Chapitre 1: Les Matrices

1 *Définitions*

1.1 Matrice

On appelle matrice à éléments dans un corps K $(K = R)$, tout tableau carré ou réctangulaire d'éléments a_{ij} $(a_{ij} \in R)$.

i : l'indice de la ligne et j : l'indice de la colonne.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1j} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2j} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{ij} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mj} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m = nombre de lignes.

n = nombre de colonnes.

Si $m = n$: la matrice A est dite carrée.

Si $m \neq n$: la matrice A est dite réctangulaire.

1.2 Dimension :

Le couple (m, n) est appelé dimension de la matrice A.

Remarque :

* Une matrice de dimension $(m, 1)$ est une matrice colonne (vecteur).
* Une matrice de dimension $(1, n)$ est une matrice ligne.

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

dimension de A est $(3, 3)$, $\dim(B) = (4, 2)$ et $\dim(C) = (2, 3)$.

$a_{22} = -1$, b_{13} n'existe pas, $b_{32} = 2$, $c_{13} = 1$.

1.3 Diagonale principale :

On appelle diagonale principale d'une matrice carrée d'ordre n; $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} =$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ les éléments a_{11},a_{22},a_{33},a_{ii},..., a_{nn}.

1.4 Egalité de 2 matrices :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices, on dit que A est égale à B si et seulement si elles sont de même type (même dimension) et $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, \forall j$.

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
$A \neq B$ car elles ne sont pas de même type; $\dim(A) \neq \dim(B)$.
$A \neq C$ car il existe $a_{21} \neq c_{21}$.

2 Opérations sur les matrices :

2.1 Addition de deux matrices :

Définition :
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension (m, n), on additionne terme à terme pour obtenir : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ de dimension (m, n).

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+0 & 2+1 \\ 1+1 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
$A + C$ n'existe pas car A et C ne sont pas de même dimension.

Propriétés :
Soient A, B et C trois matrices de dimension (m, n) et $\mathbf{0}_{(m,n)}$ la matrice de dimensions (m, n) dont tous ses éléments sont égaux à 0:
1/ $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2/ $A+\mathbf{0}_{(m,n)}=A$.
3/ $A+(-A)=\mathbf{0}_{(m,n)}$.
4/ $A+B=B+A$.

2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Définition :

Soient $A=(a_{ij})$ une matrice de dimension (m,n) et $\lambda\in R$, on définit la matrice λA comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par λ c-à-d : $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

λA est aussi de dimension (m,n).

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda=-2$.

$\lambda A=\begin{pmatrix} -2\times 2 & -2\times 3 \\ -2\times 4 & -2\times 2 \\ -2\times 1 & -2\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

Soient A et B deux matrices de dimension (m,n) et λ,μ deux réels :
1/ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
2/ $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
3/ $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.
4/ $1\times A=A$ et $0\times A=\mathbf{0}_{(m,n)}$.

2.3 Multiplication de matrices :

Définition :

Soient $A=(a_{ij})$ une matrice de dimension (m,n) et $B=(b_{ij})$ une matrice de dimension (n,l). Le produit des deux matrices A et B est une matrice C de dimension (m,l). $A_{(m,n)}\times B_{(n,l)}=C_{(m,l)}$.

$$C=(c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq l}} \quad \text{avec } c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

Remarque :

Le produit AB n'est donc possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

AB n'existe pas car (le nombre de colonnes de $A \neq$ le nombre de lignes de B).

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2+3\times 1 & 2\times 1+3\times 4 \\ 4\times 2+2\times 1 & 4\times 1+2\times 4 \\ 1\times 2+0\times 1 & 1\times 1+0\times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 10 & 12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque :
En général la multiplication de deux matrices n'est pas commutative :

$$AB \neq BA.$$

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
$AB = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors $AB \neq BA$.

Propriétés :
Soient $A_{(m,n)}$, $B_{(n,l)}$, $C_{(l,p)}$, $D_{(n,l)}$ et $E_{(l,m)}$
1/ $(AB)\,C = A\,(BC)$.
2/ $A\,(B+D) = AB + AD$.
3/ $(B+D)\,E = BE + DE$.

2.4 Transposition de matrice :

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$, la matrice transposée de A (notée A^t) est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes :

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .... & a_{m2} \\ . & . & & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si A est de dimension (m, n), alors A^t est de dimension (n, m).

