Corrigé de l'exercice1: On a les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 3}}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 9 \\ \dots & -1 & \dots \\ 2 & \dots & 5 \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$.

1. **Le Format de A et B :**

Le format d'une matrice est de donner le nombre de lignes et de colonnes dans la matrice. Ainsi :
A contient 2 lignes et 3 colonnes donc on dit A est de format $(2,3)$.
B contient 3 lignes et 3 colonnes donc on dit B est de format $(3,3)$.

2. **La valeur des éléments a_{12}, a_{21} et a_{23} :**

Rappelons que la notation a_{ij} désigne le nombre qui occupe la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne dans la matrice A. Ainsi :

a_{12} est l'élément de la 1^{ere} ligne et de la 2^{eme} colonne donc $a_{12} = -3$.

a_{21} est l'élément de la 2^{eme} ligne et de la 1^{ere} colonne donc $a_{21} = 5$.

a_{23} est l'élément de la 2^{eme} ligne et de la 3^{eme} colonne donc $a_{23} = 4$.

3. **L'écriture de la matrice B :**

On doit compléter la matrice B en plaçant chaque élément b_{ij} a la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne dans B. En faisant ça, on a:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ 7 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4. **La transposée A^t :** (La notation A^t se lit ***la transposée*** de A)

La matrice transposée A^t est obtenue en transformant les lignes (ou colonnes) de A en colonnes (en lignes) dans A^t. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Son format est $(3,2)$: 3 lignes et 2 colonnes.

Corrigé de l'exercice2: On a les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1. **Les calculs :**

$C + D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 & -1-2 \\ 1+7 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

$5C - 2D = 5\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-10 & -5+4 \\ 5-14 & 20-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$.

$C^2 - D$: On a $C^2 = C.C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$. Ainsi : $C^2 - D = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ■ $XX^t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}(2 \quad -1 \quad 4) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\-2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2\\0&8\\2&4\end{pmatrix}.$$

2. Détermination De F et G :

On a $\begin{cases}F+G=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-4\end{pmatrix}\dots\dots\dots(1)\\ F-G=\begin{pmatrix}-4&1\\-1&10\end{pmatrix}\dots\dots\dots(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2F=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&1\\-1&10\end{pmatrix}\dots\dots\dots(1)+(2)\\ 2G=\begin{pmatrix}6&3\\-3&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&1\\-1&10\end{pmatrix}\dots\dots\dots(1)-(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2F=\begin{pmatrix}2&4\\-4&6\end{pmatrix}\\ 2G=\begin{pmatrix}10&2\\-2&-14\end{pmatrix}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}F=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&4\\-4&6\end{pmatrix}\\ G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&2\\-2&-14\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\\ G=\begin{pmatrix}5&1\\-1&-7\end{pmatrix}\end{cases}$

Corrigé de l'exercice3: On a la matrice suivante :

$$D=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1. Calcul du $\det D$ en développant suivant la première ligne :

Dans ce cas le déterminant est donné par la formule suivante :

$\det(D)=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0A_{11}+(1)A_{12}+(1)A_{13}$, où A_{ij} sont les cofacteurs de la première ligne tels que :

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-\big((2)(1)-(1)(1)\big)=-1, A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}=+\big((2)(1)-(2)(1)\big)=0.$ Ainsi :

$$\det(D)=0+(1)(-1)+(1)(0)=-1$$

2. Calcul du $\det D$ en développant suivant la première colonne :

Dans ce cas le déterminant est donné par la formule suivante :

$\det(D)=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0A_{11}+(2)A_{21}+(1)A_{31}$, où A_{ij} sont les cofacteurs de la première colonne tels que :

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=-\big((1)(1)-(1)(1)\big)=0, A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=+\big((1)(1)-(2)(1)\big)=-1.$ Ainsi :

$$\det(D)=0+(2)(0)+(1)(-1)=-1$$

Comme remarque, la valeur du déterminant ne dépend pas de la ligne ou la colonne choisie pour le calculer.

