**UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA**
**Faculté des Sciences Exactes**
**Département d'Informatique**
$TD_1$-Analyse 4

---

**Exercice 1.** Calculer les dérivées partielles d'ordre trois pour les fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = e^{xy}$ ;
2. $f(x,y) = e^{x} siny$ ;
3. $f(x,y) = y\ln(x^2+1)$

**Solution**

1. $f(x,y) = e^{xy}$ ;
   Il est claire que la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc les dérivées croisées d'ordre deux sont égales ainsi que les dérivées croisées d'ordre trois.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   Les dérivées d'ordre un sont :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}\,;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}.$$

   Les dérivées secondes sont :

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy}\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy}.$$

   Les dérivées d'ordre trois sont :

   $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = y^3e^{xy}\,;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = x^3e^{xy}\,;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2} = (2+xy)ye^{xy}\,;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = (2+yx)xe^{xy}.$$

2. $f(x,y) = e^{x}\sin y$ ;
   Là aussi, la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$,et donc les dérivées croisées d'ordre deux et d'ordre trois sont égales.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   Les dérivées d'ordre un sont :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x}\sin y\,;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x}\cos y.$$

   Les dérivées secondes sont :

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x}\sin y;\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{x}\cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x};\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{x}\sin y.$$

   Les dérivées d'ordre trois sont :

   $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = e^{x}\sin y;\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -e^{x}\cos y;\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y.$$

3. $f(x,y) = y \ln(x^2+1)$ ;
   Le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}^2$ et la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur son domaine, donc les dérivées croisées d'ordre deux et d'ordre trois sont égales.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

   Les premières dérivées sont :
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+1} \,;\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x^2+1).$$
   Les dérivées secondes sont :
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$
   Les dérivées d'ordre trois sont :
   $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{4xy(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};$$
   $$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 0.$$

**Exercice 2.** Soit $U$ un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $U$.

1. Montrer que si pour tout $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in U$, $Df(x) = 0$ (c'est à dire est une forme linéaire nulle), alors $f$ est une application constante sur $U$.
2. Montrer que si pour tout $x = (x_1, \dots x_n)$, $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq k$, alors $f$ est $k$-lipschitzienne.

**Solution**

1. Par définition, $f$ est une application constante sur l'ouvert $U$ si pour tout $x, y \in U$, $f(x) = f(y)$. Soit $x, y \in U$, puisque $U$ est un convexe et $f$ est une application différentiable, $\exists c \in ]x, y[$ tels que $f(x) - f(y) = Df(c)(x-y) = 0$. Ceci implique que pour tout $x, y \in U$, $f(x) = f(y)$. D'où $f$ est une application constante sur $U$.
2. Puisque $U$ est un convexe et $f$ est une application différentiable, alors pour tout $x, y \in U$, $\exists c \in ]x, y[$ tels que $f(x) - f(y) = Df(c)(x-y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(x_i - y_i)$. Ceci implique que :
   $\mid f(x) - f(y) \mid = \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(x_i - y_i) \mid \leq \sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(x_i - y_i)| \leq \sum_{i=1}^n k|x_i - y_i| = k \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. ce qui donne, pour tout $x, y \in U$
   $|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|_1$. Par conséquent, $f$ est une application $k - \mathit{lipschitzienne}$.

**Exercice 3.** Écrire la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ de la fonction $f$ dans chaque cas :

1. $f(x,y) = e^{xy}$ ;
2. $f(x,y) = e^x siny$ ;
3. $f(x,y) = y \ln(x^2+1)$

**Remarque**
Dans la formule de Taylor d'ordre $p$, on peut remplacer le reste $R_p(A,H)$ par $\circ(\parallel H \parallel^p)$ qui signifie que le reste d'ordre $p$ est négligeable par rapport à $\parallel H \parallel^p$.
**Solution**
Il est claire que les trois fonctions sont de classe $C^\infty$ sur leurs domaines de définition, donc chacune admet la formule de Taylor d'ordre quelconque.

1. $f(x,y) = e^{xy}$.
   Par définition, la formule de Taylor d'ordre deux d'une fonction $f$ au voisinage de $(0,0)$ est
   $$f(h,k) = f(0,0) + \frac{Df(0,0)(h,k)^{(1)}}{1!} + \frac{D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)}}{2!} + o(\|(h,k)\|^2)$$
   On a
   $D^{(1)}f(0,0)(h,k)^{(1)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = 0.$

   $D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)k^2$
   $D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)} = 0 + 2hk + 0 = 2hk.$

   $D^{(3)}f(\theta h,\theta k)(h,k)^{(3)} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta hx,\theta k)h^3 + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\theta h,\theta k)h^2k + 3\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(\theta h,\theta k)hk^2 + \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta h,\theta k)k^3 = \theta^3k^3e^{\theta^2hk}h^3 + 3(2+\theta^2hk)\theta ke^{\theta^2hk} + 3(2+\theta^2hk)\theta he^{\theta^2hk} + \theta^3h^3e^{\theta^2hk}k^3 = (h+k)e^{\theta^2hk}(2(\theta hk)^3 + 6 + 3\theta^2hk)$ Ainsi
   $$e^{hk} = e^0 + \frac{2}{2!}hk + o\|(h,k)^2\| = 1 + hk + 1/6((h+k)e^{\theta^2hk}(2(\theta hk)^3 + 6 + 3\theta^2hk)).$$

