République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

L1 (ST)

Cours de :
Mathématiques I
(Analyse et Algèbre)

Conformément au Programme de Première Année LMD
Sciences de Technologie

Rédigé par Dr : **M'hamdi Mohammed Salah**

Année Universitaire : 2019 - 2020

Preface

Ce cours d'Analyse et Algèbre s'adresse aux étudiants du domaine Sciences et Technique (dans le cadre du système L.M.D). Il couvre le programme officiel du module Mathématiques I qui est consacré au programme du semestre 1 du module Analyse et Algèbre I. On a inclus dans ce cours de nombreux exemples typiques d'applications et on a proposé quelques exercices importants dans chaque chapitre.

Le contenu du cours est inspiré des manuels de mathématiques couramment utilisés, ainsi que du cours que j'ai enseigné pendant le semèstre 1 de l'année universitaire 2019/2020 pour les étudiants de première année L.M.D du domaine Sciences de Technologie au sein du Département de Technologie de la Faculté de Technologie.
J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Analyse et Algèbre I qui constituent la base des mathématiques à l'université. Enfin, des erreurs peuvent être relevées, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (mohammedsalah.mhamdi@yahoo.com).

Table des matières

1 Logiques et méthodes du raisonement mathématiques

1.1 Logiques mathématiques

1.1.1 Proposition

Définition 1.1. Une **proposition** est une phrase formelle, mathématique, ... etc, à la quelle on peut attribuer une valeur de vérité soit **vraie**, soit **fausse**.

Exemple 1.1.

▶ *Le 01 Octobre 2019 était un Mardi. (vraie)*
▶ *Toutes les voitures rapides sont rouges. (fausse)*
▶ *Je suis plus grand que toi. (.......)*
▶ *2+3=9. (fausse)*
▶ *4 est un multiple de 2. (vraie)*
▶ *4 est un multiple de 3. (fausse)*
▶ *2 × 3>9. (fausse)*

Remarque 1.1. Chaque proposition P admet une négation notée $\overline{P}$ qui est :

vraie lorsque P fausse
fausse lorsque P vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

TABLE 1 – Table de vérité pour la négation de $\overline{P}$

Exemple 1.2.

▶ *La négation de "Cette voiture est rapide" est "Cette voiture n'est pas rapide".*
▶ *La négation de "2+3=9" est "$2+3 \neq 9$".*
▶ *La négation de "4 est un multiple de 2" est "4 n'est pas un multiple de 2".*
▶ *La négation de "$2 \times 3>9$" est "$2 \times 3 \leq 9$".*

1.1.2 Connecteur logique

Si P est une assertion (propostion) et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q :

a. L'opérateur logique "et" (conjonction)
La proposition "P et Q" (on note $P \wedge Q$) est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition "P et Q" est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité 2 :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 2 – Table de vérité de "$P \wedge Q$"

Exemple 1.3.

- *"4 est un multiple de 2" et "9 est un multiple de 3". (vraie)*
- *"2 × 3>9 " et "$2 \times 3 \leq 9$". (fausse)*
- *"$P \wedge \overline{P}$" est toujours fausse.*

b. L'opérateur logique "ou" (disjonction)
La proposition "P ou Q" (on note "$P \vee Q$") est vraie si l'une (au moins) des deux propositions P ou Q est vraie. La proposition "P ou Q" est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité 3 :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 3 – Table de vérité de "$P \vee Q$"

Exemple 1.4.

- *" 9 est un multiple de 2" ou "4 est un multiple de 3". (fausse)*
- *" 4 est un multiple de 2" ou "4 est un multiple de 3". (vraie)*
- *"$2 \times 3 > 9$ " ou "$2 \times 3 \leq 9$". (vraie)*
- *"$P \vee \overline{P}$" est toujours vraie.*

c. L'implication "$\Rightarrow$"

La définition mathématique est la suivante :

La proposition "$\overline{P}$ ou Q" est notée "$P \Rightarrow Q$".

Sa table de vérité 4 est donc la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TABLE 4 – Table de vérité de "$P \Rightarrow Q$"

La proposition "$P \Rightarrow Q$" se lit en français "P implique Q" ou "si P alors Q".

Exemple 1.5.

- "$2+2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$" *est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors la proposition "$P \Rightarrow Q$" est toujours vraie.*

d. L'équivalence "$\Leftrightarrow$"

L'équivalence est définie par :

"$P \Leftrightarrow Q$" est la proposition "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow p$".

On dira "P est équivalent à Q" ou "P équivaut à Q" ou "P si et seulement si Q. Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité 5 est :

P	V	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 5 – Table de vérité de "$P \Leftrightarrow Q$"

Exemple 1.6.

▶ *"$P \Leftrightarrow \overline{P}$" est une équivalence toujours fausse (quelle que soit la proposition P).*

1.1.3 Quelques proprietés

Soient P, Q et R trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
2. $(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$
3. $(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$
4. $(\overline{PetQ}) \Leftrightarrow (\overline{P}ou\overline{Q})$
5. $(\overline{PouQ}) \Leftrightarrow (\overline{P}et\overline{Q})$
6. $(Pet(QouR)) \Leftrightarrow ((PetQ)ou(PetR))$
7. $(Pou(QetR)) \Leftrightarrow ((PouQ)et(PouR))$
8. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

1.1.4 Quantificateurs

a. Le quantificateur $\forall$: "pour tout"

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple "$x^4 \geq 2$", la proposition $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.
La proposition

$$\forall x \in \mathbb{E}, \;\; P(x)$$

est vraie lorsque les propositions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble $\mathbb{E}$.
On lit "pour tout x appartenant à $\mathbb{E}$, $P(x)$", plus simple "pour tout x appartenant à $\mathbb{E}$, $P(x)$ est vraie".

Exemple 1.7.

▶ *"$\forall n \in \mathbb{N}$, n est paire" est une proposition fausse.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$" est une proposition fausse.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$" est une proposition vraie.*
▶ *"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$" est une proposition fausse.*

b. Le quantificateur $\exists$: "il existe"

La proposition

$$\exists x \in \mathbb{E}, \;\; P(x)$$

est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de $\mathbb{E}$ pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit "il existe x appartenant à $\mathbb{E}$ tel que $P(x)$ (soit vraie)".

Exemple 1.8.

▶ *"$\exists n \in \mathbb{N}$, $n+2$ est impaire" est une proposition vraie.*
▶ *"$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 2n$" est vraie car il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que la proposition est vraie).*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \geq 0$" est vraie car par exemple x = 1 vérifie bien la propriété).*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = -1$" est une proposition fausse puisque aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.*
▶ *"$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 1$" est une proposition vraie car on prend par exemple $x = 1$ ou $x = -1$.*

c. La négation des quantificateurs

La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$" est "$\exists x \in \mathbb{R}$, $\overline{P(x)}$".

Exemple 1.9.

▶ *La négation de*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \;\; x^2 \geq 1$$

est

$$\exists x \in [1, +\infty[, \;\; x^2 < 1.$$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) (ou $\overline{x^2 \geq 1}$) mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

La négation de "$\exists x \in \mathbb{R}$, $P(x)$" est "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{P(x)}$".

Exemple 1.10.

▶ *La négation de*

$$\exists x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + x + 1 = 0$$

est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + x + 1 \neq 0.$$

Remarque 1.2. L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0. \text{ et } \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$$

sont différentes.
On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie "Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone",

bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : "Il existe un numéro, pour toutes les personnes". Ce serait le même numéro pour tout le monde !