3. Calcul du $\det D$ par la méthode de Sarrus : (Cette méthode ne s'applique que pour les matrices d'ordre 3)

$$\det(D)=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}0&1\\2&2\\1&1\end{matrix}\Bigg|=(0)(2)(1)+(1)(1)(1)+(1)(2)(1)-(1)(2)(1)-(0)(1)(1)-(1)(2)(1)$$

$$=0+1+2-2-0-2=-1.$$

4. Si la matrice D est inversible :

On sait qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A\neq 0$. Et comme $\det D\neq 0$, on déduit que la matrice D est inversible.

Corrigé de l'exercice4: On a la matrice suivante :

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$$

1. **Les valeurs de t pour lesquelles A_t est inversible :**

Ceci est équivalent à déterminer les valeurs de t pour lesquelles $\det A_t \neq 0$. On a :

$$\det A_t = \begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0A_{31} + 0A_{32} + (t-4)A_{33}$$

Avec $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = +\big((t-2)(t+1) - (4)(1)\big) = t^2 - t - 6$. Ainsi :

$$\det A_t = (t-4)(t^2 - t - 6)$$

De plus, on a $\det A_t = 0$ si et seulement si :

$$(t-4)(t^2-t-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-4=0 \\ t^2-t-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ \Delta = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=3 \\ t=-2 \end{cases}$$

Donc, $\det A_t \neq 0$ si et seulement si $t \notin \{4, 3, -2\}$. Et par conséquent, A_t est inversible si et seulement si $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 3, -2\}$

Corrigé de l'exercice5: La matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice inverse par la méthode des cofacteurs consiste en quatre étapes :

1. **Le déterminant :**

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (1)(-1) - (2)(2) = -5 \neq 0$$

Donc A_1 est inversible, A_1^{-1} existe.

2. **Les cofacteurs :**

$$\begin{cases} A_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1, A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2 \\ A_{21} = (-1)^{2+1}(2) = -2, A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1 \end{cases}$$

3. **La comatrice :** $com\ A = (A_{ij})$.

$$comA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (comA)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **La matrice inverse :** $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t$.

$$A_1^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

La matrice :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Le déterminant :**

$\det A_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31}$, où A_{ij} sont les cofacteurs de la première colonne tels que :

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +\big((2)(1) - (0)(0)\big) = 2$. Ainsi $\det A_2 = (-3)(2) = -6 \neq 0$.

Donc A_2 est inversible, A_2^{-1} existe.

2. **Les cofacteurs :**

$$\begin{cases} A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{12} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \end{cases}$$

3. **La comatrice :** $com\ A = (A_{ij})$.

$$comA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } (comA)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

4. **La matrice inverse :** $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t$.

$$A_2^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Le déterminant :**

$\det A_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{31} + 0A_{32} + 1A_{33}$, où A_{ij} sont les cofacteurs de la troisième ligne tels que :
$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = +\big((-3)(-3) - (9)(1)\big) = 0$. Ainsi $\det A_3 = (1)(0) = 0$.
Donc A_3 n'est pas inversible, A_3^{-1} n'existe pas.

La matrice :

$$A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. **Le déterminant :**

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2 & 0 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{matrix}\Bigg| = (-2)(3)(5) + (0)(2)(0) + (4)(-5)(-1) - (4)(3)(0) — (-2)(2)(-1) - (0)(-5)(5)$$
$$= -30 + 0 + 20 - 0 - 4 - 0 = -14 \neq 0$$

Donc A_4 est inversible, A_4^{-1} existe.

2. **Les cofacteurs :**

$$\begin{cases} A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 17, A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25, A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -4, A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12, A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -16, A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \end{cases}$$

3. **La comatrice :** $com\, A = (A_{ij})$.

$$comA = \begin{pmatrix} 17 & 25 & 5 \\ -4 & -10 & -2 \\ -12 & -16 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } (comA)^t = \begin{pmatrix} 17 & -4 & -12 \\ 25 & -10 & -16 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

4. **La matrice inverse :** $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t$.

$$A_4^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 17 & -4 & -12 \\ 25 & -10 & -16 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice6: On a la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **Calcul du $A^2 - A$.** On a :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autre terme :

$$A^2 - A = 2I_3$$

2. **La Déduction :** L'idée est de mettre cette dernière égalité sous la forme $BA = I_3$. Et ceci signifie A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$. On a :

$$A^2 - A = 2I_3 \Longrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I_3 \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3\right)A = I_3$$

D'où A est inversible et son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$