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad a_{ij} = a^T_{ji}$

Propriétés :

Soient $A_{(m,n)}$, $B_{(m,n)}$, et $C_{(n,l)}$ trois matrices et $\lambda \in R$

1/ $(A+B)^t = A^t + B^t$.

2/ $(A^t)^t = A$.

3/ $(\lambda A)^t = \lambda (A^t)$.

4/ $(AC)^t = C^t A^t$.

3 Matices particulières :

3.1 Matrice diagonale:

Définition:

Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est notée $diag\ (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

dont certains ou tous les scalaires d_{ii} peuvent etre égaux à 0.

Exemple

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.2 Matrice identité :

Définition:

La matrice identité ou matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

I_n est la matrice unité d'ordre n et est donc définie comme une matrice diagonale avec 1 sur chaque entrée de sa diagonale principale.

Exemple :

$$I_1 = (1),\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Matrice inversible:

Définition :

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B est unique, elle est appelé matrice inverse de A et on la note A^{-1}.

Remarque :

Cette relation est symétrique, c'est à dire : si B est l'inverse de A, alors A est l'inverse de B

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3.4 Matrice Symétrique:

3.5

Définition :

Une matrice carréeA est dite symétrique si et seulement si $A^T = A$. Autrement dit si $\forall i \neq j$; $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

3.6 Matrice Triangulaire:

Définition :

une matrice triangulaire est une matrice carrée dont les éléments au dessous (ou au dessus) de la diagonale principale sont tous nuls.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

4 Déterminant :

4.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, alors $\det(A) = ad - bc$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 3 \times 5 = 14 - 15 = -1.$$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Règle de SARRUS :

La règle de Sarrus consiste à écrire les trois colonnes de la matrice et à répéter, dans l'ordre, les deux premières lignes en dessous de la matrice. Il suffit alors d'effectuer les produits des coefficients de chaque diagonale et d'en faire la somme si la diagonale est descendante ou la différence si la diagonale est ascendante.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors $S = \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \end{matrix}$ et

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (2 \times 4 \times 1 + 1 \times 1 \times 0 + 3 \times 1 \times 2) - (0 \times 4 \times 3 + 2 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 1) \\ &= (8 + 0 + 6) - (0 + 4 + 1) \\ &= 14 - 5 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Remarque :
Cette règle n'est pas valable que pour des matrices carrées d'ordre 3.

4.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n :

Définition 1 :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n, le mineur $M_{ij} = |A_{ij}|$ est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de A.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $M_{11} = |A_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 3 \times 7 = 6 - 21 = 15$,
$M_{12} = |A_{12}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - 3 \times 8 = -9$, $M_{22} = |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -26$.

Définition 2 :
Le cofacteur Δ_{ij} d'une matrice carrée A est définie par la relation

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $\Delta_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times 15 = 15$, $\Delta_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times (-9) = 9$, $\Delta_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times (-26) = 26$.

4.3.1 Méthode des cofacteurs :

.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n, et soit $\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{vmatrix}$; alors

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \qquad \text{developpement par rapport à la ligne } i.$$

où bien

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \qquad \text{developpement par rapport à la } j^{eme} \text{ colonne.}$$

Remarque :

D'une manière générale, le déterminant est obtenue en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

1/ Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne où la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros).

2/ Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par son cofacteur Δ_{ij}.

3/ Calculer la somme des résultats.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, choisir la 2^{eme} colonne :

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\Delta_{i2} \\
&= a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} \\
&= 1 \times \Delta_{12} + 0 \times \Delta_{22} + 0 \times \Delta_{32} \\
&= (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -(-2) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

4.3.2 Propriétés du déterminant d'une matrice :

.

1/ Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.

2/ Si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul.

3/ On peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant.

4/ Si l'on multiplie tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne par un réel k, le déterminant est multiplié par k.

5/ Si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.

6/ $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

7/ Le déterminant d'une matrice triangulaire A est le produit des coefficients diagonaux c-à-d $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times ..... \times a_{nn}$.

4.3.3 Méthode du pivot (GAUSS) :

.

Cette méthode consiste à remplacer la matrice par une matrice triangulaire en utilisant seulement des permutations de lignes ou colonnes et des ajouts à une ligne d'un multiple d'une autre ligne de manière à faire apparaitre un maximum de zéros.