1.2 Méthodes du raisonement mathématiques

1.2.1 Raisonnement direct

On veut démontrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie. Donc on suppose que P est vraie et on cherche est ce que Q est vraie.

Exemple 1.11.

▶ *Montrer que "$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$" est vraie.*
On suppose que "$x^2 - 4 = 0$" est vraie. Est ce que c'est vraie pour "$x = 2$ ou $x = -2$" ?
On a "$x^2 - 4 = 0$ puis "$(x-2)(x+2) = 0$ qui donne "$(x-2) = 0$ ou $(x+2) = 0$" à la fin on obtient $x = 2$ ou $x = -2$" donc c'est vraie.

1.2.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$\text{La proposition "}p \Rightarrow Q\text{" est équivalent à "}\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\text{".}$$

Donc si l'on souhaite montrer la proposition "$p \Rightarrow Q$", on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.12.

▶ *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair).*
La contraposée de la proposition (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair) est (n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair).
Comme n n'est pas pair, il es impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Puis

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$$

avec $l = k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ et donc n^2 est impair.
A la fin : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.
▶ *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que "$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$".*
La contraposée de la proposition

$$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$$

est

$$x \geq 2 \Rightarrow x^3 \neq 2.$$

On a $x \geq 2$ et puis $x^3 \geq 2^3 = 8 > 2$, donc $x^3 \neq 2$, ce qui prouve la contraposée.
▶ *Montrer que si x et y sont des réels distincts de 1, et si $x \neq y$, alors $\frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y}$.*
La contraposée de la proposition

$$x \neq y \Rightarrow \frac{1}{1-x} \neq \frac{1}{1-y}$$

est

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow x = y$$

avec x et y sont des réels distincts de 1.
C'est vrai, car

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y} \Rightarrow 1 - x = 1 - y \Rightarrow x = y.$$

▶ *Soient x, y de $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$x \neq -3 \text{ et } y \neq -1 \Rightarrow x + 3y + xy + 6 \neq 3.$$

La contraposée de la proposition

$$x \neq -3 \text{ et } y \neq -1 \Rightarrow x + 3y + xy + 6 \neq 3$$

est

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } y = -1.$$

On a

$$\begin{aligned} x + 3y + xy + 6 = 3 &\Rightarrow x + y(3 + x) + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x)(y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow (3 + x) = 0 \text{ ou } (y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = -3 \text{ ou } y = -1. \end{aligned}$$

Donc c'est vraie.

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. Le raisonement consiste à supposer qu'elle est fausse (c'est-à-dire ($\overline{P}$ est vraie).

Ou encore le raisonnement par l'absurde pour montrer "$P \Rightarrow Q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \Rightarrow Q$" est vraie.

Exemple 1.13.

► *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que $\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1$.*
On suppose que $\exists n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1$. On a

$$\begin{aligned}\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1 \quad &\Rightarrow \quad 6n+3 > (n+2)^2 \\ &\Rightarrow \quad 6n+3 > n^2+4n+4 \\ &\Rightarrow \quad 0 > n^2-2n+1 \\ &\Rightarrow \quad (n-1)^2 < 0, \textit{ impossible}\end{aligned}$$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1$ est vraie.
► *Soient x, y de $\mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que*

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \textit{ ou } y = -1.$$

On suppose que "$x + 3y + xy + 6 = 3$" et on montre le contraire de "$x = -3$ ou $y = -1$" c'est-à-dire "$x \neq -3$ et $y \neq -1$".
On a

$$\begin{aligned}x + 3y + xy + 6 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x + y(3+x) + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (3+x)(y+1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (3+x) = 0 \textit{ ou } (y+1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = -3 \textit{ ou } y = -1,\end{aligned}$$

Contradiction avec "$x \neq -3$ et $y \neq -1$". donc la proposition

$$x + 3y + xy + 6 = 3 \Rightarrow x = -3 \textit{ ou } y = -1$$

est vraie.

1.2.4 Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type

$$\forall x \in \mathbb{E}, \; P(x)$$

est fausse, alors il suffit de trouver $x \in \mathbb{E}$ tel que $P(x)$ soit fausse.
Trouver un tel x c'est trouvé un contre-exemple à la proposition "$\forall x \in \mathbb{E}, \; P(x)$".

Exemple 1.14.

▶ *Soit la proposition suisvante :*

$$"\forall n \in \mathbb{N},\ n \textit{ est pair}",$$

est une proposition fausse car $n = 3$ est impair (n=3 est un contre exemple)

1.2.5 Raisonnement par récurrence

On donne un nom, par exemple $P(n)$ à la propiété (c'est-à-dire la formulle) qu'on veux démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq k(k \geq 0)$, on procède en trois étapes :
Etape 1 (initialisation) : on montre que la propriété $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $P(n)$ est vraie pour $n = k$ (valeur initiale de l'ensemble).
Etape 2 (.....) : on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ est vraie aussi ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie).
Etape 3 (Conclusion) : on rédige alors, on a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemple 1.15.

▶ *Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n) : \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

$$\textit{On a } \textstyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 \textit{ et } \frac{0(0+1)}{2} = 0. \textit{ Donc } P(0) \textit{ est vraie.}$$

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= (\sum_{k=0}^{n} k) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \ldots\ldots parceque P(n) est vraie\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
▶ *Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

On a $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (\sum_{k=0}^{n} k^2) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ ...... } parceque P(n) est vraie \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
► *Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^4}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

On a $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= (\sum_{k=0}^{n} k^3) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \ldots\ldots parceque P(n) est vraie \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
► *Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*(\forall n \geq 1)$*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(1)$ est vraie.

On a $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ ...... } parceque P(n) est vraie \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)}{(n+2)}.
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
► *Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \geq 0$),*

$$3^{2n} - 1 \text{ est un multiple de 8.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P la propriété portant sur n

$$P(n): \quad \exists k \in \mathbb{N}, \ 3^{2n} - 1 = 8k.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(0)$ est vraie.

On a $3^{2\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 8k$. Donc il existe $k = 0$ pour que $P(0)$ est vraie.

Etape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons alors que $P(n+1)$ est vraie.
Pour que $P(n+1)$ soit vraie il faut démontrer que

$$\exists k' \in \mathbb{N}, \ 3^{2n+2} - 1 = 8k'.$$

On a

$$\begin{aligned}
3^{2n} - 1 = 8k &\implies 3^2(3^{2n} - 1) = 3^2(8k) \\
&= 3^{2n+2} - 9 = 8(3^2 k) \\
&= 3^{2n+2} - 1 - 8 = 8(3^2 k) \\
&= 3^{2n+2} - 1 = 8(3^2 k) + 8 \\
&= 3^{2n+2} - 1 = 8(3^2 k + 1)
\end{aligned}$$

si on prend $k' = (3^2k+1)$ *on aura* $3^{2n+2} - 1 = 8k'$, *donc* $P(n+1)$ *est vraie.*
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
▶ *Montrez par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geq 2$

$$5^n \geq 4^n + 3^n.$$

Soit $n \geq 2$. *On note* P *la propriété portant sur* n

$$P(n): \quad 5^n \geq 4^n + 3^n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $n \geq 2$, $P(n)$ *est vraie.*
Etape 1 (initialisation) : Montrons que $P(2)$ *est vraie.*

$$\text{On a } 5^2 = 25 \geq 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25. \text{ Donc } P(2) \text{ est vraie.}$$

Etape 2 : Soit $n \geq 2$. *Supposons* $P(n)$ *vraie et montrons alors que* $P(n+1)$ *est vraie.*
Pour que $P(n+1)$ *soit vraie il faut démontrer que*

$$5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
5^n \geq 4^n + 3^n &\Rightarrow 5 \times (5^n \geq 4^n + 3^n) \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq 5 \times (4^n + 3^n) \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq (4+1)4^n + (3+2)3^n \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 4^n + 3^{n+1} + 2 \times 3^n \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1} + 4^n + 2 \times 3^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1} \\
&\Rightarrow 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ *est donc vraie.*
Etape 3 (Conclusion) : On a donc démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 2$.

