Chapitre 2 : Les Systèmes linéaires

1 Généralités :

1.1 Définition d'un système linéaire :

Un système linéaire de m équations à n inconnues se présente sous la forme suivante :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

* Les coefficients $a_{ij}, \forall i = 1, 2, ..., m, \forall j = 1, 2, ..., n$ et b_i, $\forall i = 1, 2, ..., m$ sont des réels donnés.

* Les variables $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les inconnues du système.

* Le système (S) est compatible s'il admet aù moins une solution, sinon (S) est dit incompatible.

* Le système (S) est dit homogène si $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$.

Exemple :

$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$ est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues.

1.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire :

Tout système linéaire $(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ peut écrire sous la forme matricielle $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$(S):\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \dots\dots\dots\dots & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- La matrice A s'appelle la matrice de système.

- On appelle matrice augmentée la matrice A à la quelle on a ajouté le vecteur b et on la note $\widetilde{A}=(A/b)$.

- On appelle *rang* d'un système linéaire celui de sa matrice associée A.

Exemple :

$(S):\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=5 \\ -2x_1-2x_2+2x_3=6 \\ 6x_1+10x_2-2x_3=1 \end{cases}$.

* La matrice de système $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ et la matrice augmentée $\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 2 & 6 \\ 6 & 10 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

* La forme matricielle de (S) est :

$$(S):\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

* $rang\,(S)=rang\,(A)$. $\det(A)=0$ donc $rang\,(A)<3$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=4\neq 0$ donc $rang\,(A)=2$ et $rang\,(S)=2$.

1.3 Systèmes équivalents :

.

Définition :

Un système linéaire (S_1) est dit équivalent à un autre système (S_2) si toutes les solutions du premier système (S_1) sont les même que celles du deusième et inversement.

* Trois cas de figure peuvent se présenter dans un système d'équations, a savoir $m=n, m>n$ et $m<n$.

1/ **Système linéaire de n équations à n inconnues $(m=n)$** :

* Si $\det(A)\neq 0$: la solution est unique.

* Si $\det(A) = 0$ et $rang\,(A) = rang\left(\widetilde{A}\right)$: (S) admet une infinité de solutions.

* Si $\det(A) = 0$ et $rang\,(A) \neq rang\left(\widetilde{A}\right)$: (S) n'admet pas de solutions.

2/ <u>**Système linéaire de m équations à n inconnues ($m > n$)**</u> :

* Si $rang\,(A) = rang\left(\widetilde{A}\right) = n$: la solution est unique.

* Si $rang\,(A) = rang\left(\widetilde{A}\right) < n$: (S) admet une infinité de solutions.

* Si $rang\,(A) \neq rang\left(\widetilde{A}\right)$: (S) n'admet pas de solutions.

3/ <u>**Système linéaire de m équations à n inconnues ($m < n$)**</u> :

* Si $rang\,(A) = rang\left(\widetilde{A}\right)$: (S) admet une infinité de solutions.

* Si $rang\,(A) \neq rang\left(\widetilde{A}\right)$: (S) n'admet pas de solutions.

2 Utilisation des Déterminants:

2.1 Résolution d'un système linéaire de Cramer :

.

Définition :

Un système linéaire est dit de Cramer si le nombre de ses inconnues est égal au nombre de ses équations et est égal à son rang.

Théorème :

* Un système linéaire est de Cramer si et seulement si sa matrice associée est carrée et inversible.

* Un système de Cramer admet une unique solution.

* L'unique solution d'un système linéaire homogène de Cramer est le vecteur nul.

2.1.1 Résolution par l'inversion de la matrice de système :

.

<u>**Etape1**</u>

- Vérifier si le système (S) est de Cramer:

* Si $\det(A) = 0$, Alors le système (S) n'est pas de Cramer.

* Si $\det(A) \neq 0$, Alors le système (S) est de Cramer passer à sa résolution (**Etape2**).

Etape2

- le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution de (S) seulement si

$$AX = b \;\Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

- Calculer A^{-1}
- Le vecteur $X = A^{-1}b$ est l'unique solution du système (S)

Exemple:

$(S) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 18$, $com\,(A) = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{18}\left(com\,(A)\right)^t \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

.

2.1.2 Résolution par la méthode de Cramer :

.

1/ Vérifier si le système (S) est de Cramer:
* Si $\det(A) = 0$, Alors le système (S) n'est pas de Cramer

* Si $\det(A) \neq 0$, Alors le système (S) est de Cramer, on passe à sa résolution (étape2)

2/ Calculer les détérminants de Cramer D_{x_i} $\forall 1 \leq i \leq n$. C'est le détérminant de la matrice A oŭ la i^{eme} colonne est remplacée par le vecteur b

$$D_{x_i} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & & . & . & . & & . \\ . & . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & & . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

3/Calculer la solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_i = \frac{D_{x_i}}{\det A}$

Exemple:

$(S) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \end{cases}$

$\det A = 18 \neq 0$

$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -108$, $D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} = 0$, et $D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 108.$

$x_1 = \frac{-108}{18} = -6$, $x_2 = \frac{0}{18} = 0$,et $x_3 = \frac{108}{18} = 6$ alors

$X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système (s).

2.1.3 Résolution par la méthode de Gauss :

.

La méthode de Gauss consiste à construire un système linéaire équivalent du système donnée de telle que sa matrice associée soit triangulaire.