2. $f(x,y) = e^x \sin y$.
   La formule de Taylor d'ordre deux d'une fonction $f$ au voisinage de $(0,0)$ est
   $$f(h,k) = f(0,0) + \frac{Df(0,0)(h,k)^{(1)}}{1!} + \frac{D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)}}{2!} + o(\|(h,k)\|^2)$$
   On a
   $D^{(1)}f(0,0)(h,k)^{(1)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = k.$

   $D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)k^2$
   $D^{(2)}f(0,0)(h,k)^{(2)} = 0 + 2hk + 0 = 2hk.$
   Ainsi
   $$e^h \sin k = 0 + k + \frac{2}{2!}hk + o\|(h,k)^2\| = k + hk + o(\|(h,k)\|^2).$$

3. $f(x,y) = y\ln(x^2+1)$
   La formule de Taylor pour cette fonction est $k\ln(h^2+1) = o(||(h,k)||^2)$

**Exercice 4.** On dit qu'une fonction $f$ est harmonique sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ si $f \in C^2(U)$ et pour tout $X = (x_1, x_2, \dots x_n) \in U$, $\sum_{1\le i\le n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$.
Montrer que la fonction $f(x,y) = log(x^2+y^2)$ est harmonique sur son domaine de définition.
**Solution**

Le domaine de définition de $f$ est $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
Pour tout $(x, y) \in D_f$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}. \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il est claire que les dérivées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ sont continues sur } D_f.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

D'où $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

**Exercice 5.** Étudier l'existence des extremums pour la fonction $f$ dans les cas suivant :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 2$ ;
2. $f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$,
3. $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + 3z^3 - 4x - 4y - z$,

**Solution**

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 2$

   La fonction $f$ est un polynôme donc elle est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$
   Les points critiques de $f$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x = 0. \end{cases}$$

   Après résolution, on trouve comme solution le point $a = (0,0)$.
   $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ ; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. Puisque $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ et $r = 2 > 0$, alors le point $(0,0)$ est un minimum local strict.
   **Remarque.** On montre que le point $(0,0)$ est un minimum globale. En effet, on a $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, donc $(x-y)^2 \geq 2xy \geq xy$. D'autre part, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy = (x-y)^2 + xy \geq 0$ et donc $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 2 \geq 2$ pour tout $(x,y)$.
2. $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - xy - x^3$

   La fonction $f$ est un polynôme donc elle est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$
   Les points critiques de $f$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x - y - 3x^2 = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Après résolution, on trouve comme solution les points $a = (0,0)$ et $b = (\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$.
Etude du point $a = 0,0)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8 - 6x$, donc $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8$ ;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$, donc $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$ et
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$, donc $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. Puisque $rt - s^2 = 8 \times 2 - 1 = 15 > 0$ et $r = 8 > 0$, alors le point $(0,0)$ est un minimum local strict.
Etude du point $b = (5/2, 5/4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8 - 6x$, donc $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 - 15 = -7$ ;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$, donc $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$ et
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$, donc $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. Puisque $rt - s^2 = -7 \times 2 - 1 = -15 < 0$, le point $(5/2, 5/4)$ n'est pas un extremum pour $f$ il est donc un point selle.

**Exercice 6.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = x^y - y^x$

1. déterminer le domaine de définition de $f$ ;
2. Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts $I$ et $J$ tel que l'ensemble
$$E = \{(x,y) \in I \times J, f(x,y) = 0\} \tag{0.1}$$
soit le graphe d'une fonction $\phi$ de classe $C^1$ sur $I$ et vérifiant $\phi(1) = 1$ ;
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $\phi$ au voisinage de 1.

**Solution.**

1. déterminer le domaine de définition de $f$ ;
Le domaine de définition de $f$ est $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts $I$ et $J$ tel que l'ensemble
$$E = \{(x,y) \in I \times J, f(x,y) = 0\}$$
soit le graphe d'une fonction $\phi$ de classe $C^1$ sur $I$ et vérifiant $\phi(1) = 1$ ; Vérifions que toutes les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont réunies :
On a $f$ est de classe $C^2$ sur $D_f$ qui est un ouvert et $f(1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\ln x)x^y - xy^{x-1}$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$.
Ainsi, d'après le Théorème des fonctions implicites : Il existe deux intervalles ouverts $I$, $J$ contenant respectivement les points $x = 1$ et $y = 1$, avec $I \times J \subseteq D_f$, et une fonction $\phi; I \longrightarrow J$ de classe $C^1$ tels que $\forall x \in I, f(x, \phi(x)) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Il en résulte que le graphe de $\phi$ est
$$E = \{(x,y) \in I \times J, \phi(x) = y\} = \{(x,y) = \phi(x) \in I \times J, f(x,y) = 0\}$$
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $\phi$ au voisinage de 1.
D'après le théorème des fonctions implicites, $\phi'(1) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) / \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$. D'où $\phi(x) = \phi(1) + \frac{x-1}{1!}\phi'(1) + o(x-1) = 1 + x - 1 + o(x-1) = x + o(x-1)$.

**Exercice 7.** Une firme aéronautique fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. Soit $q_1$ le nombre d'avions vendus sur le premier marché et $q_2$ le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les fonctions de demande dans les deux marchés respectifs sont :
$\star p_1 = 60 - 2q_1$
$\star p_2 = 80 - 4q_2$
$p_1$ et $p_2$ sont les deux prix de vente. La fonction de coût total de la firme est :

$C = 50 + 40q$, où $q$ est le nombre total d'avions produits.
Trouver le nombre d'avions que la firme doit vendre sur chaque marché pour maximiser son bénéfice.