2 Ensembles, Relations et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.
▶ Un ensemble est une collection d'objets rassemblés selon une propriété commune. Chaque objet est un élément de l'ensemble.
▶ On appelle le nombre d'éléments d'un ensemble E le cardinal et on le note $card(E)$. ▶ On note par $\emptyset$ l'ensemble vide.

Exemple 2.1.
▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers naturels.*
▶ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers relatifs.*
▶ *ensemble des algériens.*
▶ *ensemble des nombres impairs.*
▶ *card($\mathbb{N}$) = infini et card($\emptyset$) = 0.*

Remarque 2.1.
▶ Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est-à-dire $x \neq \{x\}$.

Définition 2.2.
▶ $x \in E$ (**appartenance**) signifie x est un élément de l'ensemble E.
▶ $x \notin E$ signifie x n'est pas un élément de l'ensemble E.

2.1.2 Opérations sur les ensembles

a. Intersection "$\cap$"
$x \in E \cap F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ et $x \in F$", et on écrit

$$E \cap F = \{x/x \in E \ \ et \ \ x \in F\}.$$

Exemple 2.2.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2020, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \{2020\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \emptyset$.

Remarque 2.2. E et F sont disjoints signifie que $E \cap F = \emptyset$. Autrement dit, $E \cap F = \emptyset$ signifie $(\forall x \in E,\ x \notin F)$ et $(\forall x \in F,\ x \notin E)$.

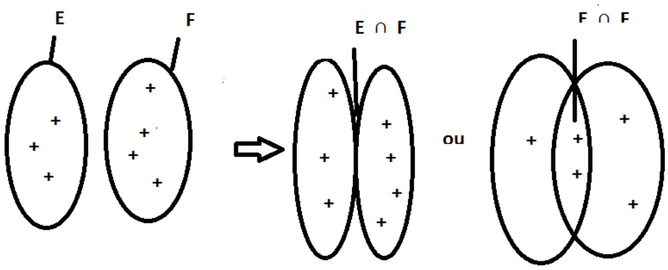

FIGURE 1 – $E \cap F$

b. Réunion "$\cup$"

$x \in E \cup F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ ou $x \in F$", et on écrit

$$E \cup F = \{x/x \in E \ \ ou \ \ x \in F\}.$$

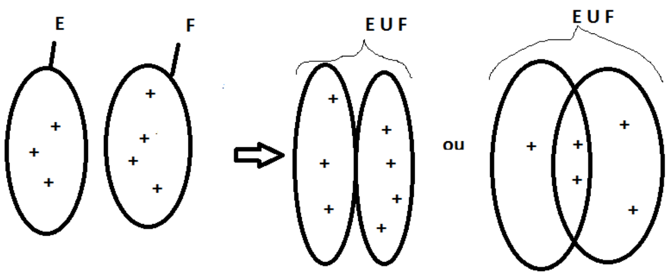

FIGURE 2 – $E \cup F$

Exemple 2.3.

► $E = \{1, 2, 6, 7\},\ F = \{-1, 6\},\ alors\ E \cup F = \{-1, 1, 2, 6, 7\}.$
► $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\},\ F = \emptyset,\ alors\ E \cup F = \{2017, 2018, 2019, 2020\}.$

c. Inclusion "$\subset$" et égalité "$=$"

$E \subset F$ signifie ($\Leftrightarrow$) que tous les éléments de E sont dans F, autrement dit

$$\forall x,\ \ x \in E \Rightarrow x \in F.$$

Remarque 2.3. $E = F$ signifie $E \subset F$ et $F \subset E$, autrement dit $\forall x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

Exemple 2.4.

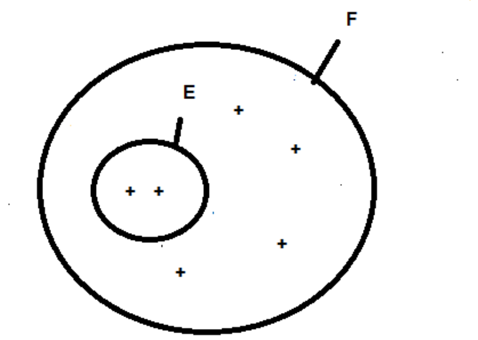

FIGURE 3 – $E \subset F$

▶ $E = \{-6, 0, 7, 9\}$, $F = \{-6, -5, -3, 0, 7, 8, 9\}$, *alors* $E \subset F$ *mais* $F \not\subseteq E$.

d. Différence et Complémentaire de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et A noté $E - A$ est l'esemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A et on écrit

$$E - A = \{x/x \in E \ \ et \ \ x \notin A\}.$$

Dans le cas où $A \subset E$, alors $E - A$ est dit complémentaire de A dans E et il es noté "C_E^A ou $\overline{A}$.

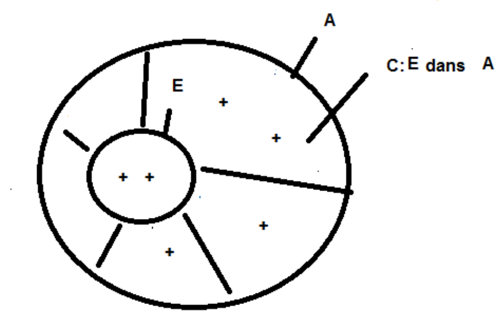

FIGURE 4 – C_E^A : complémentaire de A dans E

Exemple 2.5.

▶ $A = \{1, 6\}$, $E = \{1, 2, 6, 7\}$, *alors* $C_E^A = \{2, 7\}$.
▶ $C_A^A = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

2.1.3 Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (**commutativité**)
2. $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B \cup) C = A \cup (B \cup C)$. (**associativité**)
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (**distributivité**)
5. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ et $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
6. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

Exemple 2.6. *Soient $A \subset E$ et $A \subset E$. Démonter les lois suivantes :*

1. $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2. $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

1.

$$\begin{aligned} Soit \ x \in C_E^{A \cap B} &\Leftrightarrow x \in E \ et \ x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \ et \ (x \notin A \ ou \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \ et \ x \in C_E^A) \ ou \ (x \in E \ et \ x \in C_E^B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2.

$$\begin{aligned} C_E^{A \cup B} &= \{x / x \in E \ et \ x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x / x \in E \ et \ (x \notin A) \ et \ (x \notin B)\} \\ &= \{x / x \in E \ et \ (x \in C_E^A \ et \ x \in C_E^B)\} \\ &= \{x / x \in E \ et \ x \in E \ et \ x \in C_E^A \ et \ x \in C_E^B\} \ldots (car \ \ E \cap E = E) \\ &= \{x / x \in E \ et \ x \in C_E^A \ et \ x \in E \ et \ x \in C_E^B\} \\ &= \{x / x \in (C_E^A \cap C_E^B)\} \\ &= (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

2.1.4 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E, on désigne par $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E c'est-à-dire

$$P(E) = \{A/A \subset E\}.$$

Remarque 2.4. L'ensemble vide ($\emptyset$) et E sont des éléments de $P(E)$. Le nombre d'ensembles de $P(E)$ est $2^{card(E)}$.