Exemple :

$$(S):\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3=-12 \end{cases}$$

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -12 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & -5 & -30 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-\frac{7}{5}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{108}{5} \end{array}\right).$$

Alors ;

$$(S):\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=6 \\ -5x_2-x_3=-6 \\ -\frac{18}{5}x_3=-\frac{108}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{18}{5}x_3=-\frac{108}{5}\Rightarrow x_3=-\frac{108}{5}\times\frac{-5}{18}=\frac{108}{18}=6.$$

$$-5x_2-x_3=-6\Rightarrow -5x_2=-6+x_3\Rightarrow x_2=\frac{-6+x_3}{-5}=\frac{-6+6}{-5}=0.$$

$$x_1+3x_2+2x_3=6\Rightarrow x_1=6-3x_2-2x_3\Rightarrow x_1=6-0-12=-6.$$

Donc :

$$X=\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ est l'unique solution du système } (S).$$

2.1.4 Résolution par la méthode de Gauss-Jordan :

.

La méthode de Gauss-Jordan consiste à construire un système linéaire équivalent du système donnée de telle que sa matrice associée soit la matrice I_n, $([A/b]\longrightarrow[I_n/X])$.

Exemple :

$$(S):\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3=-12 \end{cases}$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -12 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -7 & -5 & -30 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & -7 & -5 & -30 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{108}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow -\frac{5}{18}L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{L1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5}L_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Donc :

$$X = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2.2 Résolution d'un système linéaire non de Cramer :

.

Définition :

Un système linéaire non de Cramer est un système dont le nombre des inconnues n'est pas égal au nombre d'équations où dont le nombre des inconnues est égal au nombre d'équations mais $\det(A) = 0$ (A la matrice de système).

Remarque :

Pour un système linéaire non de Cramer, on peut utiliser la méthode de Gauss.

Résolution d'un système linéaire non de Cramer avec second membre : .

On propose à résoudre un système linéaire non de Cramer de m équations à n inconnues écrit sous sa forme matricielle $AX = b$;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Etapes de la résolution :

1/ Calculer $rang\,(A) = r$,

* Si $n = m = r$, le système est de Cramer et sa résolution se fait par l'une des méthodes uvies précédement.

* Sinon, le système est non de Cramer, pour le résoudre on suit les étapes suivantes (étape 2).

2/ On suppose que la matrice A_r formée par r pemières lignes et les r pemières colonnes de la matrice A a un déterminant non nul Δ_r

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1r} & a_{1(r+1)} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ a_{r1} & . & . & . & a_{rr} & a_{r(r+1)} & . & . & . & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & . & . & . & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & . & . & . & a_{(r+1)n} \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mr} & a_{m(r+1)} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1r} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & . & . & . & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

* Δ_r s'appelle le déterminant principal :

- les inconnues principales $x_1, ..., x_r$ dont les coefficients sont les colonnes de A_r.

- les autres inconnues $x_{r+1}, ..., x_n$ sont dites non principales où arbitraires.

- les équations principales sont lignes du déterminant principal, soient les r premières équations de système.

- les autres équations sont dites équations non principales.

3/ On construit les matrices carrées M_k avec $1 \leq k \leq m - r$ de dimension $(r+1, r+1)$ définies par :

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1r} & b_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & . & . & . & a_{rr} & b_r \\ a_{(r+k)1} & . & . & . & a_{(r+k)r} & b_{r+k} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq k \leq m - r$$

* Les déterminants des matrices M_k, $1 \leq k \leq m-r$ s'appellent les déterminants caractéristiques du système $AX = b$, on note $\Delta_k = \det(M_k)$, $1 \leq k \leq m-r$.

4/ Vérifier les conditions de compatibilité du système $AX = b$, c-à-d $\Delta_k = 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq m-r$.

* Si $\exists\ 1 \leq k \leq m-r$ tel que $\Delta_k \neq 0$, les équations sont dites incompatibles et le système $AX = b$ est impossible.

* Si $\forall\ 1 \leq k \leq m-r$ tel que $\Delta_k = 0$, le système $AX = b$ est possible. Pour le résoudre, on résout le système formé des r équations principales dont les inconnues sont les inconnues principales et les inconnues arbitraires sont considérées comme des paramètres et ils sont ajoutées au second membre du système.

Exemple 1 :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$m = 4, n = 4$ et $rang\,(A) = 2$.

* Un déterminant principal est $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$

- les inconnues principales x_1 et x_2.
- les inconnues arbitraires x_3 et x_4.
- les équations principales : 1 et 2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Les conditions de compatibilité sont $\Delta_k = 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq 2$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les conditions de compatibilité sont vérifiées, alors le système est possible; sa résolution revient à résoudre le système de Cramer suivant

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - (3x_3 + x_4) \\ x_2 = -(2x_3 + 2x_4) \end{cases} .$$

la solution de (S_1) est donnée par

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = 1 - (3x_3 + x_4) - 2x_2 = 1 - 3x_3 - 4x_4 + 4x_3 + 4x_4 = 1 + x_3 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{array}\right. .$$

la solution du système (S) est alors égale à l'ensemble

$$E(S) = \{(1 + x_3, -2x_3 - 2x_4, x_3, x_4) / x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 2 :

$$(S) : \left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_3 = 2 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$m = 4, n = 4$ et $rang\,(A) = 2$.

* Un déterminant principal est $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$;

- les inconnues principales x_1 et x_2.
- les inconnues arbitraires x_3 et x_4.
- les équations principales : 1 et 2 $\left\{\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}\right.$.

Les conditions de compatibilité sont $\Delta_k = 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq 2$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$\exists k = 2$ avec $\Delta_2 \neq 0$, les conditions de compatibilité ne sont pas vérifiées, alors le système est impossible.