claire que $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ est une application sur $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ et on sait que l'ensemble des points vérifiant cette équation est un cercle de centre $(0,0)$ est de rayon 1 comme il est représenté dans la figure suivante.



(a) (b)

D'après la figure (a) ci-dessus, on remarque que :

1. Pour un point $A = (a, b)$ appartenant au demi cercle supérieur tel que $a \neq \pm 1$ (c'est à dire $A \neq B$ et $A \neq B'$), on a $f(a, b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$, donc $b = \sqrt{1 - a^2} = \phi(a)$. Ainsi, il suffit de prendre $I_a =]-1, 1[$, $I_b =]0, 1[$ et $\phi :]-1, 1[\to]0, 1[$ avec $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Donc, ce demi cercle supérieur constitue la courbe de l'application ϕ.
2. Pour un point $A = (a, b)$ appartenant au demi cercle inférieur tel que $a \neq \pm 1$ (c'est à dire $A \neq B$ et $A \neq B'$), il existe $I_a =]-1, 1[$ et $I_b =]-1, 0[$ et une application $\phi :]-1, 1[\to]-1, 0[$ avec $\phi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Ainsi ce demi cercle inférieur constitue la courbe de cette application.

Par contre, pour les points B et B', une telle application ϕ n'existe pas. En effet, pour le point $B = (1, 0)$ par exemple, c'est vrai que ce point vérifie l'équation 1.5, mais on voit bien que si $I_1 =]1 - r, 1 + r[, r > 0$ et $I_0 =]-\alpha, \alpha[, \alpha > 0$ sont deux voisinages ouverts des points 1 et 0 respectivement, alors il existe toujours $x \in I_1$ à qui correspond deux valeurs possibles pour y (voir figure (b)). Autrement dit, tout arc contenant le point B ou B' ne peut pas être un graphe d'une application. Le théorème suivant connu sous le nom de **théorème des fonctions implicites** donne plus de détailles

Théorème 1.8. *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application et (a, b) un point dans U tels que*

1. *f est de classe C^1 sur U,*
2. $$f(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

Alors, il existe deux intervalles ouverts I_a et I_b contenant respectivement les points a et b et une application unique $\phi : I_a \to I_b$ de classe C^1 vérifiant :

1. *$I_a \times I_b \subset U$;*
2. *$\phi(a) = b$;*
3. *$\forall x \in I_a, f(x, \phi(x)) = 0$;*
4. *$\forall x \in I_a, \phi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$.*

Les dérivées partielles de la fonction f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

on voit que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 0$*, c'est pour cette raison que l'application* ϕ *n'existe pas pour les points* B *et* B'*. Par contre, pour tout point* A *différent des points* B *et* B'*, par exemple le point* $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$*, on a* $f(A) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \sqrt{2} \neq 0$*. De plus, on a* $\phi'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \phi(\frac{1}{\sqrt{2}}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, \phi(\frac{1}{\sqrt{2}}))}$*. En effet, pour ce point on a* $\phi(x) = \sqrt{1-x^2}$*, donc* $\phi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \phi'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = -1.$

D'autre part, $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \phi(\frac{1}{\sqrt{2}}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \phi(\frac{1}{\sqrt{2}}))} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = -1.$

Remarque 1.2. 1. Notons que si f est de classe C^∞, il en est de même pour la fonction ϕ.
2. Notons aussi que si $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$, on peut définir x comme une fonction de y au voisinage de b.

Exemple 1.8. Vérifier que la relation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1$ définit y comme fonction de x sur un voisinage de $(0,1)$.
Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $x = 0$.
Calculer ce développement limité à l'ordre 2.