Exemple 2.7. *Si on prend* $E = \{1, 2, 3\}$, *alors*

$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

2.1.5 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si

1. Tout élément de A n'est pas vide.
2. Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
3. La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 2.8. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$. *Si on prend alors*
▶ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ *est une partition de E.*
▶ $A = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ *est une partition de E.*
▶ $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de E.*
▶ $A = \{\{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de E.*

2.1.6 Produit cartésien

Définition 2.3. L'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé **produit cartésien** de E et F et il est noté $E \times F$, autrement dit,

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \ \ et \ \ y \in F\}.$$

Exemple 2.9.
▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(n, m)/n \in \mathbb{N} \ et \ m \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R} \ et \ z \in \mathbb{R}\}$.

2.1.7 Propriétés du produit cartésien

Soient E, F, G et H quatres ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Remarque 2.5.
► $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.
Un contre exemple : si $E = F = \{0\}, G = H = \{1\}$, alors $E \cup G = \{0, 1\}$ et $F \cup H = \{0, 1\}$.
Et on a aussi, $E \times F = \{(0, 0)\}$, $G \times H = \{(1, 1)\}$ et , $(E \cup G) \times (F \cup H) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Exemple 2.10. *Soient A, B, C et D des ensembles. Démonter la loi suivante :*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \; et \; (x,y) \in (C \times D)\\
&\Leftrightarrow x \in A \; et \; y \in B \; et \; x \in C \; et \; y \in D\\
&\Leftrightarrow x \in A \; et \; x \in C \; et \; y \in B \; et \; y \in D\\
&\Leftrightarrow (x \in A \; et \; x \in C) \; et \; (y \in B \; et \; y \in D)\\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \; et \; y \in (B \cap D)\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D),
\end{aligned}$$

donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2.2 Relations

2.2.1 Relations binaires

Définition 2.4. On appelle une relation binaire sur un ensemble E, toute opération (application, un lien) $\mathcal{R}$ entre deux objets. On note $x\mathcal{R}y$ et on lit "x est en relation avec y".

Définition 2.5. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite

1. réflexive si : $\forall\ x \in E$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),
2. symétrique si : $\forall\ x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
3. antisymétrique si : $\forall\ x, y \in E$,($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$,
4. transitive si : $\forall\ x, y, z \in E$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 2.11.

1. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.
2. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.
3. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ *est multiple de 2.*
4. Soient A et B deux ensembles. $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

2.2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.6. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur une ensemble E est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 2.12. *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Corrigé

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :
   (a) réflexive si : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),
   (b) symétrique si : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
   (c) transitive si : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
   Alors,
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}x &\Rightarrow x^2 - x^2 = x - x \\ &\Rightarrow 0 = 0\ (est\ vraie), \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow (-1) \times (x^2 - y^2) = (-1) \times (x - y) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{1}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z, \tag{2}$$

puis,

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

Définition 2.7. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On dit que deux éléments de x et y sont équivalent si $x\mathcal{R}y$.

Définition 2.8. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On appelle classe d'équivalence d'un éléments y d'un ensemble E l'ensemble

$$\overline{y} = \dot{y} = \{x \in E / x\mathcal{R}y\}.$$

Définition 2.9. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On appelle ensemble quotient de E par la relation R, l'ensemble des classes d'équivalence et on note $E/_R$.

Exemple 2.13. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la relation* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $x^2 - x = y^2 - y$.

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*
2. *Calculer la classe d'équivalence de 0, 2 et 4.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si :* $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$ *(est vraie),*
   (b) *symétrique si :* $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x,$
   (c) *transitive si :* $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R},\ (\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

   Alors,

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$x\mathcal{R}x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = x^2 - x \textit{ est vraie},$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \\ &\Rightarrow (-1) \times (x^2 - x) = (-1) \times (y^2 - y) \\ &\Rightarrow -x^2 + x = -y^2 + y \\ &\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x, \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

   (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \tag{3}$$

   et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow y^2 - y = z^2 - z, \tag{4}$$

   puis,

$$\begin{aligned} (3) + (4) &\Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = y^2 - y + z^2 - z \\ &\Rightarrow x^2 - x = z^2 - z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est transitive.
   De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

2. *La classe d'équivalence de 0 :*

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 - x = 0^2 - 0 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x(x-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/(x=0) \text{ ou } (x-1=0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/(x=0) \text{ ou } (x=1)\} \\ &= \{0,1\}. \end{aligned}$$

Exemple 2.14. *On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ est un multiple de } 2.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),*
   (b) *symétrique si : $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,*
   (c) *transitive si : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

   Alors,
   $$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \text{ est un multiple de } 2,$$
   s'écrit aussi sous la forme
   $$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = 2k.$$

   (a) *$\forall x \in \mathbb{Z}$, on a*
   $$\begin{aligned} x\mathcal{R}x &\Rightarrow x - x = 0 = 2k \\ &\Rightarrow \text{il existe } (\exists)\ k = 0 \in \mathbb{Z} \text{ pour que } x\mathcal{R}x \text{ est vraie}, \end{aligned}$$
   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) *$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, on a*
   $$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k \\ &\Rightarrow (-1) \times (x-y) = (-1) \times (2k) \\ &\Rightarrow y - x = 2(-k) \\ &\Rightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y - x = 2k' \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k, \tag{5}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, y - z = 2k', \tag{6}$$

puis,

$$\begin{aligned}(5) + (6) \quad &\Rightarrow \quad x - y + y - z = 2k + 2k' \\ &\Rightarrow \quad x - z = 2(k + k') \\ &\Rightarrow \quad \exists k" = (k + k') \in \mathbb{Z}, x - z = 2k" \\ &\Rightarrow \quad x\mathcal{R}z,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

Exemple 2.15. *On définit sur $\mathbb{N}^2$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Calculer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall\ x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ (est vraie),*
   (b) *symétrique si : $\forall\ x, y, x', y' \in \mathbb{N}$, $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y)$,*
   (c) *transitive si : $\forall\ x, y, x', y', x", y" \in \mathbb{N}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x", y")) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x", y")$.*

   Alors,

   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$, *on a*

   $$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow x + y = x + y \text{ (est vraie)},$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{N}^2$, *on a*

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Rightarrow x+y'=x'+y\\ &\Rightarrow x'+y=x+y'\\ &\Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

(c) $\forall (x,y),(x',y'),(x",y")\in\mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x+y'=x'+y \tag{7}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow x'+y"=x"+y', \tag{8}$$

puis,

$$\begin{aligned}(7)+(8) &\Rightarrow x+y'+x'+y"=x'+y+x"+y'\\ &\Rightarrow x+y"=y+x"\\ &\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y"),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

2. *La classe d'équivalence de (0,0) :*

$$\begin{aligned}\overline{(0,0)} &= \{(x,y)\in\mathbb{N}^2/(x,y)\mathcal{R}(0,0)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{N}^2/x+0=0+y\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{N}^2/y=x\}\end{aligned}$$

donc la classe d'équivalence de (0,0) est l'ensemble des points (des couples (x,y)) de la droite $y=x$.