Le principe est le suivant :

1/ On choisit dans la matrice un terme non nul a_{ij}, en général le premier terme en haut à gauche, que l'on appelle le pivot.

2/ Si le terme choisi n'est pas a_{11}, on peut, en permutant les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j, le mettre à la bonne position. On obtient alors une matrice A' telle que $\det(A) = (-1)^{i+j} \det(A')$.

3/ On élimine tous les termes situés sous le pivot a_{11} en ajoutant à la ligne k la ligne 1 multipliée par $\left(-\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right)$. Cette opération ne change pas la valeur du déterminant ;

4/ On recommence ensuite le même processus dans la sous-matrice privée de sa première ligne et de sa première colonne ;

5/ On obtient alors à la dernière étape une matrice triangulaire dont le déterminant est égal, au signe près, au déterminant de la matrice de départ.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on peut choisir -2 comme premier pivot et ajouter ainsi à la seconde ligne, la première multipliée par $\frac{-1}{2}$ et ajouter à la troisième ligne la première ligne :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

En choisissant 2 comme second pivot et en permutant les lignes 2 et 3, ce qui conduit à multiplier par (-1) le déterminant, on obtient directement une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = (-1)\times\left(-2 \times 2 \times \frac{9}{2}\right) = -(-18) = 18.$$

5 Inversion de matrice :

5.1 Méthode de cofacteurs :

Définition (comatrice) :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, la matrice des cofacteurs Δ_{ij} noté $com\,(A)$ est appelée la comatrice de A.

$$com\,(A) = [\Delta_{ij}] = \left[(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|\right].$$

Théorème 1 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, A est une matrice inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Théorème 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(com\,(A))^t\,.$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2 \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(com\left(A\right)\right)^t$.

$$\begin{aligned}
com\left(A\right) &= \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\left(com\left(A\right)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

.

Remarque :

1/ Si A est une matrice inversible, alors $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

2/ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2 inversible ($ad - bc \neq 0$), alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

3/ Si $A = diag\ (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ est une matrice diagonale inversible, alors $A^{-1} = diag\ \left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right)$.

5.2 Méthode de Gauss-Jordan :

L'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée pour inverser une matrice carrée si celle-ci est inversible. Pour cela, on crée une matrice à n lignes et $2n$ colonnes en bordant la matrice A par la matrice identité I_n, ce qui génère une matrice augmentée notée $[A|I_n]$. Si la matrice d'entrée est inversible, on réalise ensuite une suite d'opérations élémentaires sur la matrice A pour la ramener à l'identité. La même suite d'opérations élémentaires effectuée sur la matrice identité I_n donne l'inverse de la matrice de départ. La matrice finale est de la forme $\left[I_n|A^{-1}\right]$.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice invercible car $\det(A) = -4 \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
[A \mid I_3] &= \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right] \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longrightarrow}} \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\right] \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L2}{\longrightarrow} \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\right] \\
&\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3}{\longrightarrow} \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)\right] \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\longrightarrow}} \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)\right] \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \left[\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Définition (Matrice échelonnée) :

Une matrice est échelonnée si le nombre de 0 au d ébut de chaque ligne est strictement croissant quand on passe d'une ligne à la suivante.

Le premier élément non nul de chaque ligne dans une matrice échelonnée s'appelle le pivot.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition (Matrice échelonnée réduite) :

Une matrice échelonnée est dite matrice échelonnée réduite, si elle est échelonnée et les pivots valent 1 .

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Rang d'une matrice :

Définition 1 :

Une sous-matrice de A est une matrice obtenue de A en éliminant un certain nombre de lignes et de colonnes.

La plus grande sous-matrice est la matrice A elle même, la plus petite n'est composée qu'un seul élément de A.

Remarque :

L'ordre maximum d'une sous-matrice carrée d'une matrice A de dimension (m, n) est égal au plus petit des entiers m et n.

Soit r un nombre entier tel que $r \leq \min(m, n)$, le rang d'une matrice A de dimension (m, n) est égal à r s'il existe au moin une sous-matrice carrée d'ordre "r" qui est non singulière ($\det \neq 0$) et toutes les sous matrices carrée d'ordre supérieur à r sont singulières ($\det = 0$).

Définition 2 :

Le rang d'une matrice A est égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée non singulière ($\det \neq 0$).

Propriétés :

1/ Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est égal à n.

2/ Deux matrices de même dimension sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

3/ Une matrice et sa transposée ont même rang.