On a $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1 \Rightarrow e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1 = 0$. Posons $f(x,y) = e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1 = 0$. Il est claire que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $f(0,1) = 0$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2y - x - 3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0. \tag{1.7}$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux intervalles ouverts I_0 et I_1, avec $0 \in I_0$ et $1 \in I_1$, et une fonction $\phi : I_0 \to I_1$ de classe C^∞ sur I_0 tels que

1. $I_0 \times I_1 \subset \mathbb{R}^2$
2. $\phi(0) = 1$
3. $f(x, \phi(x)) = 0$
4. $\forall x \in I_a, \phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$.

Ainsi, la fonction ϕ admet un développement limité de tout ordre au voisinage de 0, donc un développement limité d'ordre deux s'écrit $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{\phi"(0)x^2}{2} + o(x^2)$. Donc on doit calculer $\phi(0)$, $\phi'(0)$ et $\phi"(0)$. On sait déjà que $\phi(0) = 1$. Pour calculer $\phi'(0)$ on dérive une fois

$$f(x,\phi(x)) = e^{x\phi(x)} + \phi(x)^2 - x\phi(x) - 3\phi(x) + 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x\phi'(x)+\phi(x))e^{x\phi(x)}+2\phi(x)\phi'(x)-(x\phi'(x)+\phi(x))-3\phi'(x)+2=0 \tag{1.8}$$

Pour $x=0$, l'équation 1.8 implique $\phi'(0)=2$. En dérivant l'équation 1.8, on trouve On évalue en $x=0$ et on trouve $1+4+8+2\phi"(0)-2-2-3\phi"(0)=0 \Rightarrow \phi"(0)=9$.
Ainsi, le développement limité de ϕ en 0 à l'ordre 2 est égal à $1+2x+92x^2+o(x^2)$.

Théorème 1.9. ***Cas d'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.***
Soient $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une application et (a,b,c) un point dans U. On suppose que

1. *f est de classe C^1 sur U.*
2. *$f(a,b,c)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}\neq 0$*

Alors il existe trois intervalle ouverts I_a, I_b et I_c contenant respectivement les point a, b et c, et une application unique $\phi: I_a\times I_b\to I_c$ de classe C^1 sur $I_a\times I_b$ vérifiant :

1. *$\phi(a,b)=c$;*
2. *$\forall(x,y)\in I_a\times I_b$, $f(x,y,\phi(x,y))=0$;*
3. *$\forall(x,y)\in I_a\times I_b$*

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\phi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\phi(x,y))} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,\phi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\phi(x,y))}$$

Exercice *:*
** Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U du point $(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble*

$$\{(x,y,z)\in U, x^2+y^2+z^2-\cos(xyz)=0\} \tag{1.9}$$

soit le graphe d'une fonction numérique ϕ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
** Montrer que cette fonction est de classe C^1 sur V.*
** Calculer les dérivées partielles de ϕ au point $(0,0)$.*
Solution *: Posons $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\cos(xyz)$. Il est claire que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et $f(0,0,1)=0$, donc les conditions du théorème ci-dessus sont vérifiées et donc il existe*

1. *trois intervalles ouverts I_0, I_0 et I_1 contenant respectivement les point 0, 0 et 1,*
2. *une application unique $\phi: I_0\times I_0\to I_1$ de classe C^1 vérifiant : $\phi(0,0)=1$; $\forall(x,y)\in I_0\times I_0$, $f(x,y,\phi(x,y))=0$, c'est à dire l'ensemble $\{(x,y,z)\in U, x^2+y^2+z^2-\cos(xyz)=0\}$ est le graphe de ϕ.*

De plus, on a

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,\phi(0,0))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,\phi(0,0))} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,0)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,\phi(0,0))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,\phi(0,0))}$$

D'où $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=0$

1.5 Optimisation avec contraintes

l'optimisation classique se scinde en deux types de problèmes : l'optimisation sans contrainte que nous avons étudié ci-dessus et l'optimisation avec contraintes. Dans l'optimisation avec contraintes, les variables d'une fonction donnée sont soumises à certaines conditions ou contraintes qui sont formulées sous forme d'égalités ou d'inégalités. Dans les deux cas, le but consiste à trouver les valeurs qui maximisent ou minimisent une fonction.