2.2.3 Relation d'ordre

Définition 2.10. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur une ensemble E est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 2.11. Soient E un ensemble et $\mathcal{S}$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\mathcal{S}$ est d'ordre total si

$$\forall x,y\in E,(x\mathcal{S}y)\ ou\ (y\mathcal{S}x).$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est-à-dire :

$$\exists x, y \in E, (x \not\mathcal{S} y) \; et \; (y \not\mathcal{S} x),$$

autrement dit

$$\exists x, y \in E, (x \, n'est \, pas \, en \, relation \, avec \, y) \; et \; (y \, n'est \, pas \, en \, relation \, avec \, x).$$

Exemple 2.16. *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2. *Cet ordre est-il total ?*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall \; x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),*
   (b) *antisymétrique si : $\forall \; x, y \in \mathbb{R}$,($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$,*
   (c) *transitive si : $\forall \; x, y, z \in \mathbb{R}$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

   Alors,

   (a) *$\forall x \in \mathbb{R}$, on a*

   $$x\mathcal{R}x \Rightarrow x \geq x \; (est \; vraie \; car \; x = x),$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) *$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a*

   $$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}x \;&\Rightarrow\; x \geq y \; et \; y \geq x \\ &\Rightarrow\; x \geq y \geq x \\ &\Rightarrow\; x = y, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\Rightarrow x \geq y \text{ et } y \geq z \\ &\Rightarrow x \geq y \geq z \\ &\Rightarrow x \geq z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

2. *Dans tous les cas x et y sont comparables, donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x).$$

Exemple 2.17. *On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \geq x' \text{ et } y \geq y'.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*

2. *Cet ordre est-il total ?*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ (est vraie),*
   (b) *antisymétrique si : $\forall\ x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)) \Rightarrow (x, y) = (x', y')$,*
   (c) *transitive si : $\forall\ x, y, x', y', x", y" \in \mathbb{R}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x", y")) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x", y")$.*

   Alors,

   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

   $$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow (x \geq x \text{ et } y \geq y) \text{ est vraie car } (x = x \text{ et } y = y),$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, *on a*

   $$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x, y) &\Rightarrow (x \geq x' \text{ et } y \geq y') \text{ et } (x' \geq x \text{ et } y' \geq y) \\ &\Rightarrow x \geq x' \text{ et } y \geq y' \text{ et } x' \geq x \text{ et } y' \geq y \\ &\Rightarrow x \geq x' \text{ et } x' \geq x \text{ et } y \geq y' \text{ et } y' \geq y, \\ &\Rightarrow (x \geq x' \geq x) \text{ et } (y \geq y' \geq y) \\ &\Rightarrow (x = x') \text{ et } (y =' y) \\ &\Rightarrow (x, y) = (x', y'), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(c) $\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\ et\ (x',y')\mathcal{R}(x",y") &\Rightarrow (x \geq x'\ et\ y \geq y')\ et\ (x' \geq x"\ et\ y' \geq y")\\ &\Rightarrow x \geq x'\ et\ y \geq y'\ et\ x' \geq x"\ et\ y' \geq y"\\ &\Rightarrow (x \geq x'\ et\ x' \geq x")\ et\ (y \geq y'\ et\ y' \geq y")\\ &\Rightarrow (x \geq x' \geq x")\ et\ (y \geq y' \geq y")\\ &\Rightarrow (x \geq x")\ et\ (y \geq y")\\ &\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y"),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'ordre.

2. *$\mathcal{R}$ est un relation d'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$ car, par exemple les couples (0,1) et (1,0) ne sont pas comparables, c'est-à-dire :*

$$(0,1)\mathcal{R}(1,0) \Leftrightarrow ((0 \geq 1)\ et\ (1 \geq 0))\ est\ fausse,$$

$$(1,0)\mathcal{R}(0,1) \Leftrightarrow ((1 \geq 0)\ et\ (0 \geq 1))\ est\ fausse\ aussi,$$

et donc,

$$\exists (0,1),(1,0) \in \mathbb{R}^2, ((0,1)\ \not\mathcal{R}(1,0))\ et\ ((1,0)\ \not\mathcal{R}(0,1)).$$

2.3 Applications

2.3.1 Généralités

Soient E et F deux ensembles :

1. On appelle application f de E dans F une relation de E dans F dont tout élément x de E on lui correspond un et un seul élément y de F.
2. E est appellé E l'ensemble de départ ou des antécédants.
3. F est appellé l'ensemble d'arrivée ou des images.
   (a) x est dit antécédant de y par f (dans E).
   (b) y est appelé l'image de x par f (dans F) et on le note $f(x) = y$.
4. En général, on schématise une application f par

$$\begin{aligned} f : E &\to F\\ x &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

Remarque 2.6.

1. Deux applications f et g sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux (en le même ensemble de départ E), leurs ensembles d'arrivée sont égaux (en le même ensemble d'arrivée F) et si $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.
2. L'ensemble des couples $\{(x, f(x))/x \in E\}$ est une partie de l'ensemble $E\times F$, qu'on appelle graphe de l'application f.

Exemple 2.18.

On définit l'application identité par

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

On définit l'application constante par (c une constante de $\mathbb{R}$*)*

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) = c. \end{aligned}$$

On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

2.3.2 Restriction et prolongement d'une application

Définition 2.12. Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \to F$ une application. L'application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

2.3.3 Injection, surjection et bijection

Définition 2.13. Soit $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est injective si tout élément y de F possède au plus un antécédent x de E par f. Donc deux éléments différents de E ont des images différentes de F par f, autrement dit :

$$\forall x, x' \in E,\ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall x, x' \in E,\ \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

2. On dit que f est surjective si tout élément y de F possède au moins un antécédent x de E par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : \ \ y = f(x).$$

3. On dit que f est bijective si f est à la fois injective et surjective, et on écrit

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : \ \ y = f(x).$$

Propriétés

1. f est injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seul solution.

Proposition 2.14. *Soient $f : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *gof est injective $\Rightarrow$ f est injective.*
2. *gof est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.*
3. *gof est bijective $\Rightarrow$ f est injective et g est surjective.*

Exemple 2.19. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$. Montrons que f est injective : soit $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x + 1 = x' + 1 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

donc f est injective.
f est aussi surjective. Il s'agit de trouver un élément y de $\mathbb{R}$ qu'a d'antécédent par f. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f(x) = y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

Exemple 2.20. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$.*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow 3x + 5 = 3x' + 5 \\ &\Rightarrow 3x = 3x' \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

   donc f est injective.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow 3x + 5 = y \\ &\Rightarrow 3x = y - 5 \\ &\Rightarrow x = \frac{y-5}{3}, \end{aligned}$$

alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = \frac{y-5}{3}$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.

(c) f injective et surjective, donc f est bijective.

En pratique Si $f : E \to F$ est donnée.

1. Pour savoir si f est injective, on suppose $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
2. Pour savoir si f est surjective, on se donne $y \in F$ et on cherche une solution $x \in E$ de l'équation $f(x) = y$.
3. Pour savoir si f est bijective, on montre que $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in E$.

Exemple 2.21. *1. On considère*

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) On a $f_1(x) = f_1(x') = 1$ et f_1 n'est donc pas injective.

(b) Comme $y = -1$ $(y < 0)$ n'a pas d'antécédent, f_1 n'est pas surjective.

2. On considère

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) On a $f_2(x) = f_2(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ car $x, x' \geq 0$.
f_2 est donc injective.

(b) Comme $y = -1$ n'a pas d'antécédent, f_2 n'est pas surjective.

3. On voit de mème que

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

n'est pas injective mais elle est surjective.

4. Dans le cas

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

est injective et surjective, elle est donc bijective.

2.3.4 Composition des applications

Définition 2.15. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. On appelle application composée de f et g, l'application $gof : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E,\ \ (gof)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.22. *Soient les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1. \end{aligned}$$

Alors,

$$gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1.$$

$$fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto fog(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2x+2.$$

2.3.5 Applications réciproques

Définition 2.16. Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par

$$f^{-1} : F \to E,\ et\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Remarque 2.7. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 2.17. *Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie*

$$fof^{-1} = Id_F\ et\ f^{-1}of = Id_E.$$

On rappelle

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 2.18. *Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *f et g sont injectives $\Rightarrow gof$ est injective.*

2. *f et g sont surjectives $\Rightarrow$ gof est surjective.*
3. *f et g sont bijectives $\Rightarrow$ gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.*

Exemple 2.23. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$.*

1. *Montrer que f est bijective et donner son application réciproque f^{-1}.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x - 2 = x' - 2 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$
   donc f est injective.
   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x - 2 = y \\ &\Rightarrow x = y + 2, \end{aligned}$$
   alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = y + 2$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.
   (c) *f injective et surjective, donc f est bijective.*
   (d) *f est bijective donc il existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et*
   $$f(x) = y \Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2,$$
   donc
   $$f^{-1}(y) = x = y + 2,$$
   et on écrit :
   $$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = y + 2. \end{aligned}$$

2.3.6 Image directe et image réciproque

1. **Image directe :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble $f(A)$ de F :
   $$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}.$$
   Remarque 2.8. (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit a de E, alors $f(\{a\}) = f(a)$.

Exemple 2.24. *Soit l'ensemble* $A = [-1, 2]$ *et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x^2 + 2.$$

On a

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}/x \in A\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}/x \in [-1, 2]\} \\ &= [2, 5] \cup [2, 14] \\ &= [2, 14]. \end{aligned}$$

2. **Image réciproque :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de F ($B \subset F$). On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de F :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

Remarque 2.9. (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit b de F, alors $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E/f(x) = b\}$.

Exemple 2.25. *Soit l'ensemble* $B = [-1, 3]$ *et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 1.$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-1, 3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x^2 - 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \mathbb{R} \cap [-2, 2] \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

3. **Propriétés :** Soit $f : E \to F$ une application. Soient E_1, E_2 deux parties de E et F_1, F_2 deux parties de F. Alors :
   (a) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \subset f(E_2)$.
   (b) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.
   (c) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$.
   (d) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.

2.3.7 Exercices corrigés

Exemple 2.26. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'éxpression de sa réciproque.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.*
   (a) *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2, \end{aligned}$$
   autrement dit, pour $x_1 = 3$ et $x_2 = -3$, on a $f(3) = f(-3) = 8$ mais $x_1 \neq x_2$, donc f n'est pas injective.
   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1, \end{aligned}$$
   si $(y + 1 < 0)$ c'est-à-dire $(y < -1)$: l'équation $f(x) = y$ ne possède pas de solution, par exemple pour $y = -3$, on a :
   $$x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2,$$
   cette équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas surjective.
2. *Soit $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$.*
   (a) *Soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$, on a*
   $$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ car } x_1, x_2 \geq 1 \text{ (on rejette } x_1 = -x_2) \end{aligned}$$

donc g est injective.

(b) *Soit $y \in [0,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y+1 \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}, \end{aligned}$$

on observe que $y \geq 0 \Rightarrow y+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} \geq 1$ c'est-à-dire $\sqrt{y+1} \in [1,+\infty[$, et on rejette $-\sqrt{y+1} \notin [1,+\infty[$.
Donc $\forall y \in [0,+\infty[$, $\exists x = \sqrt{y+1} \in [1,+\infty[$: tel que $g(x) = y$, à la fin g est surjective.

(c) *g est injective et surjective donc g est bijective et on écrit :*

$$\forall y \in [0,+\infty[, \ \ \exists! x = \sqrt{y+1} \in [1,+\infty[,$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y+1},$$

donc

$$\begin{aligned} g^{-1} : [0,+\infty[&\to [1,+\infty[\\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y+1}. \end{aligned}$$

Exemple 2.27. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent $g : [-1,+1] \to [-1,+1]$ telle que $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; montrer que g est bijective.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.*
   (a) *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1x_2 = 1, \end{aligned}$$

autrement dit, pour $x_1 = 2$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$*, on a* $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ *mais* $x_1 \neq x_2$*, donc* f *n'est pas injective.*

(b) *Soit* $y \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

équation à résoudre en x *:* $\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$.
Dans le cas, si $y < -1$ *ou* $y > 1$*, le* $\triangle < 0$*, donc l'équation* $f(x) = y$ *ne possède pas de solution, par exemple pour* $y = 3$*, on a :*

$$\frac{2x}{x^2+1} = 3 \Rightarrow 2x = 3(x^2+1) \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0,$$

$\triangle = 4 - 4(9) = -32 < 0$*, donc l'équation* $f(x) = 3$ *ne possède pas de solution* x *dans* $\mathbb{R}$*, autrement dit* $y = 3$ *ne possède pas d'antécédent par* f *et donc* f *n'est pas surjective.*

2. *Soit* $g : [-1,+1] \to [-1,+1]$ *;* $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

(a) *Soient* $x_1, x_2 \in [-1,+1]$*, on a*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

on enlève (supprime) $x_1x_2 = 1$ *car, si* $x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$ *(avec* $x_1 \neq 0$ *et* $x_2 \neq 0$*) et puisque* $\forall x_2 \in [-1,+1]$*, c'est-à-dire* $-1 \leq x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \geq 1$ *ou* $x_1 = \frac{1}{x_2} \leq -1$ *impossible car* $x_1 \in [-1,+1]$.
Puisque

$$\forall x_1, x_2 \in [-1,+1], \;\; g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

donc g *est injective.*

(b) *Soit* $y \in [-1, +1]$*, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

$\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$ *et comme* $y \in [-1, +1]$*, alors l'équation* $f(x) = y$ *(*$yx^2 - 2x + y = 0$*) possède deux solutions,telle que*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{(1-y^2)}}{y}, \\ x_2 &= \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{(1-y^2)}}{y}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 + \sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1 + \sqrt{(1-y^2)})(1 - \sqrt{(1-y^2)})}{y(1 - \sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1 - (1-y^2))}{y(1 - \sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1 - \sqrt{(1-y^2)})}, \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1 - \sqrt{(1-y^2)})(1 + \sqrt{(1-y^2)})}{y(1 + \sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1 - (1-y^2))}{y(1 + \sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1 + \sqrt{(1-y^2)})}, \end{aligned}$$

comme $y \in [-1, +1]$*, donc on prend* $x_2 \in [-1, +1]$ *et on rejette* x_1 *car* $x_1 \notin [-1, +1]$.
Donc $\forall y \in [-1, +1]$, $\exists x = x_2 = \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y} \in [-1, +1]$ *: tel que* $g(x) = y$*, à la fin* g *est surjective.*

3 Fonctions réelles à une variable

3.1 Généralités sur les fonctions numériques

Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On appelle fonction numérique définie dans un domaine X (on dit aussi fonction réelle), toute application f telle que à chaque point x de X, on fait correspondre un seul élément y de $\mathbb{R}$. Et on écrit
$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$
X est le domaine de définition de la fonction f.

2. On appelle graphe d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, l'ensemble
$$G(f) = \{(x, y)/x \in X \; et \; y = f(x)\}.$$

3. **Opérations sur les fonctions réelles** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$.
   (a) On dit que f est égale à g si et seulement si $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.
   (b) On dit que f est inférieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$.
   (c) On dit que f est supérieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in X$.
   (d) La somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.
   (e) Le produit : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, $\forall x \in X$.
   (f) Le rapport : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in X$ et $g(x) \neq 0$.

4. **Propriétés générales des fonctions**
   (a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite paire si :
$$\forall x \in X, \; -x \in X \; on \; a \; f(-x) = f(x).$$
   Exemple 3.1. $f(x) = \cos(x)$ *est paire car on a*
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x).$$
   (b) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite impaire si :
$$\forall x \in X, \; -x \in X \; on \; a \; f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3.2. $f(x) = \sin(x)$ *est impaire car on a*

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = f(x).$$

(c) On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est périodique si $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

i. $x + \alpha \in X$,

ii. $f(x + \alpha) = f(x)$.

La plus petite valeur positive de α est appelée la période de f.

Exemple 3.3. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :* $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, *et $\alpha = 2\pi$ est la période de la fonction* $\cos(x)$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

(d) Fonctions monotones. Soit $f : X \to \mathbb{R}$, f est dite

i. croisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

ii. strictement croisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

iii. décroisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

iv. strictement décroisssante si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemple 3.4. *Les fonctions exponentielle exp* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et logarithme ln* :$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

(e) Fonctions bornées. La fonction f est dite

i. majorée sur X si $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$, $\forall x \in X$;

ii. minorée sur X si $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m$, $\forall x \in X$;

iii. bornée sur X si $\exists M, n \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in X$;

Exemple 3.5. *La fonction* $f(x) = \sin(x)$ *est bornée car on a :*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.6. *1.* $f(x) = x^2$ *est une fonction paire,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *;*

2. $f(x) = x$ *est une fonction impaire,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *;*

3. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ *est une fonction paire,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *;*

4. $f(x) = sin(x)$ *est une fonction impaire,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *;*

5. $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ *est une fonction paire,* $\forall x \in \mathbb{R}^*$ *;*

6. $f(x) = cos(x)$ *est une fonction paire,* $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.2 Limite d'une fonction

3.2.1 Limite en un point

Définition 3.1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de X ou une extrémité de X. Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0,\ \forall x \in X, \big[\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon\big].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Remarque 3.1. N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ. Pour marquer cette dépendance on écrit $\delta(\epsilon)$.

Exemple 3.7. 1. *Montrer que la fonction $f(x) = 7x - 3$ admet pour limite $l = 11$ en $x = 2$.*
On a

$$\begin{aligned} \mid f(x) - l \mid &= \mid (7x - 3) - 11 \mid \\ &= \mid 7x - 14 \mid \\ &= \mid 7(x - 2) \mid \\ &= 7 \mid x - 2 \mid, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \mid f(x) - l \mid < \epsilon &\Rightarrow 7 \mid x - 2 \mid < \epsilon \\ &\Rightarrow \mid x - 2 \mid < \frac{\epsilon}{7}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\epsilon}{7} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \big[\mid x - 2 \mid < \delta = \frac{\epsilon}{7} \Rightarrow \mid f(x) - 11 \mid < \epsilon\big].$$

2. *Calculer la limite des fonctions suivantes :*

$$\lim_{x \to -3}(3x + 2) = -7,\ \lim_{x \to 1}(x - 1)^2 = 0,\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,\ \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3} = 6,$$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2-4)}{x-2} = 4$, *(ici $\frac{(x^2-4)}{x-2}$ n'est pas définie en 2).*

Proposition 3.2. *Si f admet une limite en un point x_0, cette limite est unique.*

Exemple 3.8. *Calculer la limite des fonctions suivantes :* $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ *n'est pas unique, elle est entre [-1,1], donc elle n'existe pas.*

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 et on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow f(x) > A\big].$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 et on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow f(x) < -A\big].$$

Remarque 3.2.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$. f est définie uniquement à droite de 0, donc

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

d'où la nécessité d'introduire les deux notions suivantes :

1. On dit que f a une limite à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x)$ existe et finie.
2. On dit que f a une limite à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x)$ existe et finie.

Exemple 3.9. *On a*

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty,\ \lim_{\substack{<\\ x\to 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty.$$

Théorème 3.4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *existe si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x) = l$ *($l \in \mathbb{R}$) existe, finie et unique.*

Remarque 3.3. $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 3.10. *Soit la fonction f définie comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x = 0$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} -x = 0,$$

donc la limite en 0 existe et égale à 0 c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemple 3.11. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 0 \\ x-1 & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x+1 = 1$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x-1 = -1$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *n'existe pas.*

3.2.2 Limite en l'infini

Définition 3.5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, +\infty[$.

Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,\ \big[x > B \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \epsilon\big].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,\ \big[x > B \Rightarrow f(x) > A\big].$$

Remarque 3.4. On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

3.2.3 Les formes indéterminées

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f+g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une **forme indéterminée**.
Voici quelques formes indéterminées (FI) dans le tableau (6) suivant :

$+\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \times \infty$

TABLE 6 – Quelques formes indéterminées

Exemple 3.12. *Déterminer, si elle existe, les limites de suivantes*

1.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty - \infty\ (FI)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-4}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-4}-x)\times(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}{(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{(\sqrt{x^2+3x-4}+x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(3-\frac{4}{x})}{x(\sqrt{x+3-\frac{4}{x}}+1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-\frac{4}{x})}{(\sqrt{x+3-\frac{4}{x}}+1)}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{x+2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{4}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(3-\frac{4}{x})}{(1+\frac{2}{x})} = 3.\end{aligned}$$

3.2.4 Propriétés sur les limites

Proposition 3.6. *Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, alors on a*

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \times g(x)] = l_1 \times l_2$.
3. $\lim_{x\to x_0} \lambda.g(x) = \lambda.l_2$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. *Si* $l_2 \neq 0$, *alors* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.
5. $\lim_{x\to x_0} \mid f(x) \mid = \mid l_1 \mid$.

Théorème 3.7. *Soient f, g, h trois fonctions définies dans un intervalle X (un voisinage de x_0) et telle que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \ \forall\, x \in X.$$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l = \lim_{x\to x_0} h(x)$, *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Exemple 3.13. *Etudier la limite de $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0. $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, on a*

$$\begin{aligned}
-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \quad & \Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2 \\
& \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}(-x^2) \leq \lim_{x\to+\infty}(x^2 \sin(\frac{1}{x})) \leq \lim_{x\to+\infty}(x^2) \\
& \Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to+\infty}(x^2 \sin(\frac{1}{x})) \leq 0)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient $\lim_{x\to+\infty}(x^2 \sin(\frac{1}{x})) = 0$.

3.3 Continuité d'une fonction

3.3.1 Continuité en un point

Définition 3.8. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

- On dit que f est continue en un point x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, \big[\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon \big],$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

• On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Définition 3.9. (**continuité à gauche et à droite**)
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

• Une fonction définie en x_0 et à droite de x_0 est continue à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

• Une fonction définie en x_0 et à gauche de x_0 est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

• f est continue en si x_0 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 3.14. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que g(0)= 1. Puis :
$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} g(x) = 1 = g(0)$ *donc g est continue à droite de* 0.
$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} g(x) = 0 \neq g(0)$ *donc g n'est pas continue à gauche de* 0.
Finalement, g n'est pas continue en 0.

Exemple 3.15. *Soit la fonction g définie comme suit*

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & si\ x \geq 0 \\ 1+x & si\ x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1+x & si\ x < 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} 1-x = 1,$$

et

$$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} 1+x = 1.$$

Finalement,

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} g(x) = 1 = g(0),$$

et donc g est continue en 0.