Dans cette section nous allons aborder le problème d'optimisation dont les contraintes s'expriment sous forme d'égalités, et pour trouver les extrema, on utilise la méthode des ***multiplicateurs de Lagrange****.*

Considérons le cas simple où la fonction à optimiser (fonction objectif) est une fonction à deux variables $f(x,y)$ soumise à une seule contrainte de la forme $g(x,y) = 0$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste à construire une fonction auxiliaire $F(x,y,\lambda)$, appelée ***Lagrangien****, définie ainsi :*

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

où λ (appelé ***multiplicateur de Lagrange****) est une inconnue. La résolution du système ci-dessous fournit les points candidats (les points critiques) de la fonction f.*

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Les extrema parmi les points critiques de f sont calculés en utilisant la matrice hessienne de F, appelée matrice ***hessienne bordée***

$$\begin{pmatrix} F^{(2)}_{\lambda^2}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{\lambda x}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{\lambda y}(x,y,\lambda) \\ F^{(2)}_{x\lambda}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{x^2}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{xy}(x,y,\lambda) \\ F^{(2)}_{y\lambda}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{yx}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{y^2}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & F^{(2)}_{x^2}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{xy}(x,y,\lambda) \\ g'_y(x,y) & F^{(2)}_{yx}(x,y,\lambda) & F^{(2)}_{y^2}(x,y,\lambda) \end{pmatrix}.$$

La condition suffisante pour l'existence d'un extremum est fournie par le théorème suivant

Théorème 1.10. *Soit $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ le point critique de la fonction F (c'est à dire le point en lequel $F'_x = F'_y = F'_\lambda = 0$). Alors, si en ce point*
$|H| < 0$, alors P est un minimum.
$|H| > 0$, alors P est un maximum. Où $|H|$ est le determinant de la matrice H.

Exemple 1.9. Trouver les extrema de la fonction objectif :

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

sous la contrainte :

$$x + 2y = 24$$

La contrainte s'écrit $g(x,y) = x + 2y - 24 = 0$. Le Lagrangien est donné par :

$$F(x,y,\lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

Les point critiques de F sont donnés par la résolution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} F'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x - y + \lambda = 0 \\ 12y - x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 24 = 0. \end{array}\right.$$

En éliminant λ dans les deux premières équations, on obtient $2y = 3x$ que l'on substitue dans la troisième équation. On aura $x + 3x - 24 = 0$, donc $4x = 24$, c'est à dire $x_0 = 6$.
Comme $2y = 3x$, on trouve $y_0 = 9$. Ainsi f admet un seule point critique $(x_0, y_0) = (6, 9)$. Pour déterminer si ce point est un extremum, il faut calculer les dérivées partielles du deuxième ordre.

$$F''_{x^2} = 10; F''_{y^2} = 12; F''_{xy} = F''_{yx} = -1$$

Les dérivées partielles de la contrainte $g(x,y) = x + 2y - 24$ sont :

$$g'_x = 1 \text{ et } g'_y = 2$$

La matrice hessienne bordée est

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Comme $|H| = -56 < 0$, la fonction objectif sous la contrainte $x+2y = 24$ possède un minimum au point $(6, 9)$. Ainsi, nous avons donc trouvé la solution qui minimise la fonction objectif tout en respectant la contrainte.

Remarque 1.3. On peut vérifier que sans la contrainte $x + 2y = 24$, cette fonction possède un minimum au point $(0, 0)$, donc cette même fonction, si elle n'est pas soumise à la contrainte, ne possède pas un minimum au point $(6, 9)$!

1.6 Travaux Dirigés

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre trois pour les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = e^{xy}$;
2. $f(x, y) = e^x siny$;
3. $f(x, y) = ylin(x^2 + 1)$

Exercice 2. Soit U un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U.