Proposition 3.10. ***(Opérations sur les fonctions continues)***
Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors

1. *$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $k_1 f + k_2 g$ est continue en x_0.*
2. *La fonction $f \times g$ est continue en x_0.*
3. *Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*
4. *La fonction $\mid f \mid$ est continue en x_0.*

Proposition 3.11. ***(Continuité des fonctions composées)***
Soient $f : X \to X'$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $gof : X \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

Remarque 3.5. f est dite discontinue en x_0 si

1. f n'est pas définie en x_0 ;
2. la limite en x_0 (à droite ou à gauche) existe mais différente de $f(x_0)$;
3. la limite en x_0 n'existe pas.

Définition 3.12. (**Prolongement par continuité**)
Si f n'est pas définie en x_0 (f définie sur $X - \{x_0\}$) et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on définit un prolongement par continuité de f en x_0 par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in X - \{x_0\} \\ l & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 3.16. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?*
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2,$$

on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ comme suit

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 3.17. *Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$. Voyons si g admet un prolongement par continuité en 0 ?*
On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$$

Elle est donc prolongeable par continuité en 0 *et son prolongement est la fonction* $\widetilde{g}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *comme suit*

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 2 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 3.18. *Soit* $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *pour* $x \in \mathbb{R}^*$.
On a

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

et par suite

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de h *en* 0.

3.3.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 3.13. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$ *;*
2. $f(a).f(b) < 0$.

Alors

$$\exists c \in]a, b[,\ f(c) = 0.$$

De plus, si f *est stictement monotone, alors le* c *est unique.*

Exemple 3.19. *Soit la fonction définie sur par* $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

1. *Montrer que la fonction est continue sur* $[-1, 2]$.
2. *Calculer* $f(-1)$ *et* $f(2)$.
3. *En déduire que l'équation* $x^3 + x^2 - x = 5$ *admet au moins une solution dans* $[-1, 2]$.

Corrigé

1. *La fonction* f *est une fonction polynôme, donc elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$.
2. *Calculer* $f(-1)$ *et* $f(2)$.
   D'une part, $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 5 = -4 < 0$. *D'autre part,* $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - (2) - 5 = 5 > 0$.
3. *D'une part,* f *est continue sur* $[-1, 2]$ *(d'après la première question). D'autre part, comme* $f(-1).f(2) < 0$ *(d'après la deuxième question), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $[-1, 2]$.

3.4 Dérivabilité d'une fonction

3.4.1 Définitions et propriétés

Définition 3.14. Soient X un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Remarque 3.6. Une autre écriture de la dérivée en un point :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to l} \frac{f(x+l) - f(x_0)}{l}.$$

Exemple 3.20. *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^3. \end{array}$$

Trouver la dérivée de f en un point x_0 de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) \\ &= 3x_0^2. \end{aligned}$$

Définition 3.15. (**Dérivée à gauche et à droite en un point**)
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

- On définit la dérivée à droite de f en x_0 par

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- On définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 3.21. *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x+2 & si\ x \geq 0 \\ 1-x & si\ x < 0. \end{array} \right. \end{array}$$

f est-elle dérivale en 0 ?
On a $f(0) = 3(0)+2 = 2$, autrement dit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x+2 & si\ x > 0 \\ f(0) = 2 & si\ x = 0 \\ 2-x & si\ x < 0, \end{array} \right.$$

puis,

$$\begin{array}{rcl} f'_d(0) & = & \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ & = & \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{(3x+2)-2}{x} \\ & = & \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{3x}{x} \\ & = & 3, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f'_g(0) & = & \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ & = & \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{(2-x)-2}{x} \\ & = & \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{-x}{x} \\ & = & -1, \end{array}$$

donc, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Définition 3.16. f est dérivable sur X si elle est dérivable en tout point de X et l'application

$$\begin{array}{rcl} f': & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Remarque 3.7. (Interprétation géométrique de la dérivée en un point)
Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tengente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x0))$.

Remarque 3.8. (Dérivabilité et continuité)
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse en général.

Exemple 3.22. *Exemple : soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & si\, x \geq 0 \\ -x & si\, x < 0. \end{cases} \end{array}$$

On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} x = 0 = f(0) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} -x = 0 = f(0) = 0$$

donc f est continue en 0. Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\begin{array}{rcl} f'_d(0) & = & \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ & = & \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \dfrac{(x) - 0}{x} \\ & = & 1, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f'_g(0) & = & \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ & = & \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \dfrac{(-x) - 0}{x} \\ & = & -1, \end{array}$$

donc f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.
Conclusion : f est continue en 0 *mais elle n'est pas dérivable en 0.*

3.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3.17. *Soient f et g deux fonctions dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(h.f)$, $h \in \mathbb{R}$, $f+g$, $f.g$ sont dérivable x_0, et $(\frac{f}{g})$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus*

1. $(h.f(x_0))' = h.f'(x_0)$.
2. $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3. $(f(x_0).g(x_0))' = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.
4. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{(f'(x_0).g(x_0)) - (f(x_0).g'(x_0))}{g^2(x_0)}$.

Proposition 3.18. ***(Dérivée d'une fonction composée)***
Soient $f : X \to X_0$ et $g : X_0 \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $g(x_0)$ respectivement. Alors $fog : X \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(fog)'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0)).$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
(fog)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(fog)(x) - (fog)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0)).g'(x_0) \\
&= g'(x_0).f'(g(x_0)).
\end{aligned}$$

Exemple 3.23. *Soient les fonctions f et g définies par*

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = \sin(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto g(x) = \frac{x}{3}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{array}{rcl}(fog):\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (fog)(x)=\sin(\frac{x}{3}),\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}(fog)'(x) & = & g'(x).f'(g(x))\\ & = & \frac{1}{3}\cos(\frac{x}{3}).\end{array}$$

Proposition 3.19. ***(Dérivée d'une fonction réciproque)***
Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Définition 3.20. Soit $f: X\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur X, alors :

- f' est dite dérivée d'ordre 1 de f. Si f' est dérivable sur X alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f. On la note

$$f''=f^{(2)}=(f')'.$$

  D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(n)}=(f^{(n-1)})',\ \forall n\geq 1,\ \ f^{(0)}=f.$$

- On dit que f est de classe C^1 sur X si f est dérivable sur X et f^0 est continue sur X.
- On dit que f est de classe C^n sur X (et on écrit $f\in C^n(X)$) si f est n fois dérivable sur X et $f^{(n)}$ est continue sur X.
- f est dite de classe C^∞ sur X si elle est de classe C^n, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Théorème 3.21. ***(Régles de l'Hospital)***
Soient $f,g: X\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur X, dérivables sur $X-\{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\in\{0,\pm\infty\}$,
2. $\forall\ x\in X-\{x_0\},\ \ g'(x)\neq 0$,

alors

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Exemple 3.24. *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}\quad (FI),$$

par la suite, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos(0)=1.$$

3.4.3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 3.22. ***(Théorème de Rolle)***
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$,*
3. *$f(a)=f(b)$, alors*

$$\exists c\in]a,b[:\quad f'(c)=0.$$

Remarque 3.9. Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

Théorème 3.23. ***(Théorème des accroissements finis))***
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$, alors,*

$$\exists c\in]a,b[:\quad f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Exemple 3.25. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}$.*
On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto\ln(t)$ sur l'intervalle $[x,x+1]$. Il existe donc $c\in]x,x+1[$ tel que

$$\ln(x+1)-\ln(x)=(x+1-x)f'(c)\Rightarrow\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}.$$

On conclut car

$$c\in]x,x+1[\Rightarrow x<c<x+1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}.$$

Bibliographie

[1] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs, Librairie Armand Colin (1977).

[2] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, Précis de mathématiques, Analyse- première année, Bréal, Rosny 2003.

[3] M. Mehbali, Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle), Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).