1. Montrer que si pour tout $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in U$, $Df(x) = 0$ (c'est à dire est une forme linéaire nulle), alors f est une application constante sur U.
2. Montrer que si pour tout $x = (x_1, \dots x_n)$, $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq k$, alors f est k-lipschitzienne.

Exercice 3. Écrire la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$ de la fonction f dans chaque cas :

1. $f(x, y) = e^{xy}$;
2. $f(x, y) = e^x siny$;
3. $f(x, y) = ylin(x^2 + 1)$

Remarque
Dans la formule de Taylor d'ordre p, on peut remplacer le reste $R_p(A, H)$ par $\circ(\| H \|^p)$ qui signifie que le reste d'ordre p est négligeable par rapport à $\| H \|^p$.

Exercice 4. On dit qu'une fonction f est harmonique sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ si $f \in C^2(U)$ et pour tout $X = (x_1, x_2, \dots x_n) \in U$, $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$.
Montrer que la fonction $f(x, y) = log(x^2 + y^2)$ est harmonique sur son domaine de définition.

Exercice 5. Étudier l'existence des extremums pour la fonction f dans les cas suivant :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 2$;
2. $f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$,
3. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + 3z^3 - 4x - 4y - z$,

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^y - y^x$

1. déterminer le domaine de définition de f ;
2. Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I et J tel que l'ensemble
$$E = \{(x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0\} \tag{1.11}$$
soit le graphe d'une fonction ϕ de classe C^1 sur I et vérifiant $\phi(1) = 1$;
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 de la fonction ϕ au voisinage de 1.

Exercice 7. Une firme aéronautique fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. Soit q_1 le nombre d'avions vendus sur le premier marché et q_2 le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les fonctions de demande dans les deux marchés respectifs sont :

$\star p_1 = 60 - 2q_1$
$\star p_2 = 80 - 4q_2$
p_1 et p_2 sont les deux prix de vente. La fonction de coût total de la firme est :

$C = 50 + 40q$, où q est le nombre total d'avions produits.
Trouver le nombre d'avions que la firme doit vendre sur chaque marché pour maximiser son bénéfice.

1.7 Références

[1] E. Azoulay, J.Avignant, G.Auliac : Les mathématiques en licence (Tomes 1 à 4) Edi Science.
[2] J.Dixmier : Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (en deux volumes) Dunod.
[3] J.Monier : Cours de mathématiques (Analyse 1, 2,3 et 4) Dunod.
[4] J.lelong-ferand, J.M.Arnaudies : Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (tome 2 Analyse, tome 3 Géométrie et cinématique, tome 4 équations différentielles et intégrales multiples) Dunod.
[5] B.Calvo, A.Calvo, J.Doyen,F.Boschet : Cours d'analyse de I à V. 1er Cycle et Classes préparatoires aux grandes Écoles. Armand Colin, Collection U.
[6] R.Couty, J.Ezra : Analyse. Armand Colin, Collection U.
[7]. Azoulay, J.Avignant, G.Auliac, « Les mathématiques en licence (Tomes 1 à 4) », Edi Science.
[8] J.Dixmier, « Cours de mathématiques. Cycle préparatoire », Deux volumes, Dunod.
[9] J.Monier, « Cours de mathématiques », (Analyse 1, 2,3 et4) , Dunod.
[10] J.lelong-ferand, J.M.Arnaudies, « Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (tome 2 Analyse, tome3 Géométrie et cinématique) », Dunod.
[11] B.Calvo, A.Calvo, J.Doyen,F. Boschet, « Cours d'analyse de I à V. 1er Cycle et Classes préparatoires aux grandes Ecoles. Armand Colin », Collection U.
[12] R.Couty, J.Ezra, « Analyse », Armand.
[13] Yadolah Dodge. Optimisation appliquée. Springer-Verlag France 2005.
[14] D.E.MEDJADI, M.BOUKRA, A.DJEDANE, B.K.SADALAH : Analyse Mathématiques, vol 2 OPU